ционарных точках. После этого следует сравнить эти значения со значениями, которые функция принимает на границе открытого множества G, например, найдя, если это удается сделать, наибольшее и наименьшее значения функции f на границе области G. Сравнив наибольшее и наименьшее значения в стационарных точках с наибольшим и наименьшим значениями на границе множества G, мы можем, очевидно, найти искомый максимум и минимум f на $\overline{G}$.

В случае, когда G — плоская область и ее граница является кривой, заданной некоторым представлением $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, вопрос о нахождении экстремальных значений функции $f(x, y)$ на границе G сводится к исследованию на экстремум функции одного переменного $f(x(t), y(t))$, что делается уже известными нам методами.

Методы, которые можно применять в многомерном случае для отыскания экстремальных точек на границе области будут рассмотрены в § 43.

Упражнения 1. Найти экстремумы функции $z=x^3+12xy^2-15x-24y$.

2. Имеет ли функция $z=x^4y^2-3x^2y+2x+y$ экстремум в точке $(1, 1)$?

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-4x-2y+4$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x=4$, $y=-1$, $x-y=3$.

4. Пусть $a=\text{const}>0$, $E=\{(x, y): |x|<a,\ y\in R\}$. Найти все экстремумы функции $z=\frac{3}{2a}x^2+\sqrt{6(a^2-x^2)}\cos y$ в E и все ее наибольшие и наименьшие значения в $\overline{E}$.

5. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна $6a^2$. При каких значениях длин ребер его объем — наибольший?

§ 41. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

41.1 НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ОДНИМ УРАВНЕНИЕМ

Выясним условия, при которых одно уравнение с несколькими переменными определяет однозначную функцию, т. е. определяет одну из этих переменных как функцию остальных. Начнем наше рассмотрение с изучения уравнения, содержащего два неизвестных,

$$F(x, y)=0.$$

Если функция двух переменных $F(x, y)$ задана на некотором подмножестве A плоскости R^2_{xy}, $A\subset R^2_{xy}$ и существует такая функция одной переменной $y=f(x)$, определенная на множестве $B\subset \boldsymbol{R}_x$, содержащемся в проекции множества A на ось Ox, что для всех $x\in B$ имеет место $(x, f(x))\in A$ и справедливо тождество $F(x, f(x))=0$, то f называется *неявной функцией*, определяемой уравнением $F(x, y)=0$.

Лемма. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой прямоугольной окрестности*

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \xi, \quad |y - y_0| < \eta\} \,^{*)}$$

точки (x_0, y_0) и при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ строго монотонна по y на интервале $(y - \eta, y_0 + \eta)$. Тогда, если

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

то существуют окрестности $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 и $U(y_0) = (y - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ точки y_0 такие, что для каждого $x \in U(x_0)$ имеется и притом единственное решение $y \in U(y_0)$ уравнения $F(x, y) = 0$. Это решение, являющееся функцией от x и обозначаемое $y = f(x)$, непрерывно в точке x_0 и

$$f(x_0) = y_0.$$

Таким образом, лемма, в частности, утверждает, что при сделанных предположениях неявная функция $y = f(x)$, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$, существует и обладает тем свойством, что при условии $x \in U(x_0)$, $y \in U(y_0)$ равенства

$$F(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad y = f(x)$$

равносильны.

Доказательство. По условиям леммы функция $F(x, y)$ при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ строго монотонна по переменной y на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, в частности на нем строго монотонна функция $F(x_0, y)$. Пусть для определенности она строго возрастает. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, подчиненное лишь условию $0 < \varepsilon < \eta$. Поскольку функция $F(x_0, y)$ переменной y строго возрастает на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, и по условию $F(x_0, y_0) = 0$, то

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \qquad F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0.$$

Но функция двух переменных $F(x, y)$ по предположению непрерывна на открытом множестве $U(x_0, y_0)$ и $(x_0, y_0 - \varepsilon) \in U(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0 + \varepsilon) \in U(x_0, y_0)$, поэтому существует такое $\delta > 0$, $0 < \delta < \xi$, что в δ-окрестности точки $(x_0, y_0 - \varepsilon)$ выполняется неравенство $F(x, y) < 0$, а в δ-окрестности точки $(x_0, y_0 + \varepsilon)$ — неравенство $F(x, y) > 0$ (см. лемму 1 в п. 19.3). В частности, при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (рис. 150) будут справедливыми неравенства

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, \qquad F(x, y_0 + \varepsilon) > 0. \tag{41.1}$$

Положим

$$U(x_0) \overset{\text{def}}{=} (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \qquad U(y_0) \overset{\text{def}}{=} (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon).$$

---

*) В соответствии с принятыми в курсе обозначениями окрестность точки (x_0, y_0) правильнее было бы обозначить через $U((x_0, y_0))$, а не через $U(x_0, y_0)$. Для простоты обозначений мы будем опускать вторые скобки.

Поскольку при фиксированном $x \in U(x_0)$ функция $F(x, y)$ переменной y непрерывна на отрезке $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$, то из условия (41.1) согласно теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции (см. теорему 2 в п. 6.2) следует, что существует такое $y^* \in U(y_0)$ (см. рис. 150), что $F(x, y^*)=0$. В силу строгой монотонности функции $F(x, y)$ на отрезке $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$ по переменной y, указанное y^* единственно.

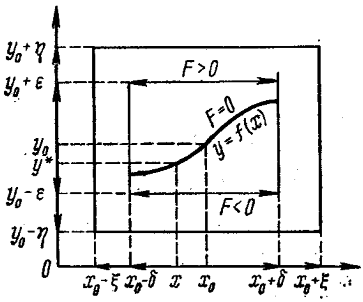

Рис. 150

Таким образом, получено однозначное соответствие (однозначная функция) $x \mapsto y^*$, $x \in U(x_0)$, $y^* \in U(y_0)$, которое будем обозначать через f: $y^*=f(x)$.

По определению этого соответствия для любого $x \in U(x_0)$ и $y^*=f(x)$ имеем

$$F(x, y^*)=0, \qquad y^* \in U(y_0),$$

причем точка y^*, обладающая этим свойством, единственна. Тем самым нами доказаны существование и единственность искомой функции f.

Далее, по условию леммы $F(x_0, y_0)=0$, и так как $x_0 \in U(x_0)$, $y_0 \in U(y_0)$, то в силу единственности функции f имеем $y_0=f(x_0)$.

Наконец, заметим, что $\varepsilon>0$ было фиксировано произвольным образом при условии, что $\varepsilon<\eta$, и что для него было найдено такое $\delta>0$, что из $|x-x_0|<\delta$ (т. е. из условия $x \in U(x_0)$) вытекало включение $f(x) \in U(y_0)$, т. е. неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Это и означает непрерывность функции f в точке x_0. $\square$

Удобные для приложения достаточные условия однозначной разрешимости уравнения $F(x, y)=0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), для которой $F(x_0, y_0)=0$, даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и имеет в этой окрестности частную производную $F_y(x, y)$, которая непрерывна в точке (x_0, y_0). Тогда, если*

$$F(x_0, y_0)=0, \qquad F_y(x_0, y_0)\neq 0,$$

то найдутся такие окрестности $U(x_0)$ и $U(y_0)$ соответственно точек x_0 и y_0, что для каждого $x \in U(x_0)$ существует и притом единственное решение $y=f(x) \in U(y_0)$ уравнения $F(x, y)=0$ *). *Это решение непрерывно всюду в $U(x_0)$ и $y_0=f(x_0)$.*

Если дополнительно предположить, что функция F имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частную производную

*) В этом случае говорят также, что уравнение $F(x, y)=0$ однозначно разрешимо в окрестности $U(x_0, y_0)=\{(x, y): x \in U(x_0),\ y \in U(y_0)\}$ точки (x_0, y_0).

$F_x(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0), то функция $f(x)$ также имеет в точке x_0 производную и для нее справедлива формула

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Доказательство. В силу непрерывности функции $F(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывности частной производной $F_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0), существует прямоугольная окрестность

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \xi, \ |y - y_0| < \eta\}$$

точки (x_0, y_0), в которой сама функция $F(x, y)$ непрерывна, а значения частной производной $F_y(x, y)$ имеют тот же знак, что и ее значение в точке (x_0, y_0). Поэтому при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ функция $\varphi(y) \overset{\text{def}}{=} F(x, y)$ дифференцируема на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, а ее производная $\varphi'(y) = F_y(x, y)$ сохраняет постоянный знак. Следовательно, функция $\varphi(y)$ строго монотонна на указанном интервале.

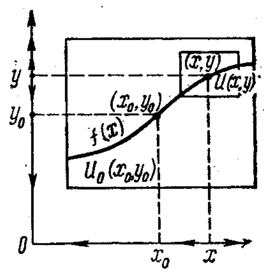

Рис. 151

Таким образом все условия леммы для функции $F(x, y)$ в построенной прямоугольной окрестности $U(x_0, y_0)$ выполнены. Следовательно, существуют окрестности $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $U(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ и единственная функция $y = f(x)$, определенная на $U(x_0)$, такие, что при каждом $x \in U(x_0)$ имеют место включение $f(x) \in U(y_0)$ и равенство $F(x, f(x)) = 0$, причем функция f непрерывна в точке x_0.

Поскольку для каждой точки (x, y), для которой $x \in U(x_0)$, $y \in U(y_0)$, существует ее прямоугольная окрестность $U(x, y)$, содержащаяся в прямоугольной окрестности

$$U_0(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \varepsilon\}$$

(рис. 151), то для $U(x, y)$ также выполняются все условия леммы. Следовательно, в силу единственности решения $f(x)$ уравнения $F(x, y) = 0$ в окрестности $U_0(x_0, y_0)$ согласно той же лемме функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке $x \in U(x_0)$.

Докажем теперь последнее утверждение теоремы. В силу непрерывности частных производных F_x и F_y в точке (x_0, y_0), функция F дифференцируема в этой точке:

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = \\ = F_x(x_0, y_0)\Delta x + F_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \quad (41.2)$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Возьмем в формуле (41.2)

$$x_0+\Delta x \in U(x_0), \quad \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

Тогда в силу условия $F(x, f(x)) = 0$ получим

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = F(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)) = 0,$$

и так как $F(x_0, y_0) = 0$, то из (41.2) имеем

$$F_x(x_0, y_0)\Delta x + F_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x_0, y_0)+\varepsilon_1}{F_y(x_0, y_0)+\varepsilon_2}. \tag{41.3}$$

Пусть теперь $\Delta x \to 0$; тогда, в силу непрерывности функции f, $\Delta y \to 0$, а, значит, при $\Delta x \to 0$ имеем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, откуда следует, что в формуле (41.3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2 = 0$. Поэтому при $\Delta x \to 0$ предел правой части равенства (41.3) существует и равен $-\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$ (напомним, что $F_y(x_0, y_0) \neq 0$), следовательно, при $\Delta x \to 0$ существует и предел левой части, т. е. существует производная

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \ \square \tag{41.4}$$

Замечание. Если функции F_x и F_y непрерывны в окрестности $U_0(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), то производная f' непрерывна на интервале $U(x_0)$. Действительно, применив формулу (41.4) к произвольной точке $x \in U(x_0)$ получим

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))},$$

откуда по теореме о композиции непрерывных функций вытекает непрерывность функции $f'(x)$ на $U(x_0)$.

Аналогичным образом вводится понятие неявной функции, определяемой уравнением

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0, \tag{41.5}$$

а также формулируется и доказывается теорема, аналогичная теореме 1. Для того чтобы получить ее формулировку, достаточно лишь в формулировке теоремы 1 под x понимать точку n-мерного пространства, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, в частности $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Теорема 1′. *Пусть функция $F(x, y) \equiv F(x_1, \ldots, x_n, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ и имеет в этой окрестности частную производную F_y, непрерывную в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$.*

Если $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, а $F_y(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$, то найдутся такие *окрестности* U_x *и* U_y *соответственно точек* $x^{(0)}$ *и* $y^{(0)}$, *что для каждого* $x \in U(x)$ *существует, и притом единственное, решение*

$$y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in U_y$$

уравнения $F(x, y) = 0$ *), *причем это решение* $y = f(x)$ *непрерывно на* U_x *и* $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.

Если, кроме того, в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ *существуют все частные производные* F_{x_i}, *непрерывные в точке* $(x^{(0)}, y^{(0)})$, *то в точке* $x^{(0)}$ *существуют и частные производные* f_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, *причем если частные производные* F_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, *и* F_y *непрерывны в окрестности точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$, *то частные производные* f_{x_i} *существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки* $x^{(0)}$.

При этом формулы для частных производных неявной функции, определяемой уравнением (41.5), имеют вид

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

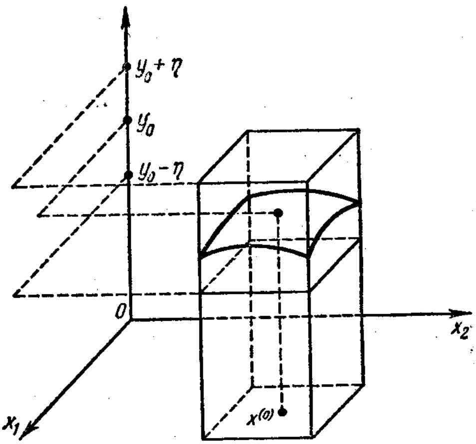

Рис. 152

Упражнения. 1. Сформулировать условия, при которых функция $f(x)$, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$ (теорема 1), имеет в точке (x_0, y_0) непрерывные производные до n-го порядка включительно. Найти формулы для $f''(x_0)$ и $f'''(x_0)$.

2. С помощью теоремы 1 и ответа на предыдущие упражнения найти достаточные условия существования функции $x = \varphi(y)$, обратной к $y = f(x)$ и имеющей в точке y_0 непрерывные производные до n-го порядка включительно. Доказать, что

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}, \quad \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x) f'''(x)}{[f'(x)]^5}.$$

3. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если y — функция, определяемая уравнением $\cos x^2y^2 + xy = 2$.

---

*) На рис. 152 изображен случай, когда $n = 2$ и окрестность U_x прямоугольная.

41.2. ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Прежде чем рассмотреть вопрос о разрешимости систем уравнений, введем некоторые новые понятия.

Пусть R_x^n — n-мерное евклидово пространство, точки которого будем обозначать через $x=(x_1, \ldots, x_n)$, R_y^m — m-мерное евклидово пространство, точки которого будем обозначать $y=(y_1, \ldots, y_m)$, а R_{xy}^{n+m} — $(n+m)$-мерное евклидово пространство точек

$$(x, y)=(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Определение 1. *Пусть $A \subset R_x^n$ и $B \subset R_y^m$. Множество точек (x, y) пространства R_{xy}^{n+m} таких, что $x \in A$ и $y \in B$, называется произведением**) *множеств A и B и обозначается $A \times B$* (см. п. 1.2*). *Таким образом,*

$$A \times B = \{(x, y): x \in A, \ y \in B\}.$$

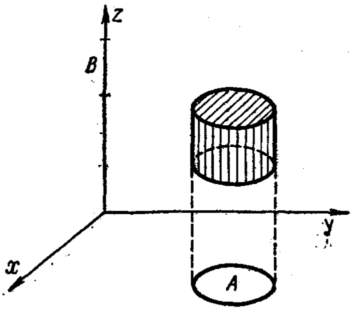

Рис. 153

Примеры. 1. Если $A=R_x^n$, $B=R_y^m$, то

$$A \times B = R_x^n \times R_y^m = R_{xy}^{n+m}.$$

2. Пусть $n=2$ и A — круг; $m=1$ и B — отрезок. Тогда $A \times B$ — прямой круговой цилиндр (рис. 153).

3. Пусть $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R_x^n$ и $A=P(x^{(0)}; \delta_1, \ldots, \delta_n)=\{x: \ |x_i-x_i^{(0)}|<\delta_i; \ i=1, 2, \ldots, n\}$ — прямоугольная окрестность точки $x^{(0)}$; пусть $y^{(0)}=(y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \in R_y^m$ и $B=P(y^{(0)}; \eta_1, \ldots, \eta_m)=\{y: |y_j-y_j^{(0)}|<\eta_j, \ j=1, 2, \ldots, m\}$ — прямоугольная окрестность точки $y^{(0)}$. Тогда

$$\begin{aligned} A \times B = \{(x, y)\colon & |x_i-x_i^{(0)}|<\delta_i, \quad i=1, 2, \ldots, n; \\ & |y_j-y_j^{(0)}|<\eta_j, \quad j=1, 2, \ldots, m\} = \\ & = P((x^{(0)}, y^{(0)}); \ \delta_1, \ldots, \delta_n, \ \eta_1, \ldots, \eta_m) \end{aligned} \tag{41.6}$$

является прямоугольной окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Очевидно и обратное: поскольку всякая прямоугольная окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ записывается формулой, стоящей в середине равенства (41.6), то она всегда может быть представлена как произведение прямоугольных окрестностей точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$.

Упражнение 4. Доказать, что если множества $A \subset R_x^n$ и $B \subset R_y^m$ являются открытыми множествами соответственно в пространствах R_x^n и R_y^m, то и их произведение $A \times B$ — открытое множество в пространстве R_{xy}^{n+m}.

*) Применяется также термин *декартово произведение*.

41.3. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим условия, при которых система уравнений

$$F_i(x, y)=0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad x\in R^n, \quad y\in R^m, \tag{41.7}$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)=0,\\ &F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)=0 \end{aligned} \tag{41.8}$$

однозначно разрешима относительно $y_1, \ldots, y_m$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой $F_i(x^{(0)}, y^{(0)})=0$, $i=1, 2, \ldots, m$.

Определение 2. *Пусть задана система функций* $u_i=u_i(t_1, \ldots, t_n)$, $i=1, 2, \ldots, m$, *имеющих в некоторой точке* $t^{(0)}$ *все частные производные первого порядка. Тогда матрица, составленная из частных производных этих функций в точке* $t^{(0)}$,

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} & \frac{\partial u_1}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial t_n}\\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1} & \frac{\partial u_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial t_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1} & \frac{\partial u_m}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial t_n} \end{Vmatrix}$$

или, короче,

$$\left\Vert \frac{\partial u_i}{\partial t_j} \right\Vert \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

*называется матрицей Якоби**) *данной системы функций.*

Если $m=n$, то определитель матрицы Якоби называется *определителем Якоби*, или *якобианом*, системы функций $u_1, \ldots, u_n$ по переменным $t_1, \ldots, t_n$ и обозначается следующим образом**)

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}.$$

Мы увидим в дальнейшем, что якобиан системы функций естественным образом возникает в различных вопросах теории функции многих переменных.

Прежде чем перейти к изложению основной теоремы, кратко поясним на простом примере (не оговаривая все детали) идею ее

*) К. Якоби (1804—1851) — немецкий математик.

**) Применяется также обозначение $\dfrac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)}$.

доказательства и покажем, каким образом в ее условиях возникает якобиан рассматриваемой системы. Пусть в какой-то окрестности точки (x_0, y_0, z_0) заданы непрерывно дифференцируемые функции F и Φ, причем

$$F(x_0, y_0, z_0)=0,$$
$$\Phi(x_0, y_0, z_0)=0.$$

Допустим, что необходимо решить систему уравнений

$$F(x, y, z)=0,$$
$$\Phi(x, y, z)=0$$

в некоторой окрестности указанной точки, найдя из нее переменные $y=\varphi(x)$ и $z=\psi(x)$, как такие непрерывные функции φ и ψ переменной x, что $\varphi(x_0)=y_0$, $\psi(x_0)=z_0$. Разрешив для этого, например, первое уравнение относительно z, получим $z=f(x, y)$. Подставив это выражение во второе уравнение и разрешив его относительно y, будем иметь $y=\varphi(x)$. Полагая $\psi(x)=f[x, \varphi(x)]$, получим искомое решение:

$$y=\varphi(x),$$
$$z=\psi(x).$$

Возникает, конечно, вопрос о том, при выполнении каких условий возможно проделать указанные операции, или, точнее, когда существуют и однозначно определены все вышеупомянутые функции. (Естественно, при этом надо выяснить, где, т. е. для каких значений переменных x и y, определены эти функции? Этот вопрос мы сейчас не будем подробно анализировать, чтобы не отвлекаться от основной идеи. Он будет рассмотрен при доказательстве теоремы 2 этого пункта.)

Для того чтобы одно из данных уравнений, например первое, было разрешимым в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) относительно переменной z, достаточно, чтобы (см. теорему 1' в п. 41.1) $\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\neq 0$. Если $z=f(x, y)$ — соответствующее решение, то, для того чтобы уравнение, получающееся в результате подстановки этого решения во второе уравнение, $\Phi[x, y, f(x, y)]=0$ было разрешимым относительно переменной y, достаточно, чтобы полная частная производная по y левой части получившегося равенства не обращалась в нуль в точке (x_0, y_0), т. е. чтобы в этой точке

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0.$$

Но согласно п. 41.1,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

следовательно, подставляя это выражение в предыдущее неравенство, получим, что условие разрешимости можно записать в виде

$$\frac{\partial(F,\ \Phi)}{\partial(y,\ z)}=\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\neq 0 \text{ в точке } (x_0,\ y_0,\ z_0).$$

Из этого условия, очевидно, вытекает, что в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ либо $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$, либо $\frac{\partial \Phi}{\partial z}\neq 0$, т. е. одно из заданных уравнений разрешимо относительно z.

Таким образом, для заданной системы уравнений неравенство нулю в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ якобиана $\frac{\partial(F,\ \Phi)}{\partial(y,\ z)}$ обеспечивает существование в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ решения вида

$$y=\varphi(x)$$
$$z=\psi(x).$$

Сформулируем теперь основную теорему этого пункта.

Теорема 2. *Пусть функции* $F_i(x,\ y)=F_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_m)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, *непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $(x^{(0)},\ y^{(0)})$, *где* $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)})$, $y^{(0)}=(y_1^{(0)},\ \ldots$ $\ldots,\ y_m^{(0)})$. *Тогда если* $F_i(x^{(0)},\ y^{(0)})=0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, *и если в точке* $(x^{(0)},\ y^{(0)})$ *якобиан* $\frac{\partial(F_1,\ \ldots,\ F_m)}{\partial(y_1,\ \ldots,\ y_m)}$ *не равен нулю, то найдутся такие окрестности* U_x *и* U_y *точек* $x^{(0)}$ *и* $y^{(0)}$ *соответственно в пространствах* R_x^n *и* R_y^m, *что для каждого* $x\in U_x$ *существует единственное решение*

$$y=f(x)\in U_y$$

системы уравнений (41.7):

$$y=f(x)=\{y_k=f_k(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m\}\ ^{*)},$$

причем функции $f_k(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, *образующие это решение, непрерывно дифференцируемы на* U_x *и* $f(x^{(0)})=y^{(0)}$.

Таким образом, если выполняются предположения теоремы, то условие

$$F_i(x,\ y)=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad (x,\ y)\in U_x\times U_y$$

эквивалентно условию

$$y=f(x),\quad x\in U_x,\quad y\in U_y.$$

---

*) Система функций $f_k(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ обозначена одним символом $f(x)$, поскольку она задает определенное соответствие: точкам некоторого множества пространства R_x^n указанная система функций ставит в соответствие определенные точки пространства R_y^m, или, как говорят, отображает указанное множество пространства R_x^n в пространство R_y^m.

Доказательство. Прежде всего заметим, что утверждение: решение $y=f(x)$ системы уравнений (41.7) удовлетворяет условию $f(x^{(0)})=y^{(0)}$, очевидно, непосредственно следует из утверждения о единственности решения $y=f(x)\in U_y$ при $x\in U_x$ и условий $F_i(x^{(0)}, y^{(0)})=0$, $i=1, 2, \ldots, m$, $x^{(0)}\in U_x$, $y^{(0)}\in U_y$.

Для доказательства теоремы применим метод математической индукции. Для случая одного уравнения, т. е. когда $m=1$, теорема была установлена нами в п. 41.1. Пусть теперь она верна для $m-1$ уравнений $(m>1)$. Докажем, что тогда она имеет место и для m уравнений.

Покажем сначала, что каждое из уравнений (41.8), например последнее

$$F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)=0,$$

можно разрешить в окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ по крайней мере относительно одного переменного. Действительно, по условию теоремы, в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}\neq 0,$$

а поэтому в этой точке хотя бы один элемент последней строчки определителя Якоби отличен от нуля. Пусть для определенности это будет последний элемент:

$$\frac{\partial F_m(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_m}\neq 0.$$

Отсюда в силу теоремы 1′ п. 41.1 следует, что уравнение $F_m(x, y)=0$ может быть разрешено относительно y_m в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Сформулируем это более точно. Обозначим через U окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой функции F_i, $i=1, 2, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы, и положим $\tilde{y}\overset{\text{def}}{=}(y_1, \ldots, y_{m-1})$. Тогда найдутся прямоугольная окрестность U^{m+n-1} точки

$$(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_{m-1}^{(0)}) \tag{41.9}$$

и окрестность U^1 точки $y_m^{(0)}$ такие, что $U^{m+n-1}\times U^1\subset U$, и существует единственная определенная на U^{m+n-1} функция

$$y_m=\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}), \tag{41.10}$$

удовлетворяющая следующим условиям: если

$$(x, \tilde{y})=(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1})\in U^{m+n-1},$$

то

$$\varphi(x, \tilde{y}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) \in U^1, \tag{41.11}$$

$$F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}, \varphi(x, \tilde{y})) = 0. \tag{41.12}$$

Кроме того, согласно той же теореме 1', функция $\varphi(x, \tilde{y})$ непрерывно дифференцируема на U^{m+n-1} и

$$\varphi(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) = y_m^{(0)}. \tag{41.13}$$

При этом если $(x, \tilde{y}) \in U^{m+n-1}$ и $y_m \in U^1$, то система (41.8) эквивалентна системе

$$\begin{gathered} F_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ y_m = \varphi(x, y). \end{gathered} \tag{41.14}$$

Подставим в первые $m-1$ уравнения системы (41.14) выражение (41.10). Тогда, введя обозначение

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) =$$
$$= F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1})),$$
$$i = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{41.15}$$

получим следующую систему $m-1$ уравнений с $m+n-1$ неизвестными:

$$\begin{gathered} \Phi_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{m-1}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) = 0. \end{gathered} \tag{41.16}$$

При этом для $(x, \tilde{y}) \in U^{m+n-1}$, $y_m \in U^1$ система уравнений

$$\begin{gathered} \Phi_j(x, \tilde{y}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ y_m = \varphi(x, \tilde{y}) \end{gathered} \tag{41.17}$$

эквивалентна системе (41.14).

Покажем, что система (41.16) удовлетворяет условиям, отличающимся от тех, которым удовлетворяет система (41.8), только тем, что $m-1$ заменено через m. Действительно, функции Φ_k, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, непрерывно дифференцируемы в окрестности U^{m+n-1} как композиции непрерывно дифференцируемых функций. Из условий $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и (41.15), (41.13) следует, что $\Phi_k(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$.

Докажем, что в точке $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$ (см. (41.9))

$$\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{m-1})} \neq 0.$$

Для этого предварительно заметим, что из (41.10) и (41.15) следует, что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{41.18}$$

а из (41.12) — что

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}=0, \quad k=1,\,2,\,\ldots,\,m-1. \qquad (41.19)$$

Теперь в определителе $\dfrac{\partial (F_1, \ldots, F_m)}{\partial (y_1, \ldots, y_m)}$ к k-му столбцу прибавим последний столбец, умноженный на $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_k}$, $k=1, \ldots, m-1$, от чего, как известно, значение определителя не изменится. Поэтому, использовав (41.18) и (41.19) и разложив получившийся определитель по элементам последней строки, получим

$$\left.\frac{\partial (F_1, \ldots, F_m)}{\partial (y_1, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)},\, y^{(0)})}=$$

$$=\left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}\right|_{(x^{(0)},\, y^{(0)})}=$$

$$=\left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}\right|_{(x^{(0)},\, \tilde{y}^{(0)})}=$$

$$=\frac{\partial F_m(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_m}\left.\frac{\partial (\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})}{\partial (y_1, \ldots, y_{m-1})}\right|_{(x^{(0)},\, \tilde{y}^{(0)})},$$

и так как левая часть равенства отлична от нуля, то отлична от нуля и правая, откуда

$$\left.\frac{\partial (\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})}{\partial (y_1, \ldots, y_{m-1})}\right|_{(x^{(0)},\, \tilde{y}^{(0)})}\neq 0.$$

В силу выполнения для функций Φ_i, $i=1, 2, \ldots, m-1$, условий, аналогичных условиям для функций F_i, $i=1,\,2,\,\ldots,\,m$, и согласно предположению индукции система уравнений (41.16) однозначно разрешима относительно переменных $y_1, \ldots, y_{m-1}$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$. Точнее, пусть U^{m+n-1} — прямоугольная окрестность точки $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$, полученная при разрешении уравнения $F_m=0$ относительно переменной y_m. Разложим ее в произведение прямоугольных окрестностей U'_x и $U'_{\tilde{y}}$ точек $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и $\tilde{y}^{(0)}=(y_1^{(0)}, \ldots, y_{m-1}^{(0)})$ соответственно в пространствах R_x^n и $R_{\tilde{y}}^{m-1}$ (здесь $\tilde{y}=(y_1, \ldots, y_{m-1})$): $U^{m+n-1}=U'_x\times U'_{\tilde{y}}$. Тогда существует окрестность $U_x\subset U'_x$ точки $x^{(0)}$, окрестность

$U_{\tilde{y}} \subset U'_{\tilde{y}}$ точки $\tilde{y}^{(0)}$ и единственная система функций

$$\begin{gathered} y_1 = f_1(x) = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{m-1} = f_{m-1}(x) = f_{m-1}(x_1, \ldots, x_n), \end{gathered} \tag{41.20}$$

определенных на множестве U_x и удовлетворяющих следующим условиям: если $x \in U_x$, то

$$(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \in U_{\tilde{y}}. \tag{41.21}$$

и на U_x функции (41.20) непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют системе уравнений (41.16):

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{41.22}$$

Важно заметить, что в силу единственности решения (41.20) системы (41.16) при $x \in U_x$, $\tilde{y} \in U_{\tilde{y}}$ и $y_m \in U^1$, система уравнений

$$\begin{gathered} y_k = f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ y_m = \varphi(x, \tilde{y}) \end{gathered} \tag{41.23}$$

эквивалентна системе (41.17).

Подставляя выражения (41.20) в (41.10) получим функцию от x, определенную на U_x; обозначим ее через f_m:

$$y_m = \varphi(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) = f_m(x_1, \ldots, x_n) = f_m(x). \tag{41.24}$$

Покажем, что система функций

$$y_k = f_k(x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{41.25}$$

(см. (41.20) и (41.24)) и является искомой системой функций, удовлетворяющей требованиям, сформулированным в теореме. В самом деле, пусть $U_y = U_{\tilde{y}} \times U^1$; тогда если $x \in U_x$, то в силу (41.21) и (41.11) $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in U_y$. Из (41.15), (41.22), (41.24) и (41.12) следует, что $F_i(x, f(x)) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, для всех $x \in U_x$. В силу теоремы 1' и предположения индукции функции (41.10) и (41.20), а поэтому и функция (41.24) непрерывно дифференцируемы.

Таким образом, доказано, что отображение $f(x)$, задаваемое функциями (41.25), является непрерывно дифференцируемым решением системы уравнений (41.8) на множестве U_x, причем если $x \in U_x$, то $y = f(x) \in U_y$. Отметим еще, что если $x \in U_x$, то система (41.25) эквивалентна системе (41.23).

Остается доказать единственность решения системы уравнений (41.8). Для доказательства изобразим проделанные в процессе доказательства переходы от одних систем уравнений к другим, им эквивалентным, т. е. имеющим в точности те же решения, системам в виде схемы следующим образом:

$$
\begin{array}{l}
F_i(x, y)=0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \\
\quad\Updownarrow \\
F_j(x, y)=0, \quad j=1, 2, \ldots, m-1, \\
y_m=\varphi(x, y). \\
\quad\Updownarrow \qquad\qquad \Phi_j(x, \tilde{y}) \equiv F_j(x, \tilde{y}, \varphi(x, \tilde{y})), \quad j=1, 2, \ldots, m-1, \\
\Phi_j(x, \tilde{y})=0, \quad j=1, 2, \ldots, m-1, \\
y_m=\varphi(x, \tilde{y}). \\
\quad\Updownarrow \\
y_j=f_j(x), \quad j=1, 2, \ldots, m-1, \\
y_m=\varphi(x, \tilde{y}). \\
\quad\Updownarrow \qquad\qquad f_m(x) \equiv \varphi(x, f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \\
y_i=f_i(x), \quad i=1, 2, \ldots, m.
\end{array}
$$

Двойные стрелки обозначают эквивалентность рассматриваемых систем уравнений, которая имеет место во всяком случае для $x \in U_x$, $y \in U_y$. Из этой эквивалентности и следует единственность решения (41.25) системы (41.8) в рассматриваемых окрестностях, откуда, как было отмечено выше, в силу условия $F_i(x^{(0)}, y^{(0)})=0$, $i=1, 2, \ldots, m$, вытекает, что $f(x^{(0)})=y^{(0)}$. $\square$

Доказанная теорема о неявных функциях является одной из основных теорем математического анализа и имеет много разнообразных приложений в различных его разделах. С некоторыми из них мы познакомимся в последующих частях нашего курса. Она является «чистой теоремой существования»: ни из ее формулировки, ни из приведенного ее доказательства не следует, вообще говоря, никакого конкретного метода для решения системы (41.8). Например, если все F_k, $k=1, 2, \ldots, m$ в указанной системе уравнений являются элементарными функциями, то, следуя схеме доказательства теоремы, вообще говоря, не удастся «найти в явном виде» все те функции, существование которых использовалось при проведении указанного доказательства, и получить решение системы так же в виде элементарных функций. И в действительности в этом случае решение системы уравнений (41.8), которое существует в силу указанной теоремы, не является, вообще говоря, набором элементарных функций (даже если эта система состоит из одного уравнения).

Конечно, если функции F_k элементарные и, следовательно, задаются некоторыми формулами, то решение системы (41.8) может быть найдено с любой степенью точности, т. е. принципиально с любой степенью точности можно составить таблицы значений этих решений. Фактическая же точность, с которой вычисляются решения, определяется, конечно, конкретной целью, для которой решается рассматриваемая система. Сама теорема 2 в этом случае дает объективную уверенность, что проводя правильно соответствующие вычисления, мы действительно вычисляем искомое решение системы. Мы не будем останавливаться на численных методах решения систем уравнений; лишь некоторые вопросы численного решения уравнений рассмотрены в «Добавлении» в конце этого тома.

Существенным является также то обстоятельство, что теорема 2, как и вообще теоремы подобного типа, дает качественные методы в данном случае для изучения свойств решений системы уравнений.

Интересно отметить, что частные производные решения системы (41.8) при выполнении условий теоремы 2 легко выражаются в явном виде через частные производные функций F_k, $k=1, 2, \ldots, m$. Действительно, чтобы найти частную производную $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, надо продифференцировать равенства (41.8) по x_i, считая их тождествами по $x_1, \ldots, x_n$, т. е. подставив в них их решения $y_j = y_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j=1, \ldots, m$. Тогда получим

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0, \qquad k=1, 2, \ldots, m.$$

Эта система уравнений, линейных относительно $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, в силу того, что в рассматриваемой точке ее определитель не равен нулю:

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0,$$

имеет, и притом единственное, решение, которое может быть найдено, например, по правилу Крамера *).

Если нужно найти все производные

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \qquad j=1, 2, \ldots, m,$$

то целесообразно вычислить дифференциалы обеих частей указанных выше тождеств (41.8). Использовав инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j} dy_j = 0, \qquad k=1, 2, \ldots, m.$$

Эта система линейных относительно $dy_1, \ldots, dy_m$ уравнений в силу того же условия $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0$ имеет, и притом един-

*) Г. Крамер (1704—1752) — швейцарский математик.

ственное, решение. Если его найти, то коэффициент при dx_i в выражении для dy_j и будет частной производной $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$.

Оба эти метода применимы и для вычисления производных высших порядков функций $y_j(x_1, \ldots, x_n)$, являющихся решениями системы уравнений (41.8) (например, в предположении, что все функции F_k, $k=1, 2, \ldots, m$, имеют соответствующих порядков непрерывные производные). Применяя метод дифференциалов, следует, конечно, помнить, что дифференциалы порядка выше первого в случае, когда они выражаются через дифференциалы функций, имеют более сложный вид, чем когда они выражаются только через дифференциалы независимых переменных (см. п. 21.2).

Производные высших порядков функций $y_j(x_1, \ldots, x_n)$ можно получить последовательным дифференцированием и из выражений для первых производных $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, найденных по формулам Крамера из указанной ранее системы уравнений

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0, \qquad k=1, 2, \ldots, m,$$

в виде отношения двух определителей. Это отношение можно дифференцировать столько раз, сколько раз дифференцируемы функции F_k, $k=1, \ldots, m$. При этом, если все производные функций F_k, $k=1, \ldots, m$, до порядка r включительно непрерывны, то будут непрерывными и все частные производные функций $y_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j=1, \ldots, m$, до того же порядка r.

Множество (называемое также часто классом) всех r раз непрерывно дифференцируемых в области G функций обозначается через $C^r(G)$. Таким образом: *если, дополнительно к условиям теоремы* 2, $F_k \in C^r(U)$, $k=1, \ldots, m$, *где* U — *некоторая окрестность точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$, *то решения* $y_j=y_j(x_1, \ldots, x_n)$ *системы уравнений* (41.7) *также принадлежат классу* $C^r(U_x)$ *в некоторой окрестности* U_x *точки* $x^{(0)}$.

Упражнения. 5. При каких условиях, налагаемых на f и на g, уравнение $y=xf(z)+g(z)$ определяет, в некоторой окрестности U точки (x_0, y_0), функцию $z(x, y) \in C^2(U)$? Доказать, что если эти условия выполнены, то для всех $(x, y) \in U$

$$z_y^2 z_{xx}-2z_x z_y z_{xy}+z_x^2 z_{yy}=0.$$

6. Дана система уравнений

$$uf'(v)=[y-f(v)]^2,$$
$$(x+v)f'(v)=y-f(v).$$

Найти условия, налагаемые на функцию f, при которых эта система определяет в некоторой окрестности U точки (x_0, y_0), функции $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ класса $C^1(U)$. Доказать, что в этом случае $u_x u_y=u$ всюду в U.

41.4. ОТОБРАЖЕНИЯ

В этом пункте будут изучаться отображения $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$, т. е. такие соответствия, которые каждой точке $x=(x_1, \ldots, x_n)$ множества E, лежащего в n-мерном арифметическом точечном пространстве R^n (см. п. 18.1) ставят в соответствие точку $y=(y_1, \ldots, y_m)$ m-мерного арифметического точечного пространства R^m. Таким образом, $f: (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (y_1, \ldots, y_m)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in E$. Очевидно, что задание такого отображения f равносильно заданию m функций $f_j: E \to \boldsymbol{R}$, таких, что $f_j: x \longmapsto y_j$, $j=1, \ldots, m$, $x \in E$, $y_j \in \boldsymbol{R}$. Эти функции

$$f_j(x)=f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad x \in E, \tag{41.26}$$

называются *координатными функциями отображения* f и пишется

$$f=(f_1, \ldots, f_m).$$

На рассматриваемые отображения обобщается понятие непрерывности.

Определение 3. *Отображение* $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$, *называется непрерывным в точке* $x^{(0)} \in E$, *если для любой окрестности* $V(y^{(0)})$ *точки* $y^{(0)}=f(x^0)$ *существует такая окрестность* $U(x^{(0)})$ *точки* $x^{(0)}$, *что*

$$f(U(x^{(0)}) \cap E) \subset V(y^{(0)}).$$

Поскольку в любой окрестности точки*) содержится ее сферическая окрестность, то это определение равносильно следующему.

Отображение $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$, *называется непрерывным в точке* $x^{(0)} \in E$, *если для любой* ε-*окрестности точки* $y^{(0)}=f(x^{(0)})$ *существует такая* δ-*окрестность точки* $x^{(0)}$, *что*

$$f(U(x^{(0)}, \delta) \cap E) \subset U(y^{(0)}, \varepsilon).$$

Это, в свою очередь, с помощью неравенств можно перефразировать следующим образом.

Отображение $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$, *называется непрерывным в точке* $x^{(0)} \in E$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для всех точек* $x \in E$, *удовлетворяющих условию* $\rho(x, x^{(0)}) < \delta$, *выполняется неравенство*

$$\rho(f(x), f(x^{(0)})) < \varepsilon.$$

Можно сформулировать определение непрерывности и в терминах последовательностей.

Определение 3′. *Отображение* $f: E \to \boldsymbol{R}^m$, $E \subset \boldsymbol{R}^n$, *называется непрерывным в точке* $x^{(0)} \in E$, *если для любой последовательности*

*) Напомним, что окрестностью точки называется любое открытое множество, содержащее эту точку (см. определение 14 в п. 18.2).

$x^{(k)} \in E$, $k=1, 2, \ldots$, *такой что* $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, *имеет место*

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}).$$

Равносильность этих двух определений доказывается аналогично тому, как это было сделано для равносильности определений предела функций по Коши и по Гейне. Проведем это доказательство.

Пусть отображение f *непрерывно в точке* $x^{(0)}$ в смысле определения 3, $x^{(k)} \in E$, $k=1, 2, \ldots$ и

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}. \tag{41.27}$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Для него существует такая $\delta > 0$, что при $x \in E$, $\rho(x, x^{(0)}) < \delta$ выполняется неравенство $\rho(f(x), f(x^{(0)}) < \varepsilon$.

В силу условия (41.27) существует такой номер k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ имеем $x^{(k)} \in U(x^{(0)}, \delta)$, а следовательно и $\rho(f(x^{(k)}), f(x^{(0)})) < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)})$.

Пусть, теперь, отображение f непрерывно в точке $x^{(0)}$ в смысле определения 3′ и пусть условия определения 3 не выполнены, т. е. существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любой $\delta > 0$ существует такое $x_\delta \in U(x^{(0)}, \delta) \cap E$, для которого $\rho(f(x_\delta), f(x^{(0)})) \geqslant \varepsilon_0$. Взяв последовательно $\delta = \frac{1}{k}$, $k=1, 2, \ldots$, и положив для краткости $x^{(k)} = x_{1/k}$, получим $x^{(k)} \in U\left(x^{(0)}, \frac{1}{k}\right) \cap E$, т. е. $\rho(x^{(k)}, x^{(0)}) < \frac{1}{k}$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ и $x^{(k)} \in E$; однако $\rho(f(x^{(k)}), f(x^{(0)})) \geqslant \varepsilon_0$ и, таким образом, последовательность $\{f(x^{(k)})\}$ не имеет своим пределом точку $f(x^{(0)})$. Полученное противоречие доказывает сделанное утверждение. $\square$

Лемма 1. *Отображение* $f = (f_1, \ldots, f_m): E \to R^m$, $E \subset R^n$, *непрерывно в точке* $x^{(0)}$ *тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны все координатные функции* $f_1, \ldots, f_m$.

Доказательство необходимости. Пусть отображение f непрерывно в точке $x^{(0)} \in E$, $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \overset{\text{def}}{=} f(x^{(0)})$. Согласно определению 3, для каждой окрестности $V(y^{(0)})$ точки $y^{(0)}$, в частности — для каждой ее кубической окрестности (см. п. 18.1)

$$P(y^{(0)}, \varepsilon) = \{y : |y_i - y_i^{(0)}| < \varepsilon\}$$

существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что

$$f(U(x^{(0)}) \cap E) \subset P(y^{(0)}, \varepsilon).$$

Следовательно для всех $x \in U(x^{(0)}) \cap E$ выполняются неравенства

$$|f_j(x) - y_j^{(0)}| < \varepsilon, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Это и означает, что все координатные функции $f_1, \ldots, f_m$ непрерывны в точке $x^{(0)}$.

Доказательство достаточности. Пусть все координатные функции $f_1, \ldots, f_m$ непрерывны в точке $x^{(0)} \in E$, $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) = f(x^{(0)})$ и задана окрестность $V(y^{(0)})$ точки $y^{(0)}$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что ε-кубическая окрестность $P(y^{(0)}, \varepsilon)$ точки $y^{(0)}$ содержится в $V(y^{(0)})$,

$$P(y^{(0)}, \varepsilon) \subset V(y^{(0)}).$$

В силу непрерывности каждой функции f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, в точке $x^{(0)}$ существуют такие окрестности $U_j = U(x^{(0)})$, что при $x \in U_j \cap E$ выполняется неравенство

$$|f_j(x) - y_j^{(0)}| < \varepsilon. \tag{41.28}$$

Положим $U = \bigcap\limits_{i=1}^{m} U_j$. Тогда U, как пересечение конечного числа открытых множеств U_j, будет открытым множеством, причем, поскольку все U_j содержали точку $x^{(0)}$, то U также содержит ее. Таким образом, множество U является окрестностью точки $x^{(0)}$. При этом, если $x \in U \cap E$, то при всех $j = 1, 2, \ldots, m$ выполняются неравенства (41.28). Это означает, что

$$f(x) \in P(y^{(0)}, \varepsilon),$$

а следовательно, $f(x) \in V(y^{(0)})$. Итак, для произвольной окрестности $V(y^{(0)})$ найдена такая окрестность U точки $x^{(0)}$, что

$$f(U \cap E) \subset V(y^{(0)}). \ \square$$

Лемма 1 в частности показывает, что определения непрерывных отображений отрезка, данные при рассмотрении понятия кривой в п. 16.1 (для случая отображений отрезка в трехмерное пространство) и в п. 18.2 (для случая отображения отрезка в произвольное n-мерное евклидово пространство) как отображений, координатные функции которых непрерывны, равносильны определению непрерывных отображений отрезка, как таких отображений, которые в каждой точке отрезка удовлетворяют условиям определения 3 этого пункта.

Отображение: $f: E \to R_y^m$, $E \subset R_x^n$, называется *непрерывным на множестве* E, если оно непрерывно в каждой точке множества E.

Лемма 2. *Отображение f открытого множества пространства R_x^n в пространство R_y^m непрерывно на этом множестве тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества пространства R_y^m при отображении f является открытым множеством пространства R_x^n.*

Доказательство необходимости. Пусть f непрерывно отображает открытое множество $G \subset R_x^n$ в пространство R_y^m и пусть

U — открытое множество пространства $R^m_y: U \subset R^m_y$. Покажем, что прообраз $f^{-1}(U)$ этого множества — открытое в пространстве R^n_x множество. Если множество $f^{-1}(U)$ пусто, то утверждение очевидно, так как пустое множество открыто.

Пусть множество $f^{-1}(U)$ не пусто, т. е. существует точка $x^{(0)} \in f^{-1}(U)$ и, следовательно, $f(x^{(0)}) \in U$. Поскольку U — открытое множество, то оно является окрестностью точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Поэтому, в силу непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$ (см. определение 3′), существует такая окрестность U_x этой точки, что $f(U_x \cap G) \subset U$, следовательно, $U_x \cap G \subset f^{-1}(U)$. Поскольку множество $U_x \cap G$, как пересечение двух открытых множеств U_x и G, является открытым и $x^{(0)} \in U_x \cap G$, то $x^{(0)}$ — внутренняя точка множества $f^{-1}(U)$.

Таким образом, каждая точка прообраза открытого множества U является внутренней точкой этого прообраза, значит, он — открытое множество.

Доказательство достаточности. Пусть f — отображение открытого множества G пространства R^n_x в R^m_y и пусть при этом отображении прообраз каждого открытого в пространстве R^m_y множества является открытым в R^n_x множеством. Пусть $x^{(0)} \in G$. Покажем, что отображение f непрерывно в точке $x^{(0)}$.

Пусть U_y — некоторая окрестность точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Поскольку прообраз $f^{-1}(U_y)$ открытого множества U_y является, по предположению, открытым множеством и, очевидно, $x^{(0)} \in f^{-1}(U_y) \subset G$, то множество $U_x = f^{-1}(U_y)$ является окрестностью точки $x^{(0)}$, причем $f(U_x) = U_y$. Отсюда непосредственно и вытекает непрерывность отображения f в точке $x^{(0)}$ (см. определение 3). □

Пример. Рассмотрим отображение $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, заданное формулой $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. Согласно лемме 2 прообраз открытого множества $(-\infty, 0)$, т. е. множество точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ (и, следовательно, составляющих внутренность эллипса), а также прообраз открытого множества $(0, +\infty)$, т. е. множество таких точек (x, y), что $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ (эти точки образуют внешность эллипса), являются открытыми множествами.

Вообще, если $f: R^n \to R$ — непрерывная на R^n функция, то для любого числа $a \in R$ множества $\{x: f(x) < a, x \in R^n\}$ и $\{x: f(x) > a, x \in R^n\}$ являются открытыми множествами как прообразы открытых множеств $(-\infty, a)$ и $(a, +\infty)$.

Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывных на компактах функций и достижимости этими функциями их нижних и верхних граней обобщается и на случай непрерывных отображений. Более точно — справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $f: A \to R^m$, $A \subset \boldsymbol{R}^n$ — непрерывное отображение компакта A в пространство R^m. Тогда множество $f(A)$ также является компактом.*

Короче: *непрерывный образ компакта является компактом.*

Доказательство. Пусть $y^{(k)} \in f(A)$ — произвольная последовательность точек из $f(A)$. В силу определения образа множества при заданном отображении, для любого $k = 1, 2, \ldots$ существует такая точка $x^{(k)} \in A$, что $f(x^{(k)}) = y^{(k)}$. Поскольку A — компакт, то из последовательности $\{x^{(k)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(k_s)}\}$, предел которой $x^{(0)}$ принадлежит компакту A: $\lim\limits_{s \to \infty} x^{(k_s)} = x^{(0)} \in A$.

В силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ имеем

$$\lim_{s \to \infty} f\left(x^{(k_s)}\right) = f(x^{(0)}), \text{ т. е. } \lim_{s \to \infty} y^{(k_s)} = f(x^{(0)}) \in f(A).$$

Таким образом, из любой последовательности точек, принадлежащей множеству $f(A)$, можно выделить сходящуюся, предел которой принадлежит этому множеству. Это и означает, что $f(A)$ — компакт. $\square$

Замечание. Из леммы 3 следует доказанная ранее теорема о достижимости нижней и верхней граней действительной функцией, непрерывной на компакте (см. п. 19.5). В самом деле, согласно лемме 3, множество значений такой функции является компактом на числовой прямой, а всякий компакт на числовой прямой имеет конечные минимальную и максимальную точки. Это следует из того, что компакт — ограниченное множество и, следовательно, имеет конечную верхнюю (нижнюю) грань, которая в силу своего определения является точкой прикосновения множества. Поскольку компакт замкнут, то она ему принадлежит и является, очевидно, его максимальной (минимальной) точкой.

Обобщается на случай отображений и понятие равномерной непрерывности.

Определение 4. *Отображение f множества $E \subset R_x^n$ в пространство R_y^m называется равномерно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ — существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x' \in E$ и $x'' \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x', x'') < \delta$, выполняется неравенство $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.*

Для отображений имеет место и утверждение, аналогичное теореме Кантора (см. п. 19.6) для непрерывных функций.

Лемма 4. *Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.*

Доказательство. Воспользуемся тем же методом, что и при доказательстве теоремы Кантора о равномерной непрерывности действительных функций, непрерывных на компактах (см. теорему 5 в п. 19.5).

Допустим, что существует отображение $f: A \to R^m$, $A \subset R^n$, непрерывное на компакте A, но не равномерно непрерывное на нем. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_\delta \in A$ и $x''_\delta \in A$, для которых имеют место неравенства

$$\rho(x''_\delta, x'_\delta) < \delta \quad \text{и} \quad \rho(f(x''_\delta), f(x'_\delta)) \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta = \frac{1}{k}$, $x'^{(k)} \overset{\text{def}}{=} x'_{1/k}$, $x''^{(k)} \overset{\text{def}}{=} x''_{1/k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку A — компакт, то из последовательности $\{x'^{(k)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'^{(k_s)}\}$, предел $x^{(0)}$ которой содержится во множестве A: $\lim\limits_{s \to \infty} x'^{(k_s)} = x^{(0)} \in A$. При этом из

$$\rho(x''^{(k_s)}, x^{(0)}) \leqslant \rho(x''^{(k_s)}, x'^{(k_s)}) + \rho(x'^{(k_s)}, x^{(0)}) <$$
$$< \frac{1}{k_s} + \rho(x'^{(k_s)}, x^{(0)}) \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty$$

следует, что подпоследовательность $\{x''^{(k_s)}\}$ второй последовательности $\{x''^{(k)}\}$ также сходится к точке $x^{(0)}$.

Теперь заметим, что из непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$ явствует, что

$$\lim_{s \to \infty} f(x'^{(k_s)}) = \lim_{s \to \infty} f(x''^{(k_s)}) = f(x^{(0)}),$$

и так как

$$\rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) \leqslant \rho(f(x''^{(k_s)}), f(x^{(0)})) + \rho(f(x^{(0)}), f(x'^{(k_s)})) \to 0$$
$$\text{при } s \to \infty,$$

то $\lim\limits_{s \to \infty} \rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) = 0$. Это противоречит условию $\rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) \geqslant \varepsilon_0$. □

С помощью доказанных свойств непрерывных отображений можно получить одно полезное для дальнейшего свойство областей (т. е. открытых линейно связных множеств, см. п. 18.2). Сформулируем это свойство также в виде леммы.

Лемма 5. *Открытое множество является областью тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить целиком лежащей в нем ломаной.*

Доказательство. Достаточность сформулированного условия не требует доказательства. В самом деле, если у некоторого открытого множества $G \subset R^n$ любые две точки можно соединить некоторой ломаной, целиком лежащей в нем, то, поскольку всякая ломаная является кривой (см. п. 16.5), любые две точки множества G оказываются соединимыми в нем кривой, что и означает, согласно определению (см. определение 25 в п. 18.2), что открытое множество G линейно связно, т. е. является областью (см. определение 26 там же).

Докажем необходимость условий леммы. Пусть G — область пространства R^n. Рассмотрим точки $x \in G$ и $y \in G$. Согласно определению области, существует кривая $\gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, соединяющая в G точки x и y, т. е. $r(a) = x$, $r(b) = y$ и $r(t) \in G$, $a \leqslant t \leqslant b$. Кривая γ представляет собой непрерывный образ отрезка $[a, b]$, являющегося компактом и, поэтому (см. лемму 3), сама будет компактом. Поскольку компакт γ не пересекается с замкнутым множеством $R^n \diagdown G$, то расстояние между ними больше нуля (см. лемму 7 в п. 18.2). Следовательно, существует такое число $\eta > 0$, что $\rho(\gamma, R^n \diagdown G) > \eta$.

Отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, отрезка $[a, b]$, будучи непрерывным, является и равномерно непрерывным (см. лемму 4). Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $t' \in [a, b]$ и $t'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|t'' - t'| < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho(r(t''),\quad r(t')) < \eta.$$

Отсюда вытекает, что для любого разбиения $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ мелкости $\delta_\tau < \delta$ все точки ломаной λ_τ с вершинами $r(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, будут содержаться в G. (почему)? Следовательно, $\lambda_\tau \subset G$.

Поскольку началом и концом ломаной λ_τ являются соответственно начало и конец кривой γ, т. е. произвольно заданные точки x и y из G, то нами доказано, что любые две точки области могут быть соединены ломаной. $\square$

Пусть теперь $E \subset R^n_x$, $D \subset R^m_y$, $y = f(x)$ — отображение множества E в R^m_y, причем $f(E) \subset D$ и $z = g(y)$ — отображение D в R^p_z, т. е. $f: E \to D$, $g: D \to R^p_z$. В этом случае имеет смысл композиция $g \circ f: E \to R^p_z$, отображающая множество $E \subset R^n_x$ в p-мерное пространство $R^p_z: (g \circ f) \overset{\text{def}}{=} g(f(x))$, $x \in E$.

Отметим, что если отображение $f(x)$ множества E непрерывно в точке $x^{(0)} \in E$, а $g(y)$ определено в некоторой окрестности точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, то всегда существует такая окрестность U_x точки $x^{(0)}$, что на множестве $E \cap U_x$ имеет смысл композиция $g \circ f$. Действительно, пусть U_y — окрестность точки $y^{(0)}$, на которой определено отображение $g(y)$; согласно определению 3 для нее существует такая окрестность U_x, что $f(U_x \cap E) \subset U_y$. Очевидно, что для всех точек $x \in U_x \cap E$, и имеет смысл композиция $g \circ f$.

Напомним еще, что, согласно введенной для функций терминологии (см. п. 1.2*), отображение $f: E \to R^m_y$, $E \subset R^n_x$ называется *взаимно однозначным*, или *инъекцией*, если разным точкам множества E при этом отображении соответствуют разные точки. В этом случае говорят также, что множество E взаимно однозначно отображается посредством этого отображения на множество $f(E)$, т. е. $f: E \to f(E)$ является биекцией. При выполнении этого условия на множестве $f(E)$ существует однозначное обратное отображение (обратная функция) $f^{-1}(y)=x$, где x таково, что $f(x)=y$. Поэтому $f^{-1}[f(x)]=x$, т. е. это *тождественное отображение* (тождественным отображением множества E называется отображение, которое каждой точке $x \in E$ ставит в соответствие эту же точку).

Определение 5. *Если отображение f множества $E \subset R_x^n$ в пространство R_y^m взаимно однозначно и непрерывно на E, а обратное ему отображение f^{-1} непрерывно на $f(E)$, то f называется гомеоморфным отображением, или гомеоморфизмом, а множество $f(E)$ называется гомеоморфным образом множества E, или, что то же, множеством, гомеоморфным множеству E.*

Очевидно, что если f — гомеоморфизм множества E, то f^{-1} является гомеоморфизмом множества $f(E)$.

При гомеоморфном отображении открытого множества на открытое образы открытых подмножеств также открыты. Действительно, если f — гомеоморфное отображение открытого множества G на открытое же множество Γ, V — открытое подмножество множества G, $W=f(V)$, то $V=f^{-1}(W)$, т. е. V является образом множества W при непрерывном отображении f^{-1} открытого множества Γ и, следовательно, W является прообразом открытого множества V при этом отображении. Поэтому согласно лемме 2 множество W открыто.

Рассмотрим теперь композицию непрерывных отображений.

Лемма 6. *Пусть $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$, $g: D \to R^s$, $D \supset f(E)$. Если отображение f непрерывно в точке $x^{(0)} \in E$, а g непрерывно в точке $f(x^{(0)})$, то композиция $g \circ f$ также непрерывна в точке $x^{(0)}$.*

Доказательство этого утверждения может быть проведено методом, аналогичным использованному при доказательстве теоремы 2 п. 5.2 и теоремы 2 п. 19.4, основанном на определении непрерывности в терминах окрестностей. Для разнообразия докажем лемму, исходя из определения непрерывности в терминах последовательности.

Пусть $x^{(k)} \in E$, $k=1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)}=x^{(0)}$. Тогда $f(x^{(k)}) \in D$ и, в силу непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$, имеем

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)})=f(x^{(0)}). \tag{41.29}$$

В силу же непрерывности отображения g в точке $f(x^{(0)})$ для любой последовательности $y^{(k)} \in D$, $k=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(k)}=f(x^{(0)})$ имеет место $\lim\limits_{k \to \infty} g(y^{(k)})=g(f(x^{(0)}))$. В частности, в силу (41.29) при $y^{(k)}=f(x^{(k)})$

$$\lim_{k \to \infty} g(f(x^{(k)}))=g(f(x^{(0)})).$$

Это и означает непрерывность композиции $g \circ f$ в точке $x^{(0)}$. □

Упражнение 7. Доказать, что непрерывное взаимно однозначное отображение компакта пространства R^n в некоторое пространство R^m является гомеоморфизмом.

В заключение этого пункта определим, что будет пониматься под образом кривой при заданном непрерывном отображении, и докажем лемму о непрерывных образах линейно связных множеств.

Пусть f — непрерывное отображение множества $E \subset R_x^n$ в пространство R_y^m, и Γ — кривая, целиком лежащая во множестве E, т. е. задан класс эквивалентных отображений отрезков во множество E (см. § 16).

Пусть

$$x(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

— одно из представлений кривой Γ. Кривая в пространстве R_y^m, представлением которой является отображение

$$f[x(t)], \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

называется *образом кривой* Γ при отображении f и обозначается через $f(\Gamma)$.

Это определение корректно, так как при сделанных предположениях $f(x(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, является непрерывным отображением отрезка в пространство и, следовательно, определяет некоторую кривую.

Лемма 7. *Пусть $f: E \to R^m$ непрерывное отображение линейно-связного множества $E \subset R^n$ в пространство R^m. Тогда множество $f(E)$ также линейно связно.*

Короче: *непрерывный образ линейно связного множества линейно связен.*

Доказательство. Пусть E — линейно связное множество и f — его непрерывное отображение в R^m. Для того чтобы доказать, что множество $f(E)$ является линейно связным, надо доказать, что две любые его точки можно соединить в $f(E)$ непрерывной кривой (см. определение 25 в п. 18.2). Пусть $y^{(1)} \in f(E)$ и $y^{(2)} \in f(E)$; выберем какие-либо точки $x^{(1)} \in f^{-1}(y^{(1)})$ и $x^{(2)} \in f^{-1}(y^{(2)})$. Поскольку $x^{(1)} \in E$, $x^{(2)} \in E$ и E линейно связно, то существует такая кривая Γ, что ее началом является точка $x^{(1)}$, концом — точка $x^{(2)}$ и все ее точки принадлежат множеству E.

Кривая $f(\Gamma)$ является искомой кривой. Действительно, ее началом является точка $y^{(1)} = f(x^{(1)})$, а концом — точка $y^{(2)} = f(x^{(2)})$. Все же другие ее точки принадлежат множеству $f(E)$. Таким образом, $f(E)$ — линейно связное множество. $\square$

Упражнения. 8. Отображение $f: R^2 \to R^2$ задано следующим образом: $(x, y) \longmapsto (2x, 3y)$. Во что оно переводит окружность $x^2+y^2=1$?

9. Найти образ прямой $x=2$ плоскости Oxy при отображении $f: R^2 \to R^2$, заданном следующим образом: $(x, y) \longmapsto (xy, y)$.

10. В плоскости Oxy задана прямая $x=c$ ($c = \text{const} \neq 0$). Найти ее образ при отображении $f: R^2 \longmapsto R^2$ с координатными функциями $(e^x \cos y, e^x \sin y)$.

41.5. ВЕКТОРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

При изучении дифференцируемых отображений (их определение будет дано ниже, в п. 41.7) пространство R^n, в котором лежит отображаемое множество, и пространство R^m, в которое происходит отображение, удобнее рассматривать как векторные евклидовы пространства (см. п. 18.4). Для простоты n-мерный вектор с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать тем же символом x, которым мы обозначали точку n-мерного точечного пространства с теми же координатами. Это, конечно, не приведет к недоразумениям, так как и точка n-мерного пространства и n-мерный вектор представляют собой упорядоченный набор n действительных чисел.

Пусть $E \subset R^n$ и $f: E \to R^m$, где теперь отображение f ставит в соответствие каждому вектору $x \in E$ некоторый вектор $y = f(x) \in R^m$. Такие отображения будем называть *векторными*.

Если $e_1, \ldots, e_n$ — координатные векторы в пространстве R^n (см. п. 18.4), $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ — координатные векторы в пространстве R^m,

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = (y_1, \ldots, y_m) = \sum_{j=1}^{m} y_j \varepsilon_j \text{ и } y = f(x), \text{ то}$$

каждая координата y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, вектора y также является функцией от вектора $x \in E$ и, следовательно, функцией от его координат $x_1, \ldots, x_n$:

$$y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{41.30}$$

Как и в случае точечного пространства (см. (41.26)) функции (41.30) называются *координатными функциями отображения* f и пишется $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Интерпретация n-мерных точек $(x_1, \ldots, x_n)$ как векторов не препятствует, конечно, рассмотрению таких свойств отображений как их непрерывность и равномерная непрерывность. Поэтому все сказанное об отображениях в предыдущем пункте остается в силе и для векторных отображений. Напомним еще, что для расстояния $\rho(x, y)$ между векторами x и y справедлива формула (см. в п. 18.4 формулу (18.37)) $\rho(x, y) = |x - y|$.

В качестве примера отметим, что длина $|x|$ вектора $x \in R^n$ является непрерывной функцией в R^n. Это следует из неравенства (18.36): поскольку для любых $x_0 \in R^n$ и $x \in R^n$ справедливо неравенство

$$||x| - |x_0|| \leqslant |x - x_0|, \text{ то}$$

$$\lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{|x - x_0| \to 0} |x| = |x_0|.$$

41.6. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим специальный класс отображений пространства R^n в R^m, называемых *линейными*.

Определение 6. *Отображение $f: R^n \to R^m$ называется линейным (или, более полно, линейным однородным), если для любых двух векторов $x' \in R^n$, $x'' \in R^n$ и любых двух чисел $\lambda' \in \boldsymbol{R}$, $\lambda'' \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство*

$$f(\lambda' x' + \lambda'' x'') = \lambda' f(x') + \lambda'' f(x'').$$

Из этого определения по индукции следует, что при линейном отображении f любая конечная линейная комбинация векторов $x^{(j)} \in R^n$ отображается в такую же линейную комбинацию образов $f(x^{(j)})$, $j = 1, 2, \ldots, k$, этих векторов

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(x^{(j)}).$$

Обычно линейные однородные отображения называются *линейными операторами*. О линейном операторе $f: R^n \to R^m$ говорят, что он действует из R^n в R^m.

Из определения линейного оператора непосредственно следует, что композиция $g \circ f$ линейных операторов $f: R^n \to R^m$ и $g: R^m \to R^s$ также является линейным оператором $g \circ f: R^n \to R^s$.

Пусть $f: R^n \to R^m$ — линейный оператор. Образ каждого координатного вектора $e_j \in R^n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, при отображении f является вектором пространства R^m и поэтому раскладывается по координатным векторам $\varepsilon_i \in R^m$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим коэффициенты этого разложения через a_{ij}:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varepsilon_i.$$

Пусть $y = f(x)$, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ и

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i \varepsilon_i. \tag{41.31}$$

Тогда в силу линейности отображения f получим

$$y = f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \varepsilon_i. \tag{41.32}$$

Сравнив коэффициенты разложения вектора y по координатным векторам $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ в (41.31) и (41.32), получим

$$\begin{gathered} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{gathered} \tag{41.33}$$

Наоборот, легко проверить, что всякое отображение $f: R^n \to R^m$, координатные функции которого имеют вид (41.33), является линейным оператором.

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{41.34}$$

называется *матрицей линейного оператора* f.

Очевидно, что если (41.34) является матрицей линейного оператора f, то для любого $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ имеет место (см. (41.32)) разложение

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \varepsilon_i. \tag{41.35}$$

Пример. Пусть π_i — оператор проектирования на i-ую координатную ось, т. е.

$$\pi_i(y) = \pi_i(y_1, \ldots, y_m) = y_i \tag{41.36}$$

(i — фиксированное число среди чисел $1, 2, \ldots, m$). Тогда π_i является линейным оператором с квадратной матрицей порядка m, состоящей из одних лишь нулей кроме i-го элемента главной диагонали, равного единице:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

С помощью операторов проектирования π_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, легко устанавливается связь между произвольным векторным отображением $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$ и его координатными функциями f_i (см. (41.30)):

$$f_i = \pi_i \circ f, \tag{41.37}$$

т. е. каждая координатная функция f_i, $i=1, 2, \ldots, m$, является композицией отображения f с оператором проектирования π_i.

Если $m=1$, т. е. линейный оператор $f: R^n \to \boldsymbol{R}$ отображает пространство R^n во множество всех действительных чисел, то он называется обычно *линейным функционалом*.

В силу (41.33) всякий линейный функционал имеет вид

$$y=a_1x_1+\ldots+a_nx_n, \tag{41.38}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — некоторые действительные числа.

Обозначив через a вектор с координатами $(a_1, \ldots, a_n)$, получим, что всякий линейный функционал $f: R^n \to \boldsymbol{R}$ имеет вид

$$f(x)=(a, x),$$

где через (a, x) обозначено скалярное произведение векторов a и x. Очевидно и обратное: каждое отображение вида $x \mapsto (a, x)$ является линейным функционалом $f: R^n \to \boldsymbol{R}$.

Упражнение 11. Установить, какие из следующих отображений линейны:
а) $f: R^3 \to R^2$, причем $f(x, y, z)=(x, z)$;
б) $f: R^4 \to R^4$, причем $f(x)=-x$, где x — произвольный вектор в R^4;
в) $f: R^3 \to R^3$, причем $f(x)=x+(0, -1, 0)$, где x — любой вектор в R^3;
г) $f: R^2 \to R^2$, причем $f(x, y)=(2x+y, y)$;
д) $f: R^2 \to R^2$, причем $f(x, y)=(2x, y-x)$;
е) $f: R^2 \to R^2$, причем $f(x, y)=(y, x)$;
ж) $f: R^2 \to R$, причем $f(x, y)=xy$.

Напомним определения некоторых операций с матрицами (известных из алгебры). Если $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ — прямоугольные матрицы с одинаковым числом строк и столбцов, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$, то их *сумма* определяется как матрица, элемент c_{ij} которой является суммой соответствующих элементов матриц A и B, т. е.

$$c_{ij} \overset{\text{def}}{=} a_{ij}+b_{ij}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \; j=1, 2, \ldots, n.$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица, все элементы c_{ij} которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением их на λ

$$c_{ij} \overset{\text{def}}{=} \lambda a_{ij}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \; j=1, 2, \ldots, n.$$

Если число столбцов матрицы $A=(a_{ij})$ равно числу строк матрицы $B=(b_{jk})$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$, $k=1, 2, \ldots, s$, то *произведение* AB матриц A и B определяется как матрица, состоящая из элементов c_{ik}, которые определяются по формулам:

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \; k=1, 2, \ldots, s.$$

Отметим два нужных нам для дальнейшего свойства линейных операторов.

1°. *Если f и g — линейные операторы, $f: R^n \to R^m$, $g: R^n \to R^m$, а λ и μ — произвольные числа, то $\lambda f + \mu g$ — также линейный оператор, действующий из R^n в R^m, причем, если A и B суть матрицы линейных операторов f и g, то $\lambda A + \mu B$ является матрицей оператора $\lambda f + \mu g$.*

Доказательство этого утверждения производится путем его непосредственной проверки: если

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

— координатные функции отображения f, а

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

— координатные функции отображения g, то для координатных функций отображения $\lambda f + \mu g$ будем иметь (при сложении и умножении на числа векторов их координаты складываются и умножаются на те же числа)

$$\lambda y_i + \mu z_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \mu \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) x_j,$$

т. е., во-первых, координатные функции отображения $\lambda f + \mu g$ являются линейными функциями, а, во-вторых, элементами c_{ij} матрицы отображения $\lambda f + \mu g$ являются числа $c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$, т. е. элементы матрицы $\lambda A + \mu B$, где $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. $\square$

2°. *Если f и g — линейные операторы, $f: R^n \to R^m$, $g: R^m \to R^s$, то их композиция $g \circ f$ также является линейным оператором $R^n \to R^s$, а ее матрица равна произведению матриц отображений g и f.*

Снова выполним непосредственную проверку утверждения. Если

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

— координатные функции отображения f, а

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, s$$

— координатные функции отображения g, то

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} y_i = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right) x_j,$$

т. е., во-первых, координатные функции композиции $g \circ f$ суть линейные функции, а, во-вторых, элементы c_{kj} ее матрицы получаются из элементов матриц a_{ij} и b_{ki} операторов f и g по правилу

$$c_{kj}=\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}. \tag{41.39}$$

Как было сказано, такая матрица (c_{kj}) и называется произведением матриц (b_{ki}) и (a_{ij}). $\square$

Заметим, что каждый линейный оператор $f: R^n \to R^m$ является непрерывным отображением пространства R^n, ибо все его координатные функции (41.33), будучи линейными, непрерывны.

Длина вектора $x \in R^n$, как это отмечалось в п. 41.5, является непрерывной в пространстве R^n функцией. Поэтому, если $f: R^n \to R^m$ — линейный оператор, то функция $|f(x)|$, как композиция двух непрерывных функций, будет также непрерывной в R^n.

Поскольку единичный шар $Q^n=\{x \in R^n : |x| \leqslant 1\}$ является компактом, то для всякого линейного оператора $f: R^n \to R^m$ сужение непрерывной функции $|f|: R^n \to R$ на шар Q^n, т. е. функция $|f|: Q^n \to R$, ограничено:

$$\sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| < +\infty. \tag{41.40}$$

Определение 7. *Для линейного оператора (в частности — для линейного функционала, при $m=1$) $f: R^n \to R^m$ число $\sup\limits_{|x| \leqslant 1} |f(x)|$ называется его нормой*) и обозначается через $\|f\|$:*

$$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)|. \tag{41.41}$$

В силу неравенства (41.40) норма любого линейного оператора конечна.

Оценим длину образа вектора $x \in R^n$ через норму оператора f и длину x самого вектора. Для любого $x \neq 0$, $x \in R^n$, вектор $\xi=\frac{x}{|x|}$ имеет длину 1: $|\xi|=\left|\frac{x}{|x|}\right|=\frac{1}{|x|}|x|=1$. Поэтому, использовав линейность оператора f, свойство (18.34) длины вектора и определение (41.41), получим

$$|f(x)|=\left|f\left(|x|\frac{x}{|x|}\right)\right|=\left||x|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|=|x|\left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |x| \sup_{|\xi| \leqslant 1} |f(\xi)|=|x|\,\|f\|,$$

т. е.

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\,|x|. \tag{41.42}$$

Из этого неравенства следует, что при $|x|<1$ справедливо неравенство $|f(x)|<\|f\|$. Вспомним, что непрерывная на компакте функция достигает на нем своего наибольшего значения (см. тео-

*) Общее определение нормы будет дано в п. 57.3.

рему 3 в п. 19.5). Поэтому функция $|f|: Q^n \to \boldsymbol{R}$, будучи непрерывной на компакте Q^n, достигает на нем своего наибольшего значения:

$$\|f\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \max_{|x| \leqslant 1} |f(x)|,$$

а поскольку при $|x| < 1$ имеет место неравенство $|f(x)| < \|f\|$, то указанный максимум достигается при $|x| = 1$, т. е. на единичной сфере $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$. Таким образом,

$$\|f\| = \max_{|x|=1} |f(x)|. \tag{41.43}$$

Отметим еще одно полезное выражение для нормы линейного оператора

$$\|f\| = \sup_{x \in R^n,\ x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|}. \tag{41.44}$$

Докажем его. Используя снова свойство длины (18.34) вектора, линейность отображения f и формулу (41.41), получим

$$\sup_{x \in R^n,\ x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = \sup_{x \in R^n,\ x \neq 0} \left| \frac{1}{|x|} f(x) \right| = \sup_{x \in R^n,\ x \neq 0} \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| =$$
$$= \sup_{|\xi|=1} |f(\xi)| = \|f\|.$$

Нетрудно оценить норму $\|f\|$ линейного оператора f через элементы его матрицы (41.34). Замечая, что квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат, применяя формулу (41.35) и неравенство Коши-Шварца (18.2), будем иметь

$$|f(x)|^2 = \left| \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e_i \right|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) |x|^2.$$

Отсюда для каждого $x \neq 0$, $x \in R^n$:

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Поэтому в силу (41.44)

$$\|f\| = \sup_{x \in R^n,\ x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}. \tag{41.45}$$

Тем самым еще раз, но уже «алгебраическим путем» доказано неравенство (41.40).

41.7. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Перейдем теперь к определению дифференцируемых векторных отображений. Предварительно напомним, что функция n переменных $f: E \to R$, $E \subset R^n$ *), определенная в окрестности точки $x=(x_1, \ldots, x_n) \in E$ называется *дифференцируемой* в этой точке, если существуют такие постоянные $a_1, \ldots, a_n$ (они являются частными производными функции f в этой точке $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$), что

$$f(x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \\ = a_1h_1 + \ldots + a_nh_n + o(h), \quad h \to 0, \qquad (41.46)$$

где $h=(h_1, \ldots, h_n)$. Для отображений из n-мерного пространства в m-мерное «o малое» определяется следующим образом: пусть U — окрестность точки $x_0 \in E$, $\alpha: U \to \boldsymbol{R}^m$; будем говорить, что $\alpha = o(x)$ при $x \to x_0$, если $|\alpha| = o(|x|)$, $x \to x_0$, т. е. если существует такая функция $\varepsilon: U \to \boldsymbol{R}$, что

$$|\alpha(x)| = \varepsilon(x)|x|, \qquad (41.47)$$

$$x \in U \text{ и } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Само собой разумеется, что $|\alpha(x)|$ является длиной вектора в пространстве R^m, а $|x|$ — длиной вектора в пространстве R^n. Для выражений вида $o(x)$, являющихся векторами, сохраняются обычные правила действий с символом «o малое», например, $o(x) + o(x) = o(x)$ при $x \to x_0$ и т. п.

Линейное отображение (линейный функционал) $(h_1, \ldots, h_n) \longmapsto a_1h_1 + \ldots + a_nh_n$ в формуле (41.46) называется *дифференциалом функции* f в точке x. Обозначив его через $D(x)$, получим

$$D(x)(h) = a_1h_1 + \ldots + a_nh_n.$$

Таким образом, определение дифференцируемости (41.46) можно представить в виде

$$f(x+h) = f(x) + D(x)(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Аналогично определяется и дифференцируемость отображения в общем случае.

Определение 8. *Пусть U — окрестность, в пространстве R^n, точки $x \in R^n$. Отображение $f: U \to R^m$ называется дифференцируемым в точке x, если существует такое линейное отображение (линейный оператор) $l: R^n \to R^m$, что*

$$f(x+h) = f(x) + l(h) + o(h), \quad h \to 0, \quad h \in R^n. \qquad (41.48)$$

*) Через $\boldsymbol{R}$, как всегда, обозначается множество всех действительных чисел.

Линейный оператор l называется дифференциалом отображения f в точке x и обозначается через $D(x)$ или более подробно, через $D_f(x)$.

Используя это обозначение, определение дифференцируемости (41.48) можно переписать в виде

$$f(x+h)=f(x)+D_f(x)(h)+o(h), \quad h\to 0. \tag{41.49}$$

Матрица дифференциала $D_f(x)$ (см. (41.34)) *называется производной отображения f в точке x и обозначается через $f'(x)$.*

Отметим, что из формулы (41.48) сразу следует, что отображение, дифференцируемое в точке x, непрерывно в ней:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x).$$

Теорема 3. *Если отображение $f: E\to R^m$, $E\subset R^n$, дифференцируемо в точке $x\in E$, то его дифференциал в этой точке определяется однозначно.*

Следствие. *Дифференциал линейного отображения совпадает с самим отображением.*

Доказательство теоремы. Пусть наряду с равенством (41.48) выполняется также равенство

$$f(x+h)=f(x)+l_1(h)+o(h), \quad h\to 0, \tag{41.50}$$

где $l_1: R^n\to R^m$, l_1 — линейный оператор. Вычитая одно из этих равенств из другого, получим

$$l(h)-l_1(h)=o(h) \text{ при } h\to 0,$$

т. е. существует такая функция $\varepsilon(h)$, определенная на некоторой окрестности V нуля пространства R^n, т. е. $\varepsilon: V\to \boldsymbol{R}$, что $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ и для всех $h\in V$ имеет место

$$|l(h)-l_1(h)|=\varepsilon(h)|h|. \tag{41.51}$$

Возьмем теперь произвольное $k\in R^n$; тогда для всех достаточно малых t будем иметь $tk\in V$. Поэтому в (41.51) для таких t можно взять $h=tk$:

$$|l(tk)-l_1(tk)|=\varepsilon(tk)|tk|.$$

Поскольку $|tk|=|t||k|$ и отображения l и l_1 линейны, будем иметь

$$l(tk)-l_1(tk)=t[l(k)-l_1(k)],$$

а потому

$$|l(k)-l_1(k)|=\varepsilon(tk)|k|. \tag{41.52}$$

Но $\lim\limits_{t\to 0} tk=0$, следовательно, в силу свойства функции ε, имеем также $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(tk)=0$. Переходя к пределу при $t\to 0$ в (41.52), получим $|l(k)-l_1(k)|=0$, т. е. для любого $k\in R^n$

$$l(k)=l_1(k).$$

Это и означает, что $l=l_1$. $\square$

Доказательство следствия. Пусть $f: R^n\to R^m$ — линейный оператор. Тогда в силу линейности для любых $x\in R^n$ и $h\in R^n$

$$f(x+h)=f(x)+f(h),$$

т. е. равенство (41.48) выполняется при $l=f$ и $o(h)\equiv 0$. В силу единственности дифференциала $D_f(x)=f$. $\square$

Теорема 4 (линейность дифференциала). *Если отображения $f: E\to R^m$ и $g: E\to R^m$, $E\subset R^n$, дифференцируемы в точке $x\in E$, то при любых числах λ и μ линейная комбинация $\lambda f+\mu g$ также дифференцируема в точке x и*

$$D_{\lambda f+\mu g}(x)=\lambda D_f(x)+\mu D_g(x).$$

Доказательство. В силу дифференцируемости отображений f и g в точке x имеем (см. (41.49)):

$$f(x+h)=f(x)+D_f(x)(h)+o(h),\quad h\to 0,$$
$$g(x+h)=g(x)+D_g(x)(h)+o(h),\quad h\to 0;$$

отсюда

$$(\lambda f(x+h)+\mu g(x+h)=$$
$$=[\lambda f(x)+\mu g(x)]+[\lambda D_f(x)+\mu D_g(x)](h)+o(h),\ h\to 0.$$

Поскольку $\lambda D_f(x)+\mu D_g(x)$ является линейным отображением (см. п. 41.6), то, в силу определения 8, линейное отображение $\lambda D_f(x)+\mu D_g(x)$ является дифференциалом отображения $\lambda f+\mu g$. $\square$

Теорема 5. *Пусть $E\subset R^n$, $D\subset R^m$, $f: E\to D$, $g: D\to R^s$, причем отображение f дифференцируемо в точке $x\in E$, а g — в точке $f(x)$. Тогда композиция $g\circ f$ дифференцируема в точке x и ее дифференциал в этой точке равен композиции дифференциалов отображений f и g:*

$$D_{g\circ f}(x)=D_g(f(x))\circ D_f(x). \tag{41.53}$$

Следствие. *Если выполнены условия теоремы, то производная композиции отображений равна произведению производных:*

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x). \tag{41.54}$$

Как видно из приведенных формул, благодаря удачному выбору определений и символики, в формулировках теорем имеет место полная аналогия с одномерным случаем.

Доказательство. В силу дифференцируемости отображения f имеем

$$(g\circ f)(x+h)=g(f(x+h))=$$
$$=g(f(x)+D_f(x)(h)+o(h)),\quad h\to 0. \quad (41.55)$$

Таким образом, аргумент функции g в точке $y=f(x)$ получил приращение

$$k=D_f(x)(h)+o(h). \quad (41.56)$$

Поэтому из (41.55) в силу дифференцируемости функции g имеем

$$(g\circ f)(x+h)=g(y+k)=g(y)+D_g(y)(k)+o(k),\quad k\to 0. \quad (41.57)$$

Поскольку (см. неравенство (41.42))

$$|D_f(x)(h)|\leqslant\|D_f(x)\|\,|h|, \quad (41.58)$$

где норма $\|D_f(x)\|$ линейного оператора $D_f(x)$ является неотрицательным числом, то для функции $k=k(h)$, определенной равенством (41.56) получим

$$\lim_{h\to 0} k=0. \quad (41.59)$$

Более того, справедлива оценка

$$|k|\leqslant\|D_f(x)\|\,|h|+|o(h)|,\quad h\to 0,$$

а так как при достаточно малых h имеет место неравенство $|o(h)|<|h|$, то для таких h справедлива и оценка

$$|k|\leqslant(\|D_f(x)\|+1)\,|h|. \quad (41.60)$$

Далее, из определения $o(k)$ (см. (41.47)) явствует, что существует такая функция $\varepsilon(k)$, что

$$\lim_{k\to 0}\varepsilon(k)=0 \quad (41.61)$$

и $|o(k)|=\varepsilon(k)\,|k|$. Поэтому в силу (41.60) для указанных достаточно малых h выполняется неравенство

$$|o(k)|=\varepsilon(k)\,|k|\leqslant\varepsilon(k)(\|D_f(x)\|+1)\,|h|. \quad (41.62)$$

А поскольку из (41.59) и (41.61) вытекает, что $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(k)=0$ и следовательно,

$$\varepsilon(k)(\|D_f(x)\|+1)\,|h|=o(h)\ \text{при}\ h\to 0,$$

то из (41.62) имеем $|o(k)|\leqslant o(h)$, $h\to 0$, откуда

$$o(k)=o(h)\ \text{при}\ h\to 0.$$

Это означает, что формулу (41.57) можно переписать в виде

$$(g\circ f)(x+h)=g(y)+D_g(y)(k)+o(h),\quad h\to 0, \quad (41.63)$$

где k задается по формуле (41.56).

Рассмотрим теперь среднее слагаемое в правой части равенства (41.63). В силу линейности отображения $D_g(y)$ имеем

$$D_g(y)(k)=D_g(y)(D_f(x)(h)+o(h))= \\ =D_g(y)(D_f(x)(h))+D_g(y)\,o(h),\quad h\to 0. \qquad (41.64)$$

Вследствие неравенства (41.42) будем иметь $|D_g(y)\,o(h)|\leqslant \leqslant \|D_g(y)\|\,|o(h)|$, а поэтому

$$D_g(y)\,o(h)=o(h),\quad h\to 0;$$

следовательно, из (41.64) получим:

$$D_g(y)(k)=D_g(y)(D_f(x)(h))+o(h)= \\ =(D_g(y)\circ D_f(x))(h)+o(h),\quad h\to 0.$$

Подставляя полученное для $D_g(y)$ выражение в (41.63) и принимая во внимание, что $y=f(x)$, будем окончательно иметь

$$(g\circ f)(x+h)=g(f(x))+(D_g(f(x))\circ D_f(x))(h)+o(h),\quad h\to 0.$$

Поскольку композиция линейных операторов является линейным оператором, то в силу единственности дифференциала оператор $D_g(f(x))\circ D_f(x)$ является дифференциалом композиции $f\circ g$, т. е. формула (41.53) доказана.

Формула (41.54) сразу следует из нее, поскольку при композиции линейных операторов их матрицы перемножаются. $\square$

Теорема 6. *Отображение $f=(f_1, \dots, f_m): E\to R^m$, $E\subset R^n$, дифференцируемо в точке $x\in E$ в том и только том случае, когда все его координатные функции $f_i: E\to R$, $i=1, 2, \dots, m$, дифференцируемы в этой точке.* В этом случае элементы a_{ij} *матрицы дифференциала $D_f(x)$ являются соответствующими частными производными координатных функций:*

$$a_{ij}=\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j},\quad i=1, 2, \dots, m,\ j=1, 2, \dots, n.$$

Иначе говоря, производная $f'(x)$ является матрицей Якоби системы функции f_i (см. определение 2 п. 41.3),

$$f'(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad (41.65)$$

и называется также *матрицей Якоби отображения* f в точке x.

Доказательство. 1. Координатные функции $f_i=\pi_i\circ f$ (см. (41.37)) являются композицией двух дифференцируемых отображений: отображения f, которое дифференцируемо в точке x по условию, и проекции π_i (см. (41.36)), которая, как всякий линейный оператор $R^m\to R$ дифференцируема на всем пространстве R^m. Следовательно, согласно теореме 5, функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, дифференцируемы в точке x.

2. Пусть все координатные функции $f_i = \pi_i \cdot f$ отображения дифференцируемы в точке x. В силу (41.46) это означает, что существуют такие постоянные a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, что

$$f_i(x+h) = f_i(x) + a_{i1}h_1 + \ldots + a_{in}h_n + o(h),$$
$$h \to 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{41.66}$$

Отсюда, как известно (см. 20.2), следует, что коэффициенты a_{ij} при приращениях h_j аргументов x_j являются соответствующими частными производными функций f_i:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{41.67}$$

Обозначим через $l: R^n \to R^m$ линейный оператор с матрицей (a_{ij}). Поскольку $(o(h), \ldots, o(h)) = o(h)$ *), то равенства (41.66) можно записать в виде

$$f(x+h) = f(x) + l(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Это и означает дифференцируемость отображения f, причем из (41.67) следует справедливость формулы (41.65). □

Замечание 1. В силу формул (41.54) и (41.65), следствие из теоремы 5 означает, что матрица Якоби композиции отображений f и g равна произведению матриц Якоби этих отображений.

Это, впрочем, непосредственно следует и из формулы дифференцирования сложной функции: если $z_k = g_k(y_1, \ldots, y_m)$, $k = 1, 2, \ldots, s$, а $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то (см. (20.26))

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad k = 1, 2, \ldots, s, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

что согласно правилу умножения матриц (см. п. 41.6) и означает, что матрица $\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right)$ является произведением матриц $\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)$ и $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$,

$$\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right).$$

Определение 9. *В случае $m = n$ определитель*

$$\det\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$$

---

*) Запись $(o(h), \ldots, o(h)) = o(h)$ означает, что вектор, координаты которого являются бесконечно малыми более высокого порядка, чем h, сам является бесконечно малой более высокого порядка, чем h при $h \to 0$. Совпадение в данном случае обозначений вектора и его координат связано с тем, что мы, чтобы не усложнять символики, выбрали для n-мерного вектора обозначение x, в котором не отражена его размерность. Она делается ясной, только если он записан с помощью координат $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

матрицы Якоби (41.65) *называется определителем Якоби или якобианом отображения* $f: E \to R^n$, $E \subset R^n$, *в точке* $x \in E$ *и обозначается* (см. п. 41.3)

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} \text{ или } \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Замечание 2. Из алгебры известно, что при умножении квадратных матриц их определители перемножаются; поэтому при выполнении условий теоремы 5 в случае $m = n = s$ якобиан композиции отображений f и g равен произведению якобианов отображений f и g

$$\frac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (y_1, \ldots, y_n)} \frac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}. \quad (41.68)$$

Действительно,

$$\frac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} = \det \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right) = \det \left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) =$$
$$= \det \left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right) \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (y_1, \ldots, y_n)} \frac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}.$$

Замечание 3. Пусть $E \subset R^n$ и $\mathrm{Id}: E \to E$ — тождественное отображение множества E на себя. В координатной форме оно записывается в виде условия равенства координат точек образа и прообраза при этом отображении, т. е. координатные функции имеют вид

$$f_i(x) = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in E.$$

Если $x^{(0)}$ — внутренняя точка множества E, то эти функции можно дифференцировать в этой точке, и поскольку $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$ при $i \neq j$ и $\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$, то матрица Якоби тождественного отображения является единичной матрицей

$$E = \begin{pmatrix} 1 \ldots 0 \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ 0 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $U \subset R^n$, $V \subset R^n$ и $f: U \to V$ — взаимно однозначное (инъективное) отображение, а $f^{-1}: f(U) \to U$ — обратное ему. Тогда для любой точки $x \in U$ имеем $f^{-1}(f(x)) = x$, т. е. композиция $f^{-1} \circ f$ является тождественным отображением.

Пусть отображение f дифференцируемо в точке $x_0 \in U$ (следовательно, x_0 — внутренняя точка множества U, ибо только для таких точек определено понятие дифференцируемости), а обратное отображение f^{-1} дифференцируемо в точке $f(x_0)$. Поскольку $f^{-1} \circ f$ — тождественное отображение, то в силу формулы (41.54) имеем

$$(f^{-1})' f' = (f^{-1} \circ f)' = (\mathrm{Id})' = E. \quad (41.69)$$

Перейдя от этого равенства матриц к их якобианам, получим

$$\det(f^{-1})' \det f' = 1, \tag{41.70}$$

ибо $\det E = 1$.

Если отображение f задано координатными функциями (41.30), то формулу (41.70) можно переписать в виде

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 1. \tag{41.71}$$

Из этой формулы следует, что при сделанных предположениях как якобиан отображения f в точке x, так и якобиан обратного отображения f^{-1} в точке $f(x)$ не обращаются в ноль.

Перепишем формулу (41.71) еще в виде

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}}. \tag{41.72}$$

Эта формула является очевидным обобщением формулы для производной обратной функции одного переменного: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

В заключение сформулируем два полезных определения.

Определение 10. *Отображение $f: E \to R^m$, $E \subset R^n$, дифференцируемое в каждой точке $x \in E$ называется дифференцируемым отображением множества E.*

Очевидно, если отображение дифференцируемо на множестве E, то какова бы ни была точка $x \in E$, согласно определению 8 отображение f определено в некоторой ее окрестности, т. е. E — открытое множество.

Согласно теореме 6 отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)$ дифференцируемо на множестве E тогда и только тогда, когда на этом множестве дифференцируемы все его координатные функции $f_1, \ldots, f_n$. Если все координатные функции непрерывно дифференцируемы на E, т. е. все их первые частные производные непрерывны на E, то отображение f называется *непрерывно дифференцируемым отображением множества E*.

Определение 11. *Гомеоморфное отображение $f: G \to D$, где G и D — открытые множества пространства R^n называется диффеоморфным отображением или диффеоморфизмом, если как оно само, так и обратное ему отображение $f^{-1}: D \to G$, дифференцируемы.*

41.8. ОТОБРАЖЕНИЯ С НЕРАВНЫМ НУЛЮ ЯКОБИАНОМ. ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ ОБЛАСТИ

Прежде всего рассмотрим вопрос о существовании отображения, обратного данному. Как мы знаем, в случае $n = 1$ для непрерывно дифференцируемой на некотором отрезке функции условие необращения в ноль ее производной (которое влечет за собой ее строгую монотонность) является достаточным для существования обратной ей однозначной непрерывно дифференцируемой функции. В случае же произвольного n дело существенно осложняется: соответствующие точечные условия, налагаемые на дифференциальные свойства отображения позволяют утверждать лишь что локально, т. е. в окрестности точки, существует обратное отображение. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть*

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{41.73}$$

— непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества $G \subset R^n$ в пространство R^n. Если якобиан этого отображения не обращается в ноль в точке $x^{(0)} \in G$, то существуют такие окрестности U_x и U_y соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, что $f(x)$, $x \in U_x$, является взаимно однозначным отображением окрестности U_x на окрестность U_y, а обратное ему отображение непрерывно дифференцируемо на множестве U_y.

Следствие. *Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества $G \subset R^n$ в пространство R^n. Если якобиан отображения f не равен нулю на G, то образ множества G при этом отображении также является открытым множеством.*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$F_i(x, y) = f_i(x_1, \ldots, x_n) - y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Они определены для всех $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R_y^n$ и всех $x = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) \in G \subset R_x^n$. С их помощью система равенств (41.73), задающих отображение f, перепишется в виде

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{41.74}$$

При этом функции $F_i(x, y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ (за такую окрестность можно взять, например, $G \times R_y^n$),

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0 \text{ и } \left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} = \left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 настоящего параграфа о разрешимости системы уравнений.

В силу этой теоремы уравнения (41.74), или, что то же, система (41.73), могут быть разрешены, и притом единственным образом, относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$. Более подробно это означает, что существуют такие окрестности U_x^* и U_y, соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$,

$x^{(0)} \in U_x^*$, $y^{(0)} \in U_y$ и такое единственное отображение

$$x = g(y) = \begin{cases} x_1 = g_1(y_1, \ldots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = g_n(y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{41.75}$$

отображающее окрестность U_y в окрестность U_x^*, что для всех $y \in U_y$ имеет место тождество

$$f[g(y)] = y.$$

Иначе говоря, для каждой точки $y \in U_y$ существует и притом единственная точка $x = g(y) \in U_x^*$, переходящая при отображении f в точку y. Тем самым $x \in f^{-1}(y) \cap U_x^*$, $g(y)$ является отображением, однозначным, непрерывно дифференцируемым и обратным к f на $U_y: g = f^{-1}$.

Положим $U_x = U_x^* \cap f^{-1}(U_y)$. Тогда U_x — открытое множество, ибо оно является пересечением двух открытых множеств U_x^* и $f^{-1}(U_y)$ (открытость множества $f^{-1}(U_y)$ следует из того, что оно является прообразом открытого множества U_y при непрерывном отображении f, см. лемму 2 в п. 41.4). Очевидно, что U_x отображается взаимно однозначно на U_y, а поскольку $x^{(0)} \in U_x^*$ и $f(x^{(0)}) = y^{(0)} \in U_y$, то $x^{(0)} \in U_x$, т. е. U_x — искомая окрестность точки $x^{(0)}$. □

З а м е ч а н и е 1. Окрестности U_x и U_y, фигурирующие в условиях теоремы 4, обладают еще тем дополнительным свойством, что якобиан отображения f окрестности U_x на окрестность U_y не обращается в ноль на окрестности U_x, а якобиан обратного отображения f^{-1} не обращается в нуль на окрестности U_y. Это сразу следует из формулы (41.71). Действительно, в силу того что отображение f взаимно однозначно переводит окрестность U_x в окрестность U_y и того, что f и f^{-1} непрерывно дифференцируемы, можно применить указанную формулу к отображению f, рассматриваемому на множестве U_x. Согласно этой формуле, произведение якобианов отображений f и f^{-1} равно единице и, следовательно, каждый из них не равен нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я. Пусть $y = f(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества G в пространство R^n, а $y^{(0)}$ — произвольная точка множества $f(G)$. Выберем какую-либо точку $x^{(0)}$ в прообразе точки $y^{(0)}: x^{(0)} \in f^{-1}(y^{(0)})$, следовательно, $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$. В силу теоремы 4 существуют такие окрестности $U_x \subset G$ и U_y соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, что $f(U_x) = U_y$. Следовательно, $U_y \subset f(G)$. Иначе говоря, для всякой точки $y^{(0)} \in f(G)$ существует ее окрестность, содержащаяся во множестве $f(G)$. Таким образом, любая точка множества $f(G)$ является внутренней для этого множества, что и означает, что $f(G)$ — открытое множество. □

З а м е ч а н и е 2. Если при некотором отображении f для точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ существуют соответственно окрестности U_x и U_y, взаимно однозначно отображающиеся им друг на друга, то говорят, что *отображение f локально взаимно однозначно в точке $x^{(0)}$*.

Если при этом отображение f непрерывно на U_x, а f^{-1} непрерывно на U_y, то f называется *локально гомеоморфным* в точке $x^{(0)}$ *отображением* или *локальным гомеоморфизмом*. Если, наконец, указанный локальный гомеоморфизм является диффеоморфизмом, то рассматриваемое отображение называется *локально диффеоморфным* в данной точке (определения гомеоморфизма и диффеоморфизма см. в п. 41.4 и п. 41.7).

Употребляя эту терминологию, можно сказать, что отображение f, рассматриваемое в теореме 4, в каждой точке, в которой его якобиан не равен нулю, является локально диффеоморфным отображением.

Теорема 8 (принцип сохранения области). *Образ n-мерной области в n-мерном пространстве при непрерывно дифференцируемом отображении с якобианом, не обращающимся в нуль, является областью.*

Доказательство. Пусть G — область, $G \subset R^n$ и $y = f(x)$ — отображение G в R^n, удовлетворяющее условиям теоремы. Согласно следствию теоремы 4, множество $f(G)$ открыто, а по лемме 7 п. 41.4 линейно связно. Поэтому, если G — область, то при выполнении условий теоремы множество $f(G)$ также является областью. $\square$

Упражнение 12. Построить пример непрерывно дифференцируемого отображения некоторой плоской области, якобиан которого нигде не обращается в нуль и которое не взаимно однозначно.

41.9. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ УРАВНЕНИЕМ, В КОТОРОМ НАРУШАЮТСЯ УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Мы уже знаем, что если координаты некоторой точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ удовлетворяют уравнению

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{41.76}$$

и в этой точке производная $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ не равна нулю, то при соответствующих условиях, налагаемых на непрерывность самой функции F и указанной производной, уравнение (41.76) разрешимо в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ относительно x_i и решение является непрерывно дифференцируемой функцией остальных координат.

Естественно, возникает вопрос: а что будет в случае, когда в точке $x^{(0)}$ частные производные по всем аргументам обращаются в нуль — определяет в этом случае уравнение (41.76) какие-либо функции или нет? Остановимся на этом вопросе, однако ввиду его сложности ограничимся рассмотрением двумерного случая.

Итак, будем рассматривать уравнение

$$F(x,\ y)=0, \tag{41.77}$$

где функция F определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$, такой, что

$$F(x_0,\ y_0)=0. \tag{41.78}$$

Пусть

$$F_x(x_0,\ y_0)=F_y(x_0,\ y_0)=0. \tag{41.79}$$

Покажем, что и при выполнении этих условий уравнение (41.77) иногда может быть разрешено в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ относительно одной из переменных, так что получится непрерывно дифференцируемая функция; однако это можно сделать, вообще говоря, не единственным образом. Таким образом, условие

$$F_x^2(x_0,\ y_0)+F_y^2(x_0,\ y_0)\neq 0, \tag{41.80}$$

которое в нашем случае (см. (41.79)) не выполняется и которое позволяет применить теорему 1 о неявных функциях к одному из переменных, естественно назвать условием однозначной разрешимости уравнения (41.77).

Определение 12. *Точка* $(x_0,\ y_0)$, *координаты которой удовлетворяют условиям* (41.78) *и* (41.79), *называется особой точкой уравнения* (41.77).

Особая точка называется изолированной, если существует ее окрестность, в которой она является единственной особой точкой.

Геометрически это означает, что если уравнение (41.77) является неявным представлением какой-либо кривой, то в окрестности особых точек этого уравнения кривая, вообще говоря, не является графиком некоторой гладкой однозначной функции (как это имеет место при выполнении условия (41.80)); здесь возможны разные особенности, которые мы сейчас и рассмотрим.

Введем для краткости записи обозначения

$$F_{xx}(x_0,\ y_0)=F_{xx}^0,\quad F_{xy}(x_0,\ y_0)=F_{xy}^0,\quad F_{yy}(x_0,\ y_0)=F_{yy}^0.$$

Теорема 9. *Пусть функция* $F(x,\ y)$ *определена и дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности изолированной особой точки* $(x_0,\ y_0)$ *уравнения* (41.77) *и пусть*

$$F_{xx}^0F_{yy}^0-F_{xy}^{0^2}\neq 0.$$

Тогда, если

$$F_{xx}^0F_{yy}^0-F_{xy}^{0^2}>0, \tag{41.81}$$

то $(x_0,\ y_0)$ *является изолированным решением уравнения* (41.77), *т. е. существует окрестность точки* $(x_0,\ y_0)$ *никакая точка ко-*

торой, кроме $(x_0,\ y_0)$, *не удовлетворяет уравнению* (41.77); *если же*

$$F^0_{xx}F^0_{yy}-F^{0^2}_{xy}<0, \tag{41.82}$$

то уравнение (41.77) *разрешимо в некоторой окрестности точки* $(x_0,\ y_0)$, *но не однозначно: имеются две различные дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению* (41.77). *Поэтому* $(x_0,\ y_0)$ *называется в этом случае двойной точкой.*

Например, если

$$F^0_{yy}\neq 0, \tag{41.83}$$

то существуют две дифференцируемые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенные в некоторой окрестности точки x_0 и такие, что в этой окрестности $F(x,\ f_1(x))=0$, $F(x,\ f_2(x))=0$, причем $f_1(x_0)=$ $=f_2(x_0)=y_0$, а производные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точке x_0 являются различными корнями уравнения

$$F^0_{xx}+2F^0_{xy}k+F^0_{yy}k^2=0^{*)}. \tag{41.84}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (41.81). Вместе с (41.79) оно достаточно для наличия строгого экстремума функции $F(x,\ y)$ в точке $(x_0,\ y_0)$ (см. теорему 3 в п. 40.2). Поэтому существует окрестность U точки $(x_0,\ y_0)$, такая, что при $(x,\ y)\in U$ и $(x,\ y)\neq(x_0,\ y_0)$ либо всегда $F(x,\ y)>F(x_0,\ y_0)$, либо всегда $F(x,\ y)<F(x_0,\ y_0)$, и так как $F(x_0,\ y_0)=0$, то $F(x,\ y)\neq 0$ для всех $(x,\ y)\in U$, $(x,\ y)\neq(x_0,\ y_0)$, т. е. $(x_0,\ y_0)$ является изолированным решением уравнения (41.77)**).

Пусть теперь выполнено условие (41.82). Разложим функцию $F(x,\ y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ до слагаемых второго порядка; тогда, приняв во внимание условия (41.78) и (41.79), получим:

$$F(x,\ y)= \\ =\frac{1}{2}\left[F^0_{xx}(x-x_0)^2+2F^0_{xy}(x-x_0)(y-y_0)+F^0_{yy}(y-y_0)^2\right]+o(r^2), \tag{41.85}$$

где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Положим $x-x_0=r\cos\varphi$, $y-y_0=$ $=r\sin\varphi$. Очевидно, $(r,\ \varphi)$ — полярные координаты точки $(x,\ y)$, причем в качестве начала полярной системы координат принята точка $(x_0,\ y_0)$.

---

*) Корни этого уравнения вещественны и различны в силу условий (41.82) и (41.83).

**) В доказательстве этого утверждения используется не то, что $(x_0,\ y_0)$ является изолированной особой точкой, а лишь то, что она является просто особой точкой, в которой выполняется условие (41.81).

В этих координатах

$$F(x, y) = \frac{r^2}{2}(F^0_{xx}\cos^2\varphi + 2F^0_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + F^0_{yy}\sin^2\varphi) + o(r^2) =$$
$$= \frac{r^2}{2} P(\varphi) + o(r^2), \qquad (41.86)$$

где

$$P(\varphi) = F^0_{xx}\cos^2\varphi + 2F^0_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + F^0_{yy}\sin^2\varphi, \qquad (41.87)$$

или при $\varphi \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$P(\varphi) = \cos^2\varphi\,(F^0_{xx} + F^0_{xy}\operatorname{tg}\varphi + F^0_{yy}\operatorname{tg}^2\varphi). \qquad (41.88)$$

Предположим теперь, что выполнено также и условие (41.83). Пусть k_1 и k_2 — корни уравнения (41.84) и пусть $\varphi_1 = \operatorname{arctg} k_1$ и $\varphi_2 = \operatorname{arctg} k_2$. Тогда

$$\varphi_1 \neq \pm\pi/2, \qquad \varphi_2 \neq \pm\pi/2, \qquad (41.89)$$

и из (41.88) следует, что

$$P(\varphi) = \cos^2\varphi\,(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_1)(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_2). \qquad (41.90)$$

Из формулы (41.90) видно, что функция $P(\varphi)$ при $\varphi \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ обращается в ноль только для $\varphi = \varphi_1 + k\pi$ и $\varphi = \varphi_2 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, причем при переходе аргумента через эти значения она меняет знак. Нам будет удобно интерпретировать $P(\varphi)$ как функцию точки окружности C с центром в точке (x_0, y_0) и радиуса, равного 1 (такой радиус выбирается для простоты, чтобы длины дуг совпадали с углами φ).

Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим через $U_1 = U_1(\varepsilon)$ открытый угол, определяемый неравенством $\varphi_1 - \varepsilon < \varphi < \varphi_1 + \varepsilon$, т. е.

$$U_1 = \{(r, \varphi) : \varphi_1 - \varepsilon < \varphi < \varphi_1 + \varepsilon\},$$

соответственно положим

$$U_2 = \{(r, \varphi) : \varphi_2 - \varepsilon < \varphi < \varphi_2 + \varepsilon\};$$

при этом выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы U_1 и U_2 не пересекались и не содержали в себе полуоси ординат, а значит, и вообще вертикальных полупрямых (последнее всегда можно выполнить вследствие условий (41.89)).

Пусть U_1^* и U_2^* — углы, центрально симметричные с U_1 и U_2 относительно точки (x_0, y_0):

$$U_1^* = \{(r, \varphi) : \varphi_1 + \pi - \varepsilon < \varphi < \varphi_1 + \pi + \varepsilon\},$$
$$U_2^* = \{(r, \varphi) : \varphi_2 + \pi - \varepsilon < \varphi < \varphi_2 + \pi + \varepsilon\}.$$

В силу выбора числа ε множества U_1, U_2, U_1^* и U_2^* попарно не пересекаются (рис. 154).

Рассмотрим теперь $P(\varphi)$ как функцию точки вышеуказанной окружности C. Точку окружности C, которой соответствует полярный угол φ, будем для простоты также обозначать через φ. Удалим из указанной окружности интервалы с центрами в точках φ_1, φ_2, $\varphi_1+\pi$ и $\varphi_2+\pi$ длины 2ε*); в силу выбора $\varepsilon>0$ эти интервалы не имеют общих точек. Оставшееся множество, которое обозначим через B, является ограниченным и замкнутым, а следовательно, компактом. На B функция $P(\varphi)$ непрерывна и не обращается в нуль, а поэтому

$$\inf_{\varphi\in B}|P(\varphi)|=\mu>0. \tag{41.91}$$

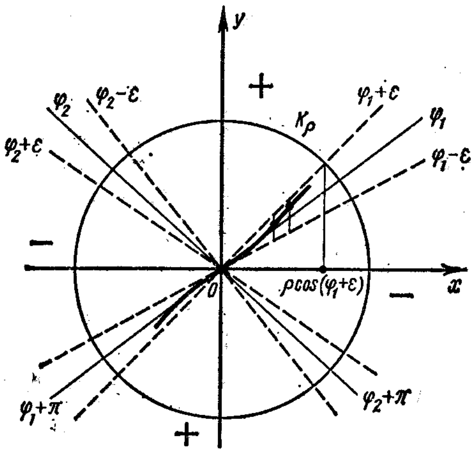

Рис. 154

Обозначим через K_ρ замкнутый круг с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом ρ:

$$K_\rho=\{(r,\ \varphi): 0\leqslant r\leqslant\rho\},$$

а через L_ρ обозначим множество, которое получается вычитанием (в теоретико-множественном смысле, см. п. 1.1) множеств U_1, U_2, U_1^* и U_2^* из круга K_ρ. Очевидно, что в силу (41.91)

$$\inf_{(r,\,\varphi)\in L_\rho}|P(\varphi)|=\mu>0.$$

Теперь, замечая, что из (41.86) следует

$$F(x,\ y)=\frac{r^2}{2}[P(\varphi)+\alpha(r,\ \varphi)], \tag{41.92}$$

где $\lim\limits_{r\to0}\alpha(r,\ \varphi)=0$, выберем $\rho>0$ так, чтобы при $r\leqslant\rho$ выполнялось неравенство

$$|\alpha(r,\ \varphi)|<\mu. \tag{41.93}$$

Тогда из (41.92) следует, что для всех точек $(r,\ \varphi)\in L_\rho$ выражение, стоящее в правой части формулы (41.92), имеет тот же знак, что и $P(\varphi)$.

*) Интервалом длины 2ε на окружности с центром в точке, полярный угол которой равен φ_0, называется множество ее точек, полярные углы φ которых удовлетворяют неравенству $\varphi_0-\varepsilon<\varphi<\varphi_0+\varepsilon$.

Множество L_ρ состоит из четырех замкнутых секторов (см. рис. 154), на каждом из которых, за вычетом их центра, функция $P(\varphi)$, а значит, в силу выбора ρ, и функция $F(x, y)$ принимают значения одного и того же знака, а на соседних секторах — разных.

Рассмотрим теперь угол $U_1 = U_1(\varepsilon)$. Пусть для определенности $0 \leqslant \varphi_1 < \pi/2$. Пересечение замыкания $\overline{U}_1$ угла U_1 с вертикальной прямой $x = x^*$, $x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon)$, представляет собой отрезок, на верхнем и нижнем концах которого функция $F(x^*, y)$ принимает значения разного знака. Функция $F(x^*, y)$, рассматриваемая как функция одного переменного y при фиксированном x^*, будучи непрерывной на указанном отрезке, обращается в некоторой его точке y^* в нуль, т. е. для каждого x^*, где $x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon)$, существует по крайней мере одна точка y^*, такая, что

$$F(x^*, y^*) = 0, \quad (x^*, y^*) \in U_1(\varepsilon) \cap K_\rho. \tag{41.94}$$

Определим $y = f_1(x)$ как функцию, ставящую в соответствие числу x^* число y^*:

$$f_1(x^*) = y^*, \quad x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon).$$

Покажем, что при достаточно малых ε и ρ функция f_1 определена однозначно, т. е. существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$, что при заданном x^* условия (41.94) однозначно определяют y^*. Допустим противное. Возьмем последовательности $\varepsilon_n \to 0$ и $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существуют две последовательности точек с одинаковыми абсциссами x_n и разными ординатами y_n' и y_n'', такие, что

$$(x_n, y_n') \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}, \quad F(x_n, y_n') = 0,$$

$$(x_n, y_n'') \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}, \quad F(x_n, y_n'') = 0.$$

Тогда в силу теоремы Ролля на отрезке $[y_n', y_n'']$ прямой $x = x_n$ найдется точка y_n, такая, что

$$F_y(x_n, y_n) = 0, \tag{41.95}$$

при этом очевидно, $(x_n, y_n) \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}$; по условию (см. (41.79)) мы имели еще

$$F_y(x_0, y_0) = 0. \tag{41.96}$$

По формуле конечных приращений, примененной к функции $F_y(x, y)$,

$$F_y(x_n, y_n) - F_y(x_0, y_0) = F_{yx}(\xi_n, \eta_n)(x_n - x_0) + F_{yy}(\xi_n, \eta_n)(y_n - y_0),$$

$$(\xi_n, \eta_n) \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n},$$

откуда в силу (41.95) и (41.96)

$$F_{xy}(\xi_n, \eta_n)+F_{yy}(\xi_n, \eta_n)\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}=0. \tag{41.97}$$

Пусть $(x_n, y_n)=(r_n, \psi_n)$. Очевидно, $|\psi_n-\varphi_1|<\varepsilon_n$; а поэтому из условия $\varepsilon_n\to 0$ следует, что $\psi_n\to\varphi_1$ при $n\to\infty$, и так как $\operatorname{tg}\psi_n=\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}=\operatorname{tg}\varphi_1=k_1. \tag{41.98}$$

Переходя к пределу в равенстве (41.97) при $n\to\infty$, в силу (41.98) имеем

$$F^0_{xy}+F^0_{yy}k_1=0, \text{ т. е. } k_1=-\frac{F^0_{xy}}{F^0_{yy}};$$

подставляя это значение корня в уравнение (41.84), получим

$$F^0_{xx}F^0_{yy}-F^{0^2}_{xy}=0,$$

что противоречит условию (41.82).

Итак, функция $y=f_1(x)$ действительно однозначно определяется при достаточно малых ε и ρ. В дальнейшем будем предполагать, что ε и ρ выбраны именно таким образом.

Доопределим функцию f_1 в точке x_0, положив $y_0=f_1(x_0)$. Очевидно, по самому определению функции $f_1(x)$ имеем

$$F(x, f_1(x))=0, \quad x_0\leqslant x\leqslant x_0+\rho\cos(\varphi_1+\varepsilon).$$

Покажем, что в точке x_0 у функции $f_1(x)$ существует правосторонняя производная и что она равна k_1. Пусть произвольно фиксировано $\varepsilon>0$. Из вышеизложенного следует существование такого $\rho=\rho(\varepsilon)>0$, что соответствующая часть графика функции $f_1(x)$ целиком лежит в $U_1(\varepsilon)\cap K_\rho$:

$$(x, f_1(x))\in U_1(\varepsilon)\cap K_\rho, \quad x_0\leqslant x\leqslant x_0+\rho\cos(\varphi_1+\varepsilon). \tag{41.99}$$

Возьмем $\delta=\rho\cos(\varphi_1+\varepsilon)$ и пусть x таково, что $0<x-x_0<\delta$, $y=f_1(x)$ и $(x, y)=(r, \varphi)$. В силу (41.99) имеем $|\varphi-\varphi_1|<\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0+0}\varphi=\varphi_1$ и поэтому $\lim\limits_{x\to x_0+0}\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\varphi_1$. Поскольку $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y-y_0}{x-x_0}$, то из доказанного следует, что

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\operatorname{tg}\varphi_1,$$

т. е. у функции $f_1(x)$ существует производная справа в точке x_0, равная $\operatorname{tg}\varphi_1=k_1$.

Подобным же образом из рассмотрения поведения функции $F(x, y)$ в угле U_1^* доказывается, что при некотором $\delta'>0$ на отрезке $[x_0-\delta', x_0]$ существует функция $f_1(x)$ такая, что при $x_0-\delta' \leqslant x \leqslant x_0$:

$F(x, f_1(x))=0$, $(x, f_1(x)) \in U_1^*$, $f_1'(x_0)=k_1$ (под производной, естественно, в данном случае понимается левосторонняя производная).

Если число ρ взять столь малым, чтобы в круговой окрестности радиуса ρ точки (x_0, y_0) не содержалось других особых точек уравнения (41.77), кроме (x_0, y_0), то функция $f_1(x)$ будет дифференцируемой и во всех точках $x \neq x_0$. Это сразу следует из доказанной выше теоремы о неявных функциях (см. теорему 1 в п. 41.1). В результате мы и получили функцию $f_1(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0 и обладающую всеми требуемыми свойствами.

Аналогично доказывается существование функции $f_2(x)$, также являющейся решением уравнения (41.77) и удовлетворяющей условиям теоремы, причем график этой функции проходит в углах U_2 и U_2^* и через точку (x_0, y_0).

Если $F_{yy}^0=0$, а $F_{xx}^0 \neq 0$, то все рассмотрения проводятся аналогичным образом; следует только поменять местами роль осей Ox и Oy, так что в результате получим решения уравнения (41.77) в виде функций от переменной $y: f_1(y)$ и $f_2(y)$.

Если, наконец, $F_{xx}^0=F_{yy}^0=0$ и, значит, $F_{xy}^0 \neq 0$, то проще всего выполнить замену переменных: $x=\xi+\eta$, $y=\xi-\eta$ (повернуть оси координат на угол $\pi/4$). Тогда (как легко убедиться непосредственно дифференцированием)

$$F_{\xi\xi}^0=-F_{\eta\eta}^0=2F_{xy}^0 \neq 0, \quad F_{\xi\eta}^0=0,$$

т. е. в новой координатной системе получим уже изученный случай. В частности, уравнение (41.84) для угловых коэффициентов касательных в особой точке в координатной системе ξ, η имеет вид

$$k^2-1=0,$$

и, значит, $k_{1,2}=\pm 1$. Иначе говоря, биссектрисы координатных углов, являющиеся координатными осями в старой системе координат x, y, суть касательные к графикам двух функций, которые определяются уравнением (41.77) в некоторой окрестности рассматриваемой особой точки. $\square$

Если уравнение $F(x, y)=0$ является неявным представлением какой-либо кривой, то в особой точке (x_0, y_0) этого уравнения кривая может (хотя и не обязана) иметь какие-либо особенности, т. е. в окрестности особой точки этого уравнения кривая, вообще говоря, не является графиком некоторой гладкой однозначной функции.

Следует напомнить также, что множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (41.77), вообще говоря, не является всегда кривой в смысле данного ранее определения кривой (см. п. 16.2*), задаваемой параметрически.

Примеры. 1. Пусть дано уравнение $y^2(x^2+y^2+1)=0$. Здесь $F(x, y)=y^2(x^2+y^2+1)$, а поэтому $F_x=2xy^2$, $F_y=2x^2y+4y^3+2y$. Условия наличия особой точки (41.78) и (41.79) дают в этом случае

$$x_0=0, \quad y_0=0.$$

Таким образом, особой точкой является (0, 0). Однако в этой точке кривая, определяемая уравнением, не имеет особенности, так как оно (множитель x^2+y^2+1 нигде не обращается в нуль) равносильно уравнению $y=0$ и рассматриваемая кривая является графиком явной функции $y=f(x)\equiv 0$. Отметим, что, как легко убедиться, в этом случае в точке (0, 0)

$$F_{xx}F_{yy}-F_{xy}^2=0. \tag{41.100}$$

2. Для уравнения

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)=0. \tag{41.101}$$

условия (41.79) превращаются в следующую систему уравнений:

$$2x^3+2xy^2-x=0,$$
$$2y^3+2x^2y-y=0.$$

Сложив и вычтя эти уравнения, получим систему

$$(x+y)(2x^2+2y^2-1)=0$$
$$(x-y)(2x^2+2y^2-1)=0.$$

Отсюда либо $x=y=0$, либо $2x^2+2y^2-1=0$, однако точка (x, y), координаты которой удовлетворяют последнему соотношению, не является корнем уравнения (41.101) $\left(\text{для нее } x^2+y^2=\frac{1}{2},\right.$ и, значит, ни один из сомножителей левой части (41.101) не обращается в ноль$\left.\right)$.

Таким образом, единственной особой точкой является (0, 0). Легко проверить, что здесь выполняется условие (41.81), и, значит, точка (0, 0) является изолированным корнем уравнения (41.101). Геометрически, как это сразу видно, уравнение (41.101) задает единичную окружность и ее центр (0, 0) (это множество, очевидно, не является носителем никакой кривой, заданной параметрически в смысле п. 16.2*).

3. Для уравнения

$$x^3+y^3-3axy=0 \tag{41.102}$$

условия (41.79) наличия особой точки приводят к системе уравнений

$$x^2-ay=0,$$
$$y^2-ax=0,$$

откуда либо $x=y=0$, и эта точка удовлетворяет уравнению (41.102), либо $x=a$, $y=a$, но координаты этой точки не являются решением уравнения (41.102). Снова здесь (0, 0) — единственная особая точка. Нетрудно убедиться, что при этом выполняются условия (41.82), и, значит, (0, 0) является двойной точкой.

Геометрически для кривой, неявным представлением которой является уравнение (41.102) (она называется декартов лист, и мы с ней уже встречались в п. 14.5); точка (0, 0) является точкой *самопересечения* (см. рис. 61 в первом томе).

4. Для уравнения

$$y^2-x^3=0 \tag{41.103}$$

(0, 0) является особой точкой; в ней выполняется уже условие (41.100), и тем самым в этом случае не выполняются условия теоремы 6. Геометрически кривая, выражаемая уравнением (41.103) и называемая полукубической параболой $y=\pm x^{3/2}$, имеет в точке (0, 0) касательную и расположена в окрестности этой точки по одну сторону от нормали.

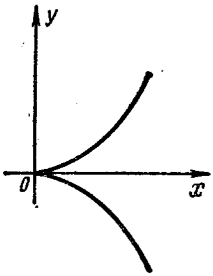

Рис. 155

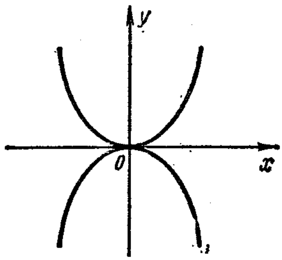

Рис. 156

Точки такого типа называются *точками возврата* (рис. 155).

5. Для уравнения

$$y^2-x^4=0 \tag{41.104}$$

(0, 0) также является особой точкой, и снова здесь выполняется условие (41.100). Уравнение (41.104), очевидно, распадается на два уравнения: $y=x^2$ и $y=-x^2$, которые задают две параболы, имеющие в точке (0, 0) общую касательную.

Особые точки, в некоторой окрестности которых уравнение (41.77) задает две непрерывно дифференцируемые кривые, имеющие в точке (x_0, y_0) общую касательную, называются *точками самоприкосновения* (рис. 156) этих двух кривых.

Может случиться, что при выполнении условия (41.100) особая точка окажется изолированным решением уравнения (41.77), или его двойной точкой.

В заключение дадим некоторые пояснения к уравнению (41.84). Если (x_0, y_0) — особая точка уравнения (41.77), то после параллельного переноса начала координат в точку (x_0, y_0) уравнение (41.77) примет вид

$$F_{xx}^0 x^2 + 2F_{xy}^0 xy + F_{yy}^0 y^2 + o(x^2 + y^2) = 0, \qquad (41.105)$$

(здесь через x и y обозначены координаты точки в новой системе координат, а индексом 0 наверху обозначены значения частных производных в точке (0, 0) этой системы), откуда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка наше уравнение можно записать следующим образом:

$$F_{xx}^0 x^2 + 2F_{xy}^0 xy + F_{yy}^0 y^2 = 0. \qquad (41.106)$$

В случае выполнения условия (41.82) левая часть уравнения (41.106) распадается на два действительных множителя, каждый из которых, приравненный нулю, и дает касательные к двум ветвям кривой в точке (0, 0) (см. (41.84)). В случае же выполнения условия (41.81) левая часть уравнения (41.106) распадается на два комплексных множителя: «касательные мнимы». Это естественно, так как здесь говорить о касательной не имеет смысла, ибо в этом случае особая точка является изолированной.

Это замечание особенно удобно использовать для определения характера особой точки в случае алгебраической кривой, т. е. кривой, заданной уравнением

$$P(x, y) = 0, \qquad (41.107)$$

где $P(x, y)$—многочлен от двух переменных x и y. Если (0, 0)—особая точка этого уравнения, то из условий (41.78) и (41.79) следует, что этот многочлен не содержит ни свободного члена, ни членов первого порядка, т. е. уравнение (41.107) имеет вид

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + Q(x, y) = 0,$$

где $Q(x, y)$ — многочлен, все члены которого по крайней мере третьего порядка. Характер поведения решений этого уравнения определяется его главной частью, т. е. уравнением

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

которое является уравнением (41.106) для данного случая ибо, как легко видеть, здесь

$$a = F_{xx}^0, \quad b = F_{xy}^0 \text{ и } c = F_{yy}^0.$$

Если же точка (0, 0) удовлетворяет уравнению (41.107), но не является особой, то (41.107) имеет вид

$$Ax + By + R(x, y) = 0, \quad A^2 + B^2 > 0,$$

где $R(x, y)$ — многочлен, все члены которого имеют порядок не ниже второго. Из теоремы о неявных функциях (см. теорему 1 в п. 41.1) следует, что уравнение

$$Ax+By=0$$

является в этом случае уравнением касательной в точке (0, 0) к графику решения уравнения (41.107).

Упражнения. Исследовать поведение каждой из следующих кривых в окрестности ее особых точек; найти касательные в особой точке.

13. $y^2=x^2+x^3$.
14. $y^2=x^2-x^3$.
15. $y^2=x^2-x^4$.
16. $(x^2-9)\,y^2=x^4$.
17. $y^2=x\,(x-3)^2$.
18. $y\,(y-2)^2=x^2$.
19. $4y^2=x^5+5x^4$.
20. $(x^2-y^2)\,y=x^4$.
21. $(y-x^2)^2=x^5$.

41.10. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Часто в различных вопросах математического анализа и в его приложениях при изучении той или иной формулы, содержащей какие-либо функции и их производные (обыкновенные или частные), оказывается целесообразным перейти к другим независимым переменным, а иногда и к другим функциям, которые связаны с функциями, входящими в рассматриваемую формулу, определенными соотношениями. Все эти преобразования делаются на основании правил дифференцирования сложных и неявных функций. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть $u=u(x, y)$. Преобразуем выражения

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

к полярным координатам r и φ. Первое из этих выражений является квадратом длины градиента ∇u функции u, т. е. равно $|\nabla u|^2$, а второе имеет специальное обозначение Δu:

$$|\nabla u|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad (41.108)$$

$$\Delta u \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \qquad (41.109)$$

Символ Δ, указывающий на применение к функции u операции (41.109), называется *оператором Лапласа* *).

Из формул, связывающих декартовые координаты с полярными,

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi, \qquad (41.110)$$

находим:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi. \qquad (41.111)$$

*) П. Лаплас (1749—1827) — французский механик и математик.

Применим формулы дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\varphi.$$

Разрешим эти равенства относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r} \qquad (41.112)$$

и подставим получившиеся выражения в (41.108):

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Теперь перейдем к вычислению выражения (41.109). Продифференцируем формулы (41.110) сначала по x, затем по y:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial x} - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ 0 &= \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 0 &= \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial y} - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ 1 &= \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned}\right\}$$

Разрешим получившиеся системы относительно $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}. \qquad (41.113)$$

Продифференцируем теперь формулы (41.72) по x и y; тогда, использовав (41.113), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Подставив получившиеся выражения в (41.109), будем иметь

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

В случае, когда в преобразуемое выражение входит не одна, а несколько производных данного порядка, удобно применять метод вычисления не производных, а дифференциалов. Например, считая независимыми переменными x и y, найдем выражения для дифференциалов dr и $d\varphi$. Из формул (41.110) имеем

$$dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi,\quad dy=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi,$$

отсюда

$$dr=\cos\varphi\,dx+\sin\varphi\,dy,\quad d\varphi=-\frac{\sin\varphi}{r}dx+\frac{\cos\varphi}{r}dy \tag{41.114}$$

(отметим, что из этих формул также сразу получаются формулы (41.113)).

Для функции $u=u(x,\ y)$ имеем

$$du=\frac{\partial u}{\partial r}dr+\frac{\partial u}{\partial\varphi}d\varphi=$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)dx+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)dy. \tag{41.115}$$

В выражении для дифференциала du коэффициенты dx и dy являются производными $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, поэтому из (41.115) сразу получаются обе формулы (41.112). Найдем далее вторые дифференциалы d^2r и $d^2\varphi$ из (41.114):

$$d^2r=-\sin\varphi d\varphi\,dx+\cos\varphi\,d\varphi\,dy=$$
$$=\frac{\sin^2\varphi\,dx^2-2\cos\varphi\sin\varphi\,dx\,dy+\cos^2\varphi\,dy^2}{r},$$

$$d^2\varphi=-\left(\frac{\cos\varphi}{r}dx+\frac{\sin\varphi}{r}dy\right)d\varphi+\left(\frac{\sin\varphi}{r^2}dx-\frac{\cos\varphi}{r^2}dy\right)dr=$$
$$=\frac{2\cos\varphi\sin\varphi\,dx^2-2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,dx\,dy-2\cos\varphi\sin\varphi\,dy^2}{r^2}.$$

Теперь из (41.115) для d^2u получим

$$d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}dr^2+2\frac{\partial^2u}{\partial r\,\partial\varphi}dr\,d\varphi+\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}d\varphi^2+\frac{\partial u}{\partial r}d^2r+\frac{du}{\partial\varphi}d^2\varphi=$$
$$=\left(\cos^2\varphi\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2u}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)dx^2+2(\ldots)\,dx\,dy+(\ldots)\,dy^2.$$

Отсюда и получаются выражения для вторых производных $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$ как соответственно коэффициенты при dx^2, $2dx\,dy$ и dy^2.

Аналогичные методы применимы, конечно, и в случае, когда производится какая-либо другая замена переменных $x=x(u,\ v)$,

$y = y(u, v)$, когда имеются производные высших порядков, а также когда речь идет о функциях большего числа переменных.

Упражнение 22. Преобразовать выражение $|\nabla u|^2$, где $u = u(x, y)$, к ортогональным координатам ξ, η, т. е. таким координатам, что

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0.$$

23. Преобразовать уравнение $y'' - xy'^3 + e^y y'^3 = 0$, приняв y за новую независимую переменную, а x — за функцию от y.

24. В уравнении $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ перейти к новым независимым переменным $u = x + y$, $v = x - y$.

25. В выражении $\frac{1}{2} z\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{1}{2} z\left(\frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y^3}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ перейти к переменным u, v, $w = w(u, v)$, если $u = x^2$, $v = y^2$, $w = z^2$ $\left(\text{ответ: } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)$.

Задача 27. В n-мерном пространстве преобразовать выражение $|\nabla u|^2$, где $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, к ортогональным координатам $\xi_1, \ldots, \xi_n$, т. е. таким координатам, что при $i \neq k$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

§ 42. ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ

2.1. ПОНЯТИЕ ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ

Определение 1. *Пусть на открытом множестве $G \subset R^n$ заданы непрерывно дифференцируемые функции*

$$y_i = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in G. \tag{42.1}$$

Если существуют открытое множество D в пространстве $R^{m-1}_{y_1, \ldots, y_{m-1}}$ и непрерывно дифференцируемая на D функция $\Phi(y_1, \ldots, y_{m-1})$, такие, что в любой точке $x \in G$ выполняются условия $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)) \in D$ и $\Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)) = \varphi_m(x)$, то функция φ_m называется зависимой на множестве G от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$.

Определение 2. *Если среди функций системы* (42.1) *есть функция, зависимая от остальных на множестве G, то эта система называется зависимой на множестве G.*

Если ни одна функция системы (42.1) *не зависит от остальных на множестве G, то эта система называется независимой на G.*