дать в точках пересечения этих окрестностей. Следовательно, из теоремы 2 не следует, что система функций, удовлетворяющая условиям этой теоремы во всех точках $x^{(0)}$ множества G, будет зависимой на всем множестве G в целом, в едином смысле, т. е. в смысле определения 1. Это и означает, что теорема 2 не имеет глобального характера.

Заметим, что существует несколько более общий подход к понятию зависимости функций, позволяющий построить глобальную теорию этого вопроса, однако мы не будем на этом останавливаться.

Пример. Рассмотрим систему функций

$$u = \sin(x+y),$$
$$v = \cos(x+y). \tag{42.12}$$

Якобиан этой системы равен нулю на всей плоскости

$$\begin{vmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{vmatrix} = 0,$$

и, как легко видеть, ранг матрицы Якоби этой системы равен единице во всех точках плоскости.

Согласно теореме 2, функции (42.12) зависимы в окрестности каждой точки плоскости. В данном случае зависимость функций легко находится в явном виде, например на открытом множестве точек (x, y), для которых $\cos(x+y) > 0$, она может быть задана формулой $v = \sqrt{1-u^2}$.

Упражнения 1. Пусть $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = xy + yz + zx$, $w = x + y + z$. Доказать, что функции u, v, w зависимы и найти уравнение, выражающее их зависимость.

2. Исследовать вопрос о зависимости функций $u = \xi^3 + \eta^3 + \zeta^3$, $v = \xi\eta\zeta$, $w = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, $z = \xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi$.

Задача 28. Функция $u = u(x, y)$ называется гармонической в плоской области, если во всех точках этой области она удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ (см. (41.109)). Доказать, что две гармонические функции зависимы в плоской области тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

§ 43. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

43.1. ПОНЯТИЕ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Пусть на открытом множестве $G \subset R^n$ заданы функции

$$y_i = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.1}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$. Обозначим через E множество точек $x \in G$, в которых все функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, обращаются в ноль:

$$E = \{x : f_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, m, \ x \in G\}. \tag{43.2}$$

Уравнения

$$f_i(x) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.3}$$

будем называть *уравнениями связи.*

Определение 1. *Пусть на G задана функция $y=f_0(x)$. Точка $x^{(0)}\in E$ называется точкой условного экстремума *) функции $f_0(x)$ относительно (или при выполнении) уравнений связи* (43.3), *если она является точкой обычного экстремума этой функции, рассматриваемой только на множестве E* (см. п. 40.1).

Иначе говоря, здесь значение функции $f_0(x)$ в точке $x^{(0)}$ сравнивается не со всеми ее значениями в достаточно малой окрестности этой точки, а только со значениями в точках, принадлежащих одновременно указанной достаточно малой окрестности и множеству E. Как и в случае обычных экстремумов, можно, естественно, рассматривать точки просто условного экстремума и точки строго условного экстремума.

Примеры. 1. Рассмотрим функцию

$$f(x,\ y)=x^2+y^2 \qquad (43.4)$$

и уравнение связи

$$x+y-1=0. \qquad (43.5)$$

Найдем условный экстремум функции (43.4) при выполнении уравнения связи (43.5). Из (43.5) имеем $y=1-x$, откуда

$$f(x,\ 1-x)=2x^2-2x+1.$$

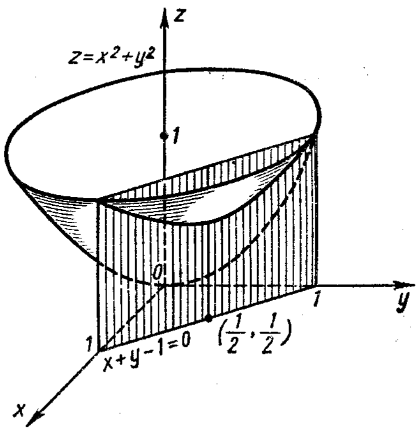

Рис. 157

Таким образом, при выполнении условия связи функция (43.4) является функцией одного переменного. Ее экстремум находится элементарно: приравнивая нулю ее производную (необходимое условие экстремума), получим $2x-1=0$, откуда $x=\frac{1}{2}$. В этой точке рассматриваемая функция, очевидно, имеет минимум (она является многочленом второй степени с положительным коэффициентом при старшем члене). Значению $x=\frac{1}{2}$, согласно уравнению связи (43.5), соответствует $y=\frac{1}{2}$.

Следовательно, в точке (1/2, 1/2) функция (43.4) достигает минимума относительно уравнения связи (43.5). Геометрически это означает, что точка параболоида $z=x^2+y^2$, проектирующаяся в точку (1/2, 1/2), является самой низкой из всех его точек, лежащих над прямой (43.5) (рис. 157). Этот пример показывает, что точка, в которой функция достигает условного экстремума, не является, вообще говоря, точкой экстремума этой функции.

*) Принят также термин «относительный экстремум».

2. Рассмотрим функцию $f(x, y)=y^2-x^2$ и уравнение связи $y=2x$.

Имеем $f(x, 2x)=3x^2$, т. е. при выполнении уравнений связи рассматриваемая функция также является функцией одного переменного и, очевидно, достигает минимума при $x=0$ (рис. 158). Значению $x=0$, согласно уравнению связи, соответствует значение $y=0$, а поэтому функция $f(x, y)=y^2-x^2$ имеет в точке (0, 0) условный минимум относительно уравнения связи $y=2x$.

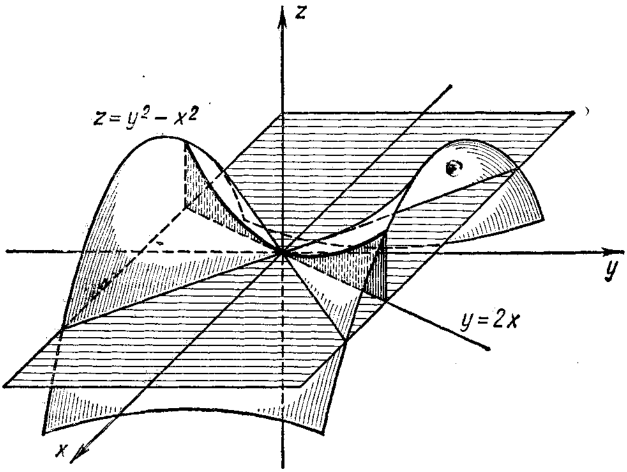

Рис. 158

Следует заметить, что в этом случае сама функция $f(x, y)$ не имеет ни максимума, ни минимума ни в какой точке плоскости. Таким образом, рассмотренный пример показывает, что функция может не иметь экстремума, но при определенных уравнениях связи может иметь условный экстремум.

В дальнейшем будем предполагать, что

1) все функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в открытом множестве G;

2) в рассматриваемой точке $x^{(0)}$ векторы $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, т. е. ранг матрицы Якоби

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right), \quad j=1, 2, \ldots, m, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

равен m — числу ее строк (строки матрицы Якоби являются компонентами градиентов $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$).

Согласно результатам предыдущего параграфа это означает, что функции системы (43.1) независимы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Поскольку в n-мерном пространстве не может быть больше чем n линейно независимых векторов и ранг матрицы не может быть больше числа столбцов, то из условия 2) следует, что $m \leqslant n$.

Согласно условию 2) в точке $x^{(0)}$ хотя бы один из определителей вида

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})}$$

отличен от нуля. Пусть для определенности в точке $x^{(0)}$

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0. \tag{43.6}$$

Тогда, в силу теоремы о неявных функциях (см. п. 41.3), систему уравнений (43.3) в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ можно разрешить относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$:

$$\begin{gathered} x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \ldots, x_n). \end{gathered} \tag{43.7}$$

Подставив значения $x_1, \ldots, x_m$, даваемые формулами (43.7) в $y = f_0(x)$, т. е. рассмотрев композицию функции f_0 и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ получим функцию

$$y = f_0(\varphi_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} g(x_{m+1}, \ldots, x_n) \tag{43.8}$$

от $n-m$ переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$, определенную и непрерывно дифференцируемую в некоторой окрестности точки $\tilde{x}^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, \ldots$ $\ldots, x_n^{(0)})$ в $(n-m)$-мерном пространстве R^{n-m}.

Поскольку, согласно теореме о неявных функциях, условия (43.3) и (43.7) равносильны, то справедливо следующее утверждение.

Точка $x^{(0)}$ является точкой (строгого) условного экстремума для функции $f_0(x)$ относительно уравнений связи (43.3) *в том и только в том случае, когда $\tilde{x}^{(0)}$ является точкой обычного (строгого) экстремума функции* (43.8).

Если $\tilde{x}^{(0)}$ — точка обычного экстремума функции g, то она является стационарной точкой этой функции (см. п. 40.1):

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = 0. \tag{43.9}$$

Напомним, что дифференциал — линейная однородная функция и его равенство нулю означает равенство нулю этой функции при любых значениях ее аргументов, в данном случае — при любых $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_n$. Это возможно, очевидно, в том и только в том случае, когда все коэффициенты при этих аргументах, т. е. производные $\dfrac{\partial g}{\partial x_{m+k}}$, $k = 1, 2, \ldots, n-m$ обращаются в ноль в точке $x^{(0)}$. Условие (43.9) необходимо для условного экстремума в точке $x^{(0)}$.

Таким образом, метод, основанный на решении системы уравнений (43.3), позволяет свести вопрос о нахождении условного экстремума к уже изученному вопросу об обычном экстремуме. Именно таким образом мы и поступали в рассмотренных выше примерах. Однако выразить решение системы (43.3) через элементарные функции часто невозможно или весьма затруднительно; поэтому желательно располагать методом, позволяющим найти условный экстремум не решая системы (43.3). Такой способ изложен ниже.

43.2. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

В этом пункте будет предполагаться, что все функции f_0, $f_1, \ldots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в открытом множестве G.

Теорема 1. *Пусть* $x^{(0)}$ — *точка условного экстремума функции* f_0 *при выполнении уравнений связи* (43.3). *Тогда в этой точке градиенты* $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ *линейно зависимы, т. е. существуют такие, не все равные нулю, числа* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, *что*

$$\lambda_0 \nabla f_0 + \lambda_1 \nabla f_1 + \ldots + \lambda_m \nabla f_m = 0. \qquad (43.10)$$

Следствие. *Если в точке* $x^{(0)}$ *условного экстремума функции* f_0 *относительно уравнений связи* (43.3) *градиенты* $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ *линейно независимы, т. е. ранг матрицы Якоби*

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

равен m, *то существуют такие* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, *что в этой точке*

$$\nabla f_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla f_j = 0, \qquad (43.11)$$

т. е. ∇f_0 *является линейной комбинацией градиентов* $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$.

В координатной форме это условие имеет вид: для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ в точке $x^{(0)}$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0. \qquad (43.12)$$

Функция

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x), \qquad (43.13)$$

где числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ удовлетворяют условию (43.12), называется *функцией Лагранжа* рассматриваемой задачи, а сами числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *множителями Лагранжа*.

Условие (43.12) означает, что если $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума функции f_0 относительно уравнений связи (43.3), то она является стационарной точкой для функции Лагранжа, т. е.

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i}=0, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{43.14}$$

Прежде чем доказать теорему, разъясним ее смысл и покажем, как ее использовать для нахождения точек условного экстремума. Прежде всего обратим внимание на то, что у функции вида (43.13) при произвольных числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, каждая точка ее условного экстремума является и точкой условного экстремума исходной функции f_0, и наоборот. Мы выбираем такие значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, чтобы выполнялись условия (43.12), т. е. чтобы данная точка условного экстремума оказалась и стационарной точкой функции (43.11).

Для отыскания точек условного экстремума следует рассмотреть систему $n+m$ уравнений (43.3) и (43.10) относительно неизвестных $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и решить ее (если это окажется возможным), найдя $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ и по возможности исключив $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Сформулированная теорема утверждает, что все точки условного экстремума будут находиться среди найденных таким образом точек $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Вопрос о том, какие же из них фактически будут точками условного экстремума, требует дополнительного исследования; соображения об этом будут высказаны в пункте 43.5 *.

Доказательство теоремы. Докажем утверждение, равносильное теореме: если в точке $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, удовлетворяющей уравнениям связи

$$f_k(x^{(0)})=0, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{43.15}$$

градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, то $x^{(0)}$ не является точкой условного экстремума.

Итак, пусть $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы и, следовательно, ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, $i=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n$, равен $m+1$. Тогда в этой матрице существует минор порядка $m+1$ не равный нулю. Для определенности будем считать, что он образован первыми $m+1$ столбцами, т. е.

$$\left.\frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})}\right|_{x=x^{(0)}}\neq 0. \tag{43.16}$$

Множество G — открыто, а поэтому существует такое $\delta_0>0$, что при всех δ, $0<\delta<\delta_0$, куб

$$Q_\delta^n=\{x: |x_i-x_i^{(0)}|<\delta,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

лежит в G и, следовательно, на нем определены все функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$.

Зафиксируем $x_{m+2}=x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n=x_n^{(0)}$ и введем обозначения

$$x^*=(x_1, \ldots, x_{m+1})$$
$$Q_\delta^{m+1}=\{x^*: |x_i-x_i^{(0)}|<\delta,\ i=1, 2, \ldots, m+1\}.$$

Очевидно, функции $f_j(x_1, \ldots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $j=0, 1, \ldots, m$, определены и непрерывно дифференцируемы всюду в Q_δ^{m+1}. Рассмотрим отображение $\Phi: Q_\delta^{m+1}\to R^{m+1}$, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} y_1&=f_0(x_1, \ldots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\\ y_2&=f_1(x_1, \ldots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{m+1}&=f_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}). \end{aligned} \tag{43.17}$$

В силу (43.16) для точки $x^{*(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_{m+1}^{(0)})$ имеем

$$\left.\frac{\partial(y_1, \ldots, y_{m+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{m+1})}\right|_{x^*=x^{*(0)}}=\left.\frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})}\right|_{x=x^{(0)}}=0,$$

а в силу (43.15) $\Phi(x^{*(0)})=(f_0(x^{(0)}), 0, \ldots, 0)$. Поэтому (см. теорему 7 в п. 41.8 о локальной обратимости непрерывно дифференцируемого отображения в точке, в которой его якобиан не равен нулю) существует такое $\varepsilon>0$, что на окрестности

$$V=\{y=(y_1, \ldots, y_{m+1}): |y_1-f_0(x^{(0)})|<\varepsilon,\ |y_j|<\varepsilon, j=2, 3, \ldots, m+1\}$$

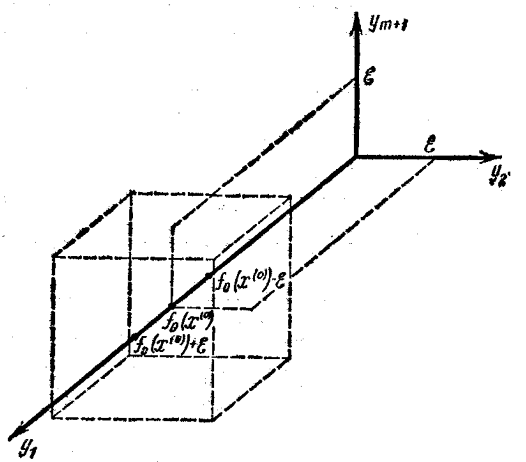

Рис. 159

(рис. 159) определено обратное к Φ отображение, и, следовательно, в любую точку этой окрестности отображается какая-то точка из Q_δ^{m+1}.

В частности, поскольку при любом η, $0<\eta<\varepsilon$, имеет место включение $(f(x^{(0)})\pm\eta, 0, \ldots, 0)\in V$, то в кубе Q_δ^{m+1} найдутся точки $x'^*=(x_1', \ldots, x_{m+1}')$ и $x''^*=(x_1'', \ldots, x_{m+1}'')$, отображающиеся при отображении Φ в указанные точки окрестности V:

$\Phi(x'^*)=(f(x^{(0)})+\eta, 0, \ldots, 0)$, $\Phi(x''^*)=(f(x^{(0)})-\eta, 0, \ldots, 0)$. Если положим для краткости $x'=(x_1', \ldots, x_{m+1}', x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и $x''=(x_1'', \ldots, x_{m+1}'', x_{m+2}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то в координатной записи (см. (43.17)) получим

$$f_0(x')=f_0(x^{(0)})+\eta>f(x^{(0)}),$$

$$f_k(x')=0, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \quad x'\in Q_\delta^n$$

и

$$f_0(x'')=f_0(x^{(0)})-\eta<f(x^{(0)}),$$

$$f_k(x'')=0, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \quad x''\in Q_\delta^n.$$

В силу произвольности $\delta>0$, $0<\delta<\delta_0$, это и означает, что $x^{(0)}$ не является точкой условного экстремума. □

Доказательство следствия. Если векторы $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, то в равенстве (43.10) имеем $\lambda_0\neq 0$, так как в случае $\lambda_0=0$ указанные векторы в силу (43.10) оказались бы линейно зависимыми. Разделив обе части (43.10) на λ_0, получим равенство вида (43.11). □

43.3*. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА ЛАГРАНЖА

Дадим теперь некоторые геометрические пояснения к теореме 1. Рассмотрим для простоты случай условного экстремума функции двух переменных $z=f(x,\ y)$ при выполнении уравнения связи $\varphi(x,\ y)=0$.

Пусть функции f и φ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$, $\nabla\varphi(x_0,\ y_0)=\left(\frac{\partial\varphi(x_0,\ y_0)}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi(x_0,\ y_0)}{\partial y}\right)\neq 0$ и $\varphi(x_0,\ y_0)=0$. В силу условия $\nabla\varphi(x_0,\ y_0)\neq 0$, согласно теореме о неявных функциях, уравнение $\varphi(x,\ y)=0$ в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ задает некоторую гладкую кривую, обладающую явным представлением либо вида $y=y(x)$, либо вида $x=x(y)$. Поскольку нас интересуют только достаточно близкие к $(x_0,\ y_0)$ точки, то указанную кривую будем называть просто кривой $\varphi(x,\ y)=0$ (т. е. попросту говоря, всюду в дальнейшем будем рассматривать сужение функции f и φ на указанную окрестность точки $(x_0,\ y_0)$).

Градиент $\nabla\varphi(x_0,\ y_0)$ является нормалью к кривой $\varphi(x,\ y)=0$ в точке $(x_0,\ y_0)$ (п. 20.6). Обозначим через τ единичный касательный вектор к кривой $\varphi(x,\ y)$ в точке $(x_0,\ y_0)$. Пусть для определенности рассматриваемая кривая задается уравнением $y=y(x)$. Если $(x_0,\ y_0)$ — точка условного экстремума, то x_0 является точкой обычного экстремума для функции $g(x)\overset{\text{def}}{=}f(x,\ g(x))$ (см. п. 43.1) и поэтому $g'(x)=0$, т. е. производная функции f в точке $(x_0,\ y_0)$ в направлении кривой $\varphi(x,\ y)=0$, или, что то же (см. п. 20.7), в направлении вектора τ, равна нулю,

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial\tau}=(\nabla f(x_0,\ y_0),\ \tau)=0.$$

Это означает ортогональность градиента $\nabla f(x_0, y_0)$ и касательного вектора τ, что равносильно коллинеарности векторов $\nabla f(x_0, y_0)$ и $\nabla\varphi(x_0, y_0)$:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda\nabla\varphi(x_0, y_0),$$

т. е. выполняется условие (43.11). Выполнение этого условия в точке условного экстремума можно пояснить и другим путем. Пусть $f(x_0, y_0) \overset{\text{def}}{=} c$. Если в точке (x_0, y_0) не выполняется условие (43.11), т. е. градиенты ∇f и $\nabla\varphi$ не коллинеарны, то это означает, что в этой точке $\nabla f \neq 0$ и линия уровня $f(x, y) = c$ и кривая $\varphi(x, y) = 0$ в этой точке пересекаются под некоторым углом α, отличным от 0 и π (рис. 160). Поэтому в любой достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) часть кривой $\varphi(x, y) = 0$ окажется расположенной в области $f < c$ (в «области меньших значений»), а часть — в области $f > c$ (в «области больших значений»). Это означает, что в точке (x_0, y_0) нет рассматриваемого условного экстремума.

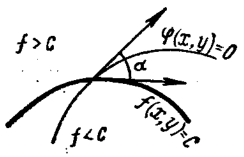

Рис. 160

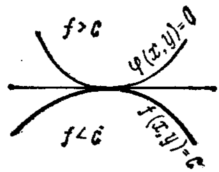

Рис. 161

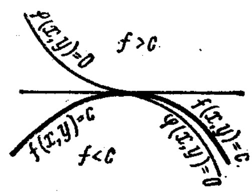

Рис. 162

В случае же, когда векторы ∇f и $\nabla\varphi$ коллинеарны, $\nabla f = \lambda\Delta\varphi$ часть кривой $\varphi(x, y) = 0$ может принадлежать некоторой окрестности точки (x_0, y_0), целиком лежащей в области меньших значений $f < c$ (рис. 161) или в области больших значений $f > c$. В этом случае в точке (x_0, y_0) достигается условный экстремум.

Однако в случае коллинеарности векторов ∇f и $\nabla\varphi$ кривая $\varphi(x, y) = 0$ также может оказаться расположенной в любой достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) частично в области меньших, а частично в области больших значений функции f (рис. 162) — тогда в точке (x_0, y_0) снова не будет условного экстремума. Подобная ситуация возникает, например, когда кривые $f(x, y) = c$ и $\varphi(x, y) = 0$ имеют в точке (x_0, y_0) общую касательную, причем кривая $f(x, y) = c$ расположена в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) по одну сторону от этой касательной, а кривая $\varphi(x, y) = 0$ имеет в этой точке перегиб, переходя с одной стороны касательной на другую.

Сказанное поясняет то обстоятельство, что (43.10) является **необходимым, но не достаточным условием** для условного экстремума.

Приведенные геометрические рассмотрения вопроса об условном экстремуме распространяются и на многомерный случай.

43.4*. СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА

В этом пункте будет дано описание стационарных точек функции Лагранжа (43.13) посредством функции $g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, введенной в п. 43.1 (см. (43.8)). Предварительно докажем одну простую лемму из линейной алгебры.

Пусть задана система линейных однородных уравнений

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.18}$$

и еще одно линейное однородное уравнение

$$b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = 0. \tag{43.19}$$

Систему уравнений, получаемую присоединением к системе (43.18) уравнения (43.19), будем называть *расширенной системой* (43.18) — (43.19).

Лемма. *Для того чтобы расширенная система* (43.18)—(43.19) *была равносильна основной системе* (43.18) *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (43.19) *являлось линейной комбинацией уравнений системы* (43.18).

Следствие. *Для того чтобы уравнение* (43.19) *было линейной комбинацией уравнений* (43.18) *или, что то же, чтобы вектор*

$$b \overset{\text{def}}{=\!=} (b_1, \ldots, b_n) \tag{43.20}$$

был линейной комбинацией векторов

$$a_i \overset{\text{def}}{=\!=} (a_{i1}, \ldots, a_{in}), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.21}$$

необходимо и достаточно, чтобы каждое решение системы (43.18) *являлось решением уравнения* (43.19).

Доказательство леммы. Пусть ранг матрицы (a_{ij}) коэффициентов системы (43.18) равен m_0. Очевидно, что $m_0 \leqslant m$. Если $m_0 < m$, то $m - m_0$ уравнений системы (43.18) являются линейными комбинациями остальных. Отбросив те $m - m_0$ линейные уравнения, которые являются линейными комбинациями оставшихся, получим систему из m_0 линейно независимых уравнений, равносильную системе (43.18), причем уравнение (43.19) является линейной комбинацией уравнений системы (43.18) тогда и только тогда, когда оно является линейной комбинацией указанной системы из оставшихся m_0 уравнений. Поэтому будем с самого начала считать, что $m = m_0$, т. е. что ранг матрицы (a_{ij}) коэффициентов системы (43.18) равен m—числу уравнений этой системы.

Пусть системы (43.18) и (43.18)—(43.19) равносильны. Это означает, что пространства их решений совпадают. Поскольку все уравнения основной системы (43.18) входят в расширенную систему (43.18)—(43.19), то каждое решение расширенной системы является и решением основной системы, т. е. пространство решений расширенной системы содержится в пространстве решений основной системы. Следовательно, совпадение этих пространств равносильно равенству их размерностей.

Размерность s пространства решений системы линейных однородных уравнений равна, как известно, числу неизвестных n этой системы, из которого вычтен ранг r матрицы коэффициентов системы: $s=n-r$. Отсюда следует, что равносильность систем (43.18) и (43.18)—(43.19) означает равенство рангов их матриц. Ранг матрицы коэффициентов системы (43.18) по условию равен m, т. е. векторы (43.21) линейно независимы.

Ранг матрицы коэффициентов расширенной системы (43.18)—(43.19) согласно сказанному в наших условиях также равен m. Поэтому векторы (см. (43.20) и (43.21))

$$b,\ a_1,\ \ldots,\ a_m \tag{43.22}$$

линейно зависимы. А это означает, что b является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_m$.

В самом деле, линейная зависимость векторов (43.22) означает, что существуют такие числа $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$, не все равные нулю, что

$$\mu_0 b+\mu_1 a_1+\ldots+\mu_m a_m=0. \tag{43.23}$$

Здесь заведомо $\mu_0 \neq 0$, так как в противном случае векторы $a_1, \ldots$ $\ldots, a_m$ оказались бы линейно зависимыми. Поделив равенство (43.23) на μ_0, получим, что b является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_m$.

Обратно, если b является линейной комбинацией векторов (43.21), то в системах векторов (43.21) и (43.22) имеется в точности по m линейно независимых векторов, т. е. ранги матриц коэффициентов систем уравнений (43.18) и (43.18)—(43.19) равны.

Итак, условие, что вектор b является линейной комбинацией векторов (43.21):

$$b=\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_m a_m$$

эквивалентно равенству рангов матриц коэффициентов рассматриваемых основной и расширенной системы уравнений, а следовательно, эквивалентно их равносильности. $\square$

Утверждение следствия сразу следует из леммы, поскольку системы (43.18) и (43.18)—(43.19) очевидно равносильны тогда и только тогда, когда каждое решение системы (43.18) является и решением уравнения (43.19) — остальные уравнения этих систем просто совпадают. $\square$

Замечание 1. Доказанная лемма и ее следствия имеют простую геометрическую интерпретацию в n-мерном евклидовом векторном пространстве R^n, т. е. в n-мерном пространстве со скалярным произведением. Используя обозначение скалярного произведения, систему (43.18) можно записать в виде

$$(a_i,\ x)=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{43.24}$$

а уравнение (43.19) в виде

$$(b,\ x)=0, \tag{43.25}$$

где векторы $a_1, \ldots, a_m$ и b определены в (43.20) и (43.21), а $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Множество всевозможных линейных комбинаций векторов $a_1, \ldots, a_m$ образует подпространство пространства R^n и называется *подпространством, натянутым* на эти *векторы*. Обозначим его через $\mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m)$.

Множество решений системы (43.24) состоит из всех векторов x, ортогональных подпространству $\mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m)$. Обозначим это множество решений через T. Оно также является подпространством пространства R^n.

Подпространства $L \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m)$ и T называются *ортогональными дополнениями* друг другу в *пространстве* R^n.

Поскольку $L = \mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m)$, то представимость вектора b в виде линейной комбинации векторов $a_1, \ldots, a_m$ равносильна его принадлежности подпространству L пространства R^n: $b \in L$. Это условие, в свою очередь, равносильно ортогональности вектора b подпространству T: $b \perp T$, которая означает, что для всех $x \in T$ имеет место равенство $(b,\ x) = 0$, т. е. что любое решение x системы (43.24) является решением уравнения (43.25). Это и является утверждением следствия леммы.

Замечание 2. Напомним метод, которым можно получить все решения однородной системы линейных уравнений. Пусть система (43.18) состоит из линейно независимых уравнений. Тогда ранг матрицы его коэффициентов равен m. Это означает, что существует минор этой матрицы порядка m, не равный нулю. Пусть для определенности

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{43.26}$$

В этом случае все решения системы (43.18) можно получить, задавая произвольно последние $n-m$ координаты вектора $(x_1, \ldots, x_n)$. Остальные координаты однозначно находятся из системы уравнений (43.18). В самом деле, возьмем произвольное решение $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ системы (43.18). После подстановки $x_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n = x_n^{(0)}$ в (43.18) получится система из m линейных уравнений (с m неизвестными $x_1, \ldots, x_m$), матрица коэффициентов которой в силу условия (43.26) невырожденная. Поэтому существуют единственные значения $x_1, \ldots, x_m$, удовлетворяющие получившейся системе. Поскольку $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ также было решением системы (43.18), то $x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)}$.

Перейдем теперь к анализу стационарных точек функции Лагранжа.

Теорема 2. *Пусть функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в области $G \subset R^n$, $x^{(0)} \in G$,*

$$f_i(x^{(0)}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и ранг матрицы Якоби функций $f_1, \ldots, f_m$ в точке $x^{(0)}$ равен m. Для того чтобы в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ градиент ∇f_0 являлся линейной комбинацией градиентов $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ необходимо и достаточно, чтобы точка $x^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ была стационарной точкой для функции $g(x) = g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ (см. (43.8)).

Напомним, что если в точке $x^{(0)}$ градиент ∇f_0 является линейной комбинацией

$$\nabla f_0 = \lambda_1 \nabla f_1 + \ldots + \lambda_m \nabla f_m, \tag{43.27}$$

градиентов $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$, то это равносильно тому, что существует функция Лагранжа

$$F = f_0 - \lambda_1 f_1 - \ldots - \lambda_m f_m, \tag{43.28}$$

для которой точка $x^{(0)}$ является стационарной:

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{43.29}$$

Это просто координатная запись условия (43.27), ибо в силу (43.28)

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \ldots - \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. По условию ранг матрицы Якоби системы функций $f_1, \ldots, f_m$ в точке $x^{(0)}$ равен m. Будем считать для определенности, как и в п. 43.1, что

$$\left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{43.30}$$

Подставим в уравнение связи (43.3) функции (43.7), являющиеся решением этих уравнений, и продифференцируем получившиеся относительно переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ тождества. Получим для точки $\tilde{x}^{(0)}$ равенства $df_i(\tilde{x}^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, справедливые для любых приращений $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ независимых переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ (напомним, что дифференциал является линейной функцией, определенной на всем пространстве). Использовав инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных, получим, что в точке $x^{(0)}$ выполняются равенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n = 0, \tag{43.31}$$
$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ произвольны, а $dx_1, \ldots, dx_m$ находятся из формул (43.7). Таким образом вектор

$$dx = (dx_1, \ldots, dx_m, dx_{m+1}, \ldots, dx_n) \tag{43.32}$$

является решением линейной однородной системы (43.31).

Отметим, что в силу условия (43.30) значения $dx_1, \ldots, dx_m$ при заданных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ однозначно находятся и из системы (43.31). Из замечания 2 следует также, что указанным способом получаются все решения системы (43.31).

Стационарность точки $\tilde{x}^{(0)}$ для функции $g(\tilde{x}) = g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ означает, что $dg(\tilde{x}^{(0)}) = 0$. Это равенство, в силу инвариантности формы первого дифференциала, можно более подробно записать в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_0}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_0}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} dx_n = 0, \tag{43.33}$$

где $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ можно задавать произвольно, а $dx_1, \ldots, dx_m$ следует находить из формул (43.7) или, что дает тот же результат, из формул (43.31). Иначе говоря, любое решение системы уравнений (43.31) является и решением уравнения (43.33). Согласно следствию из леммы это возможно тогда и только тогда, когда уравнение (43.33) является линейной комбинацией уравнений системы (43.31), т. е. когда существуют такие числа $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_m$, что

$$\nabla f_0 = \lambda_1 \nabla f_1 + \ldots + \lambda_m \nabla f_m. \ \Box$$

Замечание 3. Согласно замечанию 2 совокупность всех решений системы уравнений (43.31) образует подпространство T пространства R^n, являющееся ортогональным дополнением к подпространству $L = \mathscr{L}(\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m)$. Любой вектор $y \in T$ ортогонален каждому градиенту ∇f_i, а поэтому его естественно назвать *касательным вектором* в точке $x^{(0)}$ к гиперповерхности $f_i(x) = 0$, являющейся множеством уровня (см. § 19) функции f_i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$.

Таким образом, пространство решений T системы (43.31), состоит из векторов, касательных одновременно ко всем гиперповерхностям $f_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, и потому его называют касательным пространством пересечения всех гиперповерхностей $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Напомним, что векторы касательного пространства T, т. е. решения системы (43.31), были обозначены через dx (см. (43.32)).

Поскольку в точке условного экстремума согласно теореме 2 имеет место включение

$$\nabla f_0 \in L = \mathscr{L}(\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m),$$

то

$$\nabla f_0 \perp T.$$

Иначе говоря, градиент ∇f_0 одновременно ортогонален всем касательным dx к гиперповерхностям $f_i(x)=0$, $i=1, 2, \ldots, m$:

$$(\Delta f_0, dx)=0$$

(это другая запись уравнения (43.33)), т. е. градиент ∇f_0 перпендикулярен касательному пространству T в точке $x^{(0)}$. Но множество всех векторов, ортогональных к ∇f_0, образует $(n-1)$-мерное подпространство T_0, называемое касательным пространством к гиперповерхности $f_0(x)=f_0(x^{(0)})$. В силу сказанного выше, каждый вектор из T, будучи ортогонален градиенту ∇f_0, принадлежит к T_0, т. е. $T\subset T_0$.

Итак, *если $x^{(0)}$ — точка условного экстремума, то $T\subset T_0$, т. е. касательное пространство в точке $x^{(0)}$ пересечения всех гиперповерхностей, задаваемых уравнениями связи, содержится в касательном пространстве в той же точке гиперповерхности $f_0(x)=f_0(x^{(0)})$.*

Замечание 4. Из теоремы 2 еще раз вытекает следствие теоремы 1. В самом деле, если $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума, то $\tilde{x}^{(0)}$ является точкой обычного экстремума для функции g (см. п. 43.1) и, следовательно, ее стационарной точкой. Поэтому согласно теореме 2 точка $x^{(0)}$ является стационарной точкой для функции Лагранжа, т. е. выполняется условие (43.29).

43.5*. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ТОЧЕК УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

В этом пункте также будем предполагать выполненными все предположения, наложенные на функции f_0 и f_i, $i=1, 2, \ldots, m$, в п. 43.1. Пусть

$$F=f_0+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i$$

— функция Лагранжа (см. (43.13)) для функции f_0 и уравнений связи (43.3). Пусть $x^{(0)}\in G$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3) и является стационарной точкой функции Лагранжа, т. е. точкой, координаты которой удовлетворяют системе уравнений (43.12) и (43.3). Нашей целью является получение метода, с помощью которого можно установить условия, достаточные для того, чтобы $x^{(0)}$ являлась точкой условного экстремума рассматриваемой задачи.

Заметим прежде всего, что если точка $x\in G$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3), то

$$\Delta f=f(x)-f(x^{(0)})=F(x)-F(x^{(0)})=\Delta F. \qquad (43.34)$$

Отсюда сразу видно, что если $x^{(0)}$ является точкой обычного экстремума для функции F, т. е. ΔF не меняет знака в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, то $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума для функции f_0.

Действительно, из (43.34) следует в этом случае, что приращение Δf_0 для допустимых значений x, т. е. удовлетворяющих уравнением связи, также не меняет знака. Это достаточное условие, однако, накладывает слишком сильное ограничение на поведение функции Лагранжа $F(x)$ в рассматриваемой точке — она должна иметь обычный экстремум, что сильно сужает область возможного применения указанного условия при решении задач. Поэтому целесообразно получить более общий достаточный признак условного экстремума.

Пусть $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3). Вернемся к рассмотрению функции (43.8), т. е. функции $g(\tilde{x})=g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $\tilde{x}=(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, получаемой из $f_0(x)=f_0(x_1, \ldots, x_n)$ при условии, что $x_1, \ldots, x_m$ являются функциями переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$, определяемыми уравнениями связи (43.3) в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Будем дополнительно предполагать, что $f_0(x)$ и $f_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, m$, дважды непрерывно дифференцируемы в точке $x^{(0)}$.

Выше отмечалось (см. п. 43.1), что $x^{(0)}$ является точкой условного (строгого) экстремума для функции $f_0(x)$ относительно уравнений связи (43.3) тогда и только тогда, когда $\tilde{x}^{(0)}=(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является точкой обычного (строгого) экстремума для функции $g(x)$. Поэтому, если например, в точке $x^{(0)}$ функция $g(x)$ удовлетворяет достаточным условиям существования строгого экстремума, то в этой точке функция $f_0(x)$ имеет условный строгий экстремум относительно уравнений связи (43.3). Достаточные условия для обычного строгого экстремума были получены нами ранее (см. теорему 2 в п. 40.2). Для нашего случая они имеют вид:

$$1)\ \frac{\partial g(\tilde{x}^{(0)})}{\partial x_i}=0, \qquad i=m+1, \ldots, n; \tag{43.35}$$

2) второй дифференциал

$$d^2 g(\tilde{x}^{(0)})=\sum_{i,\ j=m+1}^{n} \frac{\partial^2 g(\tilde{x}^{(0)})}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dx_i\, dx_j \tag{43.36}$$

является положительно или отрицательно определенной квадратичной формой.

При выполнении этих условий $\tilde{x}^{(0)}$ является точкой строгого минимума или максимума для функции $g(x)$. В силу сказанного выше указанные условия являются и достаточными условиями для того, чтобы $x^{(0)}$ являлась точкой условного строгого минимума (максимума) для функции $f_0(x)$ относительно уравнений связи (43.3). Однако они неудобны для практического использования, так как требуют знания функции $g(\tilde{x})$. Поэтому, исходя из полученных достаточных условий условного строгого экстремума, выраженных посредством функции $g(\tilde{x})$, получим достаточные условия того же экстремума, но выраженные только через функцию Лагранжа и уравнения связи.

Прежде всего заметим, что в силу условия (43.6) система (43.31) разрешима, и притом однозначно, относительно $dx_1, \ldots, dx_m$ при произвольно фиксированных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. Систему (43.31), выражающую равенство нулю дифференциалов функций $f_i(x)$ в точке $x^{(0)}$:

$$df_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

при выполнении условий (43.3), будем записывать кратко в виде

$$df = 0, \tag{43.37}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Пусть $x^{(0)}$ является стационарной точкой для функции Лагранжа $F(x)$ (см. (43.13)). Это означает, что $dF(x^{(0)}) = 0$, т. е. что в этой точке $\nabla f_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} \nabla f_i = 0$. В теореме 2 п. 43.4* было показано, что в этом случае $\tilde{x}^{(0)}$ является стационарной точкой для функции $g(\tilde{x})$, т. е.

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = 0. \tag{43.38}$$

Поясним еще раз вывод этой формулы и покажем, что

$$d^2g(\tilde{x}^{(0)}) = d^2F(x^{(0)})\,|_{df=0}. \tag{43.39}$$

Это равенство следует понимать как рав нство функций $n-m$ переменных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. В правой части равенства (43.39) остальные переменные $dx_1, \ldots, dx_m$, которые входят в выражения написанных дифференциалов, определяются из системы уравнений (43.37) или, что равносильно (см. формулы (43.7)),

$$dx_k = d\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n-m}), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Используя инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных и формулу (43.8), имеем

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_0(\tilde{x}^{(0)})}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Прибавим к этому равенству сумму (равную нулю) левых частей тождеств (43.31), умноженных соответственно на постоянные λ_i, входящие в функцию Лагранжа $F(x)$ (точнее, i-е равенство (43.31) умножается на постоянную λ_i). Тогда, использовав условне (43.13), получим

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\right] dx_j\bigg|_{x=x^{(0)}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Утверждение (43.38) доказано.

Равенство (43.39) доказывается аналогичным приемом. Прежде всего напишем второй дифференциал для функции $g(\tilde{x})$ в точке $\tilde{x}^{(0)}$:

$$d^2g(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_0(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_k} dx_j\,dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_0(x^{(0)})}{\partial x_j} d^2x_j. \quad (43.40)$$

Далее, продифференцировав тождества, получающиеся в результате дифференцирования уравнений связи (43.3), т. е. тождества

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

будем иметь в точке $x^{(0)}$:

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_k} dx_j\,dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^{(0)})}{\partial x_j} d^2x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \quad (43.41)$$

Умножив i-е равенство (43.41) на постоянную λ_i, входящую в функцию Лагранжа $F(x)$, прибавим получившиеся выражения к правой части равенства (43.40); тогда получим

$$d^2g(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_k} dx_j\,dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_j} d^2x_j,$$

где dx_i, $i = 1, \ldots, n$ удовлетворяет системе уравнений (43.37). Поскольку точка $x^{(0)}$ стационарная для функции Лагранжа, то второй член получившегося равенства обращается в ноль, и тем самым формула (43.39) доказана.

Будем говорить, что квадратичная форма $d^2F(x^{(0)})$ является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой переменных dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, при условии, что эти переменные удовлетворяют системе уравнений (43.37), если для любых dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих этой системе уравнений и таких, что $\sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2 > 0$, выполняется неравенство $d^2F(x^{(0)}) > 0$ (соответственно $d^2F(x^{(0)}) < 0$).

Пусть точка $x^{(0)}$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3) и является стационарной для функции Лагранжа (43.13) и пусть второй дифференциал функции Лагранжа в этой точке является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой переменных $dx_1, \ldots, dx_n$ при условии, что они удовлетворяют системе уравнений (43.37). Тогда из (43.38) и (43.39) следует, что $\tilde{x}^{(0)}$ является стационарной точкой для функции $g(\tilde{x})$ и что второй дифференциал этой функции в точке $\tilde{x}^{(0)}$ является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой переменных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$, и, следовательно, функция $g(\tilde{x})$ имеет в точке $\tilde{x}^{(0)}$ строгий минимум (максимум), а значит, функция $f_0(x)$ имеет в точке $x^{(0)}$ условный строгий минимум (максимум) относительно уравнений связи (43.3).

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 3. *Если $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ удовлетворяет уравнениям связи* (43.3) *и является стационарной точкой для функции Лагранжа* (43.13) *и если второй дифференциал функции Лагранжа в этой точке является положительно* (*отрицательно*) *определенной квадратичной формой переменных $dx_1, \ldots, dx_n$ при условии, что они удовлетворяют системе уравнений* (43.31), *то $x^{(0)}$ является точкой условного строгого минимума* (*максимума*) *для функции f относительно уравнений связи* (43.3).

Таким образом, чтобы исследовать стационарную точку функции Лагранжа (43.13) на условный экстремум, надо исследовать на определенность квадратичную форму (43.39), т. е. второй дифференциал функции Лагранжа в этой точке при выполнении условий связи (43.3) (когда дифференциалы dx_i, $i=1, 2, \ldots, n$, связаны соотношениями (43.31)). При этом следует иметь в виду, что если второй дифференциал функции Лагранжа в рассматриваемой точке окажется положительно (отрицательно) определенным и без выполнения условий связи, то он будет таковым, конечно, и при их выполнении.

Пусть, например, требуется найти точки экстремума функции $f(x, y)=xy$, когда точка (x, y) лежит на прямой $x-y=0$. Функцией Лагранжа в данном случае является $F(x, y)=xy-\lambda(x-y)$, и так как $\frac{\partial F}{\partial x}=y-\tilde{\lambda}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=x+\lambda$, то для определения стационарных точек функции $F(x, y)$, удовлетворяющих условиям связи, имеем систему уравнений

$$x-y=0,$$

$$y-\lambda=0,$$

$$x+\lambda=0,$$

из которых следует, что $x=y=\lambda=0$.

Исследуем в точке (0, 0) второй дифференциал функции $F(x, y)$ при выполнении условий связи, т. е. когда $dx-dy=0$. Имеем

$$d^2F=2dx\,dy, \tag{43.42}$$

и, значит, при выполнении условий связи

$$d^2F = dx^2 \geqslant 0, \tag{43.43}$$

т. е. второй дифференциал (43.42), являясь неопределенной квадратичной формой, при выполнении условий связи превращается в положительно определенную квадратичную форму (43.43). Поэтому (0, 0) является точкой строгого условного минимума для рассмотренной задачи. Впрочем в данном случае это легко усмотреть и сразу: вдоль прямой $x-y=0$ функция $f(x, y)=xy$ примет вид $f(x, x)=x^2$, имея, очевидно, в точке $x=0$ строгий минимум.

Упражнения: Найти точки условного экстремума функций при указанных уравнениях связи:

1. $z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $x^2+y^2=1$.
2. $z=x^2+y^2$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.
3. $u=xyz$, $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.
4. $u=x^2+y^2+z^2$, $Ax+By+Cz+D=0$.
5. $u=2x+y-z+1$, $x^2+y^2-2z^2-22=0$.
6. Найти наибольшее значение функции $z=xy$ в единичном круге $x^2+y^2\leqslant 1$.
7. В круг заданного радиуса вписать n-угольник наибольшей площади.
8. Представить число $a>0$ в виде суммы слагаемых $x_1, \dots, x_n$ так, чтобы произведение $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_i>0,\ i=1, \dots, n)$ принимало наибольшее значение.