$y=y(u, v)$, когда имеются производные высших порядков, а также когда речь идет о функциях большего числа переменных.

Упражнение 22. Преобразовать выражение $|\nabla u|^2$, где $u=u(x, y)$, к ортогональным координатам ξ, η, т. е. таким координатам, что

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}=0.$$

23. Преобразовать уравнение $y''-xy'^3+e^y y'^3=0$, приняв y за новую независимую переменную, а x — за функцию от y.

24. В уравнении $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ перейти к новым независимым переменным $u=x+y$, $v=x-y$.

25. В выражении $\frac{1}{2}z\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]-$ $-\frac{1}{2}z\left(\frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y^3}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ перейти к переменным u, v, $w=w(u, v)$, если $u=x^2$, $v=y^2$, $w=z^2$ $\left(\text{ответ: } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)$.

Задача 27. В n-мерном пространстве преобразовать выражение $|\nabla u|^2$, где $u=u(x_1, \ldots, x_n)$, к ортогональным координатам $\xi_1, \ldots, \xi_n$, т. е. таким координатам, что при $i \neq k$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}=0, \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

§ 42. ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ

2.1. ПОНЯТИЕ ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ

Определение 1. *Пусть на открытом множестве $G \subset R^n$ заданы непрерывно дифференцируемые функции*

$$y_i=\varphi_i(x), \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad x=(x_1, \ldots, x_n) \in G. \tag{42.1}$$

Если существуют открытое множество D в пространстве $R^{m-1}_{y_1, \ldots, y_{m-1}}$ и непрерывно дифференцируемая на D функция $\Phi(y_1, \ldots, y_{m-1})$, такие, что в любой точке $x \in G$ выполняются условия $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)) \in D$ и $\Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x))=\varphi_m(x)$, то функция φ_m называется зависимой на множестве G от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$.

Определение 2. *Если среди функций системы* (42.1) *есть функция, зависимая от остальных на множестве G, то эта система называется зависимой на множестве G.*

Если ни одна функция системы (42.1) *не зависит от остальных на множестве G, то эта система называется независимой на G.*

Иногда для краткости вместо выражения «зависимая (независимая) система функций» будем просто говорить «зависимые (соответственно независимые) функции».

В вопросе зависимости системы функций (42.1) фундаментальную роль играет матрица Якоби этой системы

$$\left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\|, \quad i=1, 2, \ldots, m; \quad j=1, 2, \ldots, n, \tag{42.2}$$

i — номер строчки, j — номер столбца.

Теорема 1 (необходимое условие зависимости функций). *Пусть $m \leqslant n$ и система функций* (42.1) *зависима на открытом множестве G. Тогда в любой точке этого множества ранг матрицы Якоби* (42.2) *) *этой системы меньше m.*

Доказательство. По условию, система функций (42.1) зависима на G, т. е. по крайней мере одна из этих функций зависит от остальных. Пусть для определенности φ_m зависит от $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$:

$$\varphi_m(x) = \Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)), \quad x \in G,$$

где Φ — непрерывно дифференцируемая функция от $(m-1)$ аргументов $y_1, \ldots, y_{m-1}$. Отсюда

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad \text{для всех } j=1, 2, \ldots, n.$$

Эта формула показывает, что m-я строка матрицы Якоби (42.2) в каждой точке $x \in G$ является линейной комбинацией остальных строк этой матрицы, и, значит, ранг матрицы Якоби (42.2) меньше m в каждой точке $x \in G$. $\square$

Следствие 1. *Пусть $m = n$ и система функций* (42.1) *зависима на G. Тогда ее якобиан $\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ равен нулю во всех точках множества G.*

Следствие 2 (достаточные условия независимости функций). *Пусть $m \leqslant n$ и пусть ранг матрицы Якоби* (42.2) *хоть в одной точке открытого множества G равен m. Тогда система* (42.1) *независима на множестве G.*

Следствие 1 получается сразу из доказанной теоремы при $m = n$.

Следствие 2 легко доказывается от противного.

Поскольку строки матрицы Якоби (42.2) являются координатами градиентов функций (42.1), то теорему 1 можно перефразировать следующим образом.

---

*) Напомним, что рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строк. Это число совпадает с максимальным порядком минора этой матрицы, не равного нулю.

Если система функций (42.1) *зависима в области* G, *то градиенты* $\nabla\varphi_1, \ldots, \nabla\varphi_m$ *этих функций линейно зависимы в каждой точке* G.

42.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИЙ

В этом пункте сохраним обозначения предыдущего пункта и будем, как и раньше, предполагать, что функции (42.1) непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset R^n$.

Теорема 2 (достаточные условия зависимости функций). *Пусть ранг матрицы Якоби* (42.2) *системы функций* (42.1) *в каждой точке открытого множества* G *не превышает числа* r, $r < m \leqslant n$, *а в некоторой точке* $x^{(0)} \in G$ *равен* r, *иначе говоря, существуют такие переменные* $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ *и функции* $y_{i_1} = \varphi_{i_1}(x), \ldots, y_{i_r} = \varphi_{i_r}(x)$, *что*

$$\left.\frac{\partial(y_{i_1}, \ldots, y_{i_r})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, v_{j_r})}\right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{42.3}$$

Тогда все r *функций, входящих в условие* (42.3), *независимы на множестве* G *и существует окрестность точки* $x^{(0)}$, *такая, что любая из оставшихся* $m - r$ *функций зависит на этой окрестности от указанных* r *функций.*

Доказательство. Пусть для простоты записи условие (42.3) имеет вид

$$\left.\frac{\partial(y_1, \ldots, y_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0 \tag{42.4}$$

(этого всегда можно добиться, перенумеровав в случае необходимости функции и аргументы системы (42.1) в нужном порядке). Согласно следствию 2 из теоремы 1 п. 42.1., функции $y_1, \ldots, y_r$ независимы в G.

Покажем, что каждая из остальных зависит от них в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Пусть $y_i^{(0)} = \varphi_i(x^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Рассмотрим систему первых r функций системы (42.1):

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_r = \varphi_r(x_1, \ldots, x_n). \end{gathered} \tag{42.5}$$

Прежде всего выберем такое η_0, чтобы всякая точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащая η_0-кубической окрестности точки $x^{(0)}$, т. е. всякая точка x, для которой $|x_i - x_i^{(0)}| < \eta_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, принадлежала множеству $G : x \in G$. Это всегда возможно в силу его открытости.

Далее, в силу условия (42.4) и теоремы о неявных функциях (см. п. 41.3) система (42.5) разрешима относительно переменных

$x_1, \ldots, x_r$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= f_r(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{42.6}$$

При этом функции $f_1, \ldots, f_r$ определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Более подробно (если в качестве окрестностей брать кубические окрестности) это означает следующее: можно выбрать такие числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$, причем для удобства взять их меньшими η_0: $\delta < \eta_0$, $\eta < \eta_0$, что если через U обозначить кубическую окрестность точки $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, задаваемую неравенствами

$$|y_i - y_i^{(0)}| < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad |x_j - x_j^{(0)}| < \delta, \quad j = r+1, \ldots, n,$$

то

1) на окрестности U функции f_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ определены и непрерывно дифференцируемы;

2) для всех точек $(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) \in U$ справедливы неравенства

$$|f_k(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) - x_k^{(0)}| < \eta, \qquad k = 1, 2, \ldots, r;$$

3) на окрестности U выполняются равенства

$$\varphi_i(f_1, \ldots, f_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

где под f_k, $k = 1, \ldots, r$, понимаются правые части равенств (42.6).

Рассмотрим композицию функций (42.6) и $\varphi_{r+1}(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. функцию

$$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(f_1, \ldots, f_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \tag{42.7}$$

где $f_k = f_k(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$, $k = 1, \ldots, r$. Эта сложная функция заведомо определена и непрерывно дифференцируема на указанной выше кубической окрестности U точки

$$(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Покажем, что на самом деле функция (42.7) в этой окрестности U не зависит от переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$, т. е. не меняется при их изменении, и тем самым является фактически лишь функцией переменных $y_1, \ldots, y_r$. Для этого достаточно показать, что для функции (42.7) на окрестности U выполняется равенство

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} = 0, \qquad j = r+1, \ldots, n \tag{42.8}$$

(см. п. 20.4 или формулу конечных приращений Лагранжа в п. 39.2, из которой сразу следует достаточность условия (42.8) для независимости функции от переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в выпуклой области, а следовательно, и в кубической окрестности).

Для доказательства равенства (42.8) зафиксируем одно из j ($j=r+1, \ldots, n$) и координаты x_k с индексами k, принимающими значения $r+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, обозначив их через x_k^*, причем выберем x_k^* так, чтобы $|x_k^*-x_k^{(0)}|<\delta$, $k=r+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$.

Рассмотрим отображение

$$\begin{gathered} y_1=y_1, \\ \cdots \\ y_r=y_r, \end{gathered} \tag{42.9}$$

$$y_{r+1}=\varphi_{r+1}(f_1^*, \ldots, f_r^*, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*),$$

где $f_k^*=f_k(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*)$, кубической окрестности $U^{(j)}$ точки $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_j^{(0)})$, задаваемой неравенствами

$$|y_k-y_k^{(0)}|<\delta, \quad k=1, 2, \ldots, r, \quad |x_j-x_j^{(0)}|<\delta.$$

Символически, чтобы подчеркнуть, какие именно переменные меняются, изобразим отображение (42.9) в виде

$$(y_1, \ldots, y_r, x_j) \to (y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}).$$

Это отображение непрерывно дифференцируемо на $U^{(j)}$; его матрица Якоби имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial y_{r+1}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial y_{r+1}}{\partial y_2} & & \dfrac{\partial y_{r+1}}{\partial y_r} & \dfrac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} \end{Vmatrix}$$

и потому

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})}{\partial(y_1, \ldots, y_r, x_j)}=\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j}, \tag{42.10}$$

т. е. якобиан рассматриваемого отображения равен интересующей нас производной.

На окрестности $U^{(j)}$ это отображение можно представить в виде композиции двух отображений: непрерывно дифференцируемого отображения

$$\begin{gathered} x_1=f_1(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=f_r(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*), \\ x_j=x_j \end{gathered}$$

окрестности $U^{(j)}$ и непрерывно дифференцируемого отображения

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_r, x^*_{r+1}, \ldots, x^*_{j-1}, x_j, x^*_{j+1}, \ldots, x^*_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_r = \varphi_r(x_1, \ldots, x_r, x^*_{r+1}, \ldots, x^*_{j-1}, x_j, x^*_{j+1}, \ldots, x^*_n),$$
$$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(x_1, \ldots, x_r, x^*_{r+1}, \ldots, x^*_{j-1}, x_j, x^*_{j+1}, \ldots, x^*_n)$$

окрестности точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, x_j^{(0)})$, задаваемой неравенствами

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \eta, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad |x_j - x_j^{(0)}| < \delta.$$

В силу выбора чисел δ и η композиция этих отображений, которую для наглядности можно символически изобразить в виде

$$(y_1, \ldots, y_r, x_j) \to (x_1, \ldots, x_r, x_j) \to (y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}),$$

определена и непрерывно дифференцируема на окрестности $U^{(j)}$. Первое из этих отображений непрерывно дифференцируемо в окрестности $U^{(j)}$ точки $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_j^{(0)})$, а второе непрерывно дифференцируемо в соответствующей окрестности точки $(x_1^{(0)}, \ldots$ $\ldots, x_r^{(0)}, x_j^{(0)})$. Поэтому из (42.10) и из свойств якобианов отображений (см. п. 41.7) имеем

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})}{\partial(y_1, \ldots, y_r, x_j)} = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_r, x_j)} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_r, x_j)}{\partial(y_1, \ldots, y_r, x_j)} \qquad (42.11)$$

В силу условия теоремы ранг матрицы Якоби на множестве G меньше или равен r, следовательно,

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_r, x_j)} = 0$$

всюду на G. Поэтому из (42.11) сразу следует, что для любой точки $(y_1, \ldots, y_r, x_j) \in U^{(j)}$ и, следовательно, для любой точки

$$(y_1, \ldots, y_r, x^*_{r+1}, \ldots, x^*_{j-1}, x_j, x^*_{j+1}, \ldots, x^*_n) \in U$$

справедливо равенство (42.8). Поскольку координаты x^*_k были фиксированы произвольным образом, лишь бы $|x^*_k - x_k^{(0)}| < \delta$; $k = r+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, то это означает, что равенство (42.8) справедливо на всей окрестности U.

Таким образом, функция (42.7) зависит только от переменных $y_1, \ldots, y_r$. Обозначив ее символом Φ, получим

$$\varphi_{r+1}(f_1, \ldots, f_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = \Phi(y_1, \ldots, y_r).$$

Выберем теперь так δ_0, $\delta_0 < \delta$ и $\delta_0 < \eta$, чтобы при $|x_i - x_i^{(0)}| <$ $< \delta_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, выполнялись бы неравенства

$$|y_i - y_i^{(0)}| < \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Это возможно в силу непрерывности функций $y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, системы (42.5) в точке $x^{(0)}$.

В силу доказанного для любой точки x δ_0-кубической окрестности точки $x^{(0)}$, т. е. для любой такой точки $x=(x_1, \ldots, x_n)$, что

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \delta_0, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

будет справедливо тождество

$$\varphi_{r+1}(x) = \Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)),$$

т. е. в указанной окрестности точки $x^{(0)}$ функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}$ зависимы.

Аналогично доказывается и зависимость каждой из функций $\varphi_{r+2}, \ldots, \varphi_m$ от $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. $\square$

Аналогично необходимому условию зависимости функций достаточные условия также можно сформулировать в терминах градиентов. Для простоты ограничимся случаем $r=m-1$.

Если градиенты $\nabla\varphi_1, \ldots, \nabla\varphi_m$ линейно зависимы во всех точках области G, то какова бы ни была точка $x \in G$, в которой $m-1$ из указанных градиентов линейно независимы, существует ее окрестность, в которой функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ зависимы. При этом, если, например, градиенты $\nabla\varphi_1, \ldots, \nabla\varphi_{m-1}$ линейно независимы в рассматриваемой точке, и, следовательно, градиент $\nabla\varphi_m$ в этой точке является их линейной комбинацией, то в указанной окрестности функция φ_m зависит от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$.

Следует обратить внимание на то, что достаточные условия зависимости функций, установленные в этом пункте, имеют локальный характер в отличие от результатов предшествующего пункта, имеющих глобальный характер. Это означает следующее: если система m непрерывно дифференцируемых функций (42.1) зависима на открытом множестве $G \subset R^n$, то согласно теореме 1 п. 42.1 в каждой точке этого множества ранг матрицы Якоби этой системы меньше m (соответственно если хотя бы в одной точке множества G ранг рассматриваемой матрицы равен m, то система независима на всем множестве G). Что же касается теоремы 2 настоящего пункта, то она утверждает лишь, что если в какой-то точке $x^{(0)} \in G$ выполняются условия этой теоремы, то только на некоторой окрестности этой точки (а не на всем множестве G) данная система функций является зависимой системой. Таким образом, действительно, утверждение теоремы 2 имеет локальный характер.

Добавим еще, что если в каждой точке $x^{(0)}$ открытого множества G выполняются условия теоремы 2, то, конечно, в этом случае в некоторой окрестности каждой точки рассматриваемая система функций будет зависимой. Однако теорема 2 не гарантирует, что эта зависимость будет одной и той же во всех указанных окрестностях, т. е. из теоремы 2 не следует, что в разных точках одни и те же функции будут зависимыми от других и что функции Φ, «осуществляющие» зависимости одних и тех же функций, рассматриваемых на разных окрестностях, будут совпадать в точках пересечения этих окрестностей. Следовательно, из теоремы 2 не следует, что система функций, удовлетворяющая условиям этой теоремы во всех точках $x^{(0)}$ множества G, будет зависимой на всем множестве G в целом, в едином смысле, т. е. в смысле определения 1. Это и означает, что теорема 2 не имеет глобального характера.

Заметим, что существует несколько более общий подход к понятию зависимости функций, позволяющий построить глобальную теорию этого вопроса, однако мы не будем на этом останавливаться.

Пример. Рассмотрим систему функций

$$u = \sin(x+y),$$
$$v = \cos(x+y). \tag{42.12}$$

Якобиан этой системы равен нулю на всей плоскости

$$\begin{vmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{vmatrix} = 0,$$

и, как легко видеть, ранг матрицы Якоби этой системы равен единице во всех точках плоскости.

Согласно теореме 2, функции (42.12) зависимы в окрестности каждой точки плоскости. В данном случае зависимость функций легко находится в явном виде, например на открытом множестве точек (x, y), для которых $\cos(x+y) > 0$, она может быть задана формулой $v = \sqrt{1-u^2}$.

Упражнения 1. Пусть $u = x^2+y^2+z^2$, $v = xy+yz+zx$, $w = x+y+z$. Доказать, что функции u, v, w зависимы и найти уравнение, выражающее их зависимость.

2. Исследовать вопрос о зависимости функций $u = \xi^3+\eta^3+\zeta^3$, $v = \xi\eta\zeta$, $w = \xi^2+\eta^2+\zeta^2$, $z = \xi\eta+\eta\zeta+\zeta\xi$.

Задача 28. Функция $u = u(x, y)$ называется гармонической в плоской области, если во всех точках этой области она удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ (см. (41.109)). Доказать, что две гармонические функции зависимы в плоской области тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

§ 43. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

43.1. ПОНЯТИЕ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Пусть на открытом множестве $G \subset R^n$ заданы функции

$$y_i = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.1}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$. Обозначим через E множество точек $x \in G$, в которых все функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, обращаются в ноль:

$$E = \{x : f_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, m, \ x \in G\}. \tag{43.2}$$

Уравнения

$$f_i(x) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.3}$$

будем называть *уравнениями связи*.