ГЛАВА ШЕСТАЯ
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 44. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

44.1. ПОНЯТИЕ ОБЪЕМА В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ (МЕРА ЖОРДАНА). ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Напомним кратко основные понятия, связанные с определением n-мерного объема (площади в случае $n=2$) и дадим новое определение понятия объема (меры) множества, которое будет отличаться от введенного ранее (см. п. 31.1).

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство ($n=1, 2, 3, \ldots$). Его точки, как обычно, будем обозначать через $x=(x_1, \ldots, x_n)$, где x_i, $i=1, 2, \ldots, n$ — координаты точки x в некоторой раз и навсегда фиксированной системе координат. Зафиксируем целое неотрицательное число k, ($k=0, 1, \ldots$). Рассмотрим i-ю координатную ось ($i=1, 2, \ldots, n$), т. е. множество точек x с координатами $x_1=\ldots=x_{i-1}=x_{i+1}=\ldots=x_n=0$. Через ее точки с координатами вида $x_i=10^{-k}m$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ проведем ортогональные этой оси гиперплоскости размерности $n-1$. Множество всех таких гиперплоскостей, построенных для всех координатных осей x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, порождает семейство n-мерных замкнутых кубов вида

$$Q^n=\left\{x: \frac{m_i}{10^k} \leqslant x_i \leqslant \frac{m_i+1}{10^k}, \quad i=1, 2, \ldots, n\right\}, \tag{44.1}$$

где m_i, при $i=1, 2, \ldots, n$, пробегают независимо друг от друга множество всех целых чисел.

Кубы (44.1) называются *кубами ранга* k, и их совокупность обозначается через T_k, $k=0, 1, \ldots$.

Множество всех кубов ранга k, очевидно, покрывает все пространство, т. е.

$$R^n=\bigcup_{Q^n \in T_k} Q^n.$$

Два куба одного ранга могут иметь в качестве общих точек лишь некоторые свои граничные точки. В случае $n=1$ куб (44.1) является, очевидно, отрезком, а в случае $n=2$ — квадратом.

Число $1/10^{kn}$ называется n-мерным объемом куба (44.1) и обозначается через μQ^n:

$$\mu Q^n \overset{\text{def}}{=} 10^{-kn}.$$

Для множества S, представляющего собой объединение конечного или счетного числа различных кубов Q_j^n данного ранга k, $j = 1, 2, \ldots$:

$$S = \bigcup_j Q_j^n, \quad Q_j^n \in T_k,$$

его n-мерный объем μS определяется равенством

$$\mu S \overset{\text{def}}{=} \sum_j \mu Q_j^n. \tag{44.2}$$

Очевидно, μS неотрицательное число или $+\infty$.

Пусть теперь E — произвольное множество в R^n. Обозначим через $s_k = s_k(E)$ множество точек всех n-мерных кубов ранга k, целиком лежащих в E, а через $S_k = S_k(E)$ — множество точек всех n-мерных кубов ранга k, каждый из которых пересекается с множеством E по непустому множеству ($k = 0, 1, 2, \ldots$):

$$s_k(E) = \bigcup_{Q^n \subset E} Q^n,$$

$$S_k(E) = \bigcup_{Q^n \cap E \neq \varnothing} Q^n, \quad Q^n \in T_k.$$

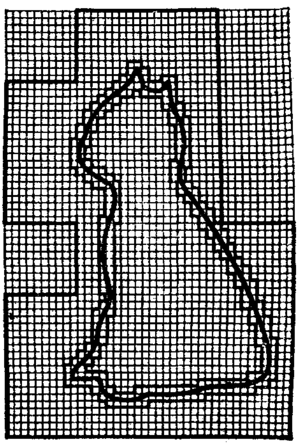

Рис. 163

Таким образом, все кубы ранга k, содержащиеся в s_k, лежат во множестве E, а кубы ранга k, содержащиеся в S_k, образуют покрытие множества E (рис. 163), т. е. $s_k(E) \subset E \subset S_k(E)$. При этом множество E лежит «строго внутри» многогранника $S_k = S_k(E)$, т. е. не пересекается с его границей ∂S_k. Действительно, точка $x \in E \cap \partial S_k$ не может существовать, так как будучи граничной для S_k, она принадлежала бы грани некоторого куба ранга k. Поскольку рассматриваемые кубы замкнуты, то по определению многогранника S_k к нему принадлежали бы и все кубы ранга k, содержащие указанную грань, ибо она содержит точку $x \in E$. Тем самым эта точка не была бы граничной для S_k.

Очевидно,

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_k \subset s_{k+1} \subset \ldots$$

$$S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \ldots$$

и, следовательно, в силу определения (44.2)

$$\mu s_0 \leqslant \mu s_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu s_k \leqslant \mu s_{k+1} \leqslant \ldots$$
$$\mu S_0 \geqslant \mu S_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu S_k \geqslant \mu S_{k+1} \geqslant \ldots. \tag{44.3}$$

Таким образом, получились две монотонные последовательности, членами которых являются элементы расширенного множества действительных чисел $\bar{R}$ (см. п. 2.5), а именно, либо неотрицательные действительные числа, либо $+\infty$. Поэтому для любого множества $E \subset R^n$ всегда существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{k \to \infty} \mu s_k(E) \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} \mu S_k(E).$$

Определение 1. *Конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu s_k(E)$ *называется нижней или внутренней n-мерной мерой Жордана**) *множества E и обозначается через $\mu_* E$,*

$$\mu_* E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \to +\infty} \mu s_k(E), \tag{44.4}$$

а предел $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu S_k(E)$ *называется верхней или внешней n-мерной мерой Жордана множества E и обозначается через $\mu^* E$,*

$$\mu^* E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \to +\infty} \mu S_k(E). \tag{44.5}$$

Если нижняя $\mu_* E$ и верхняя $\mu^* E$ меры множества E конечны и совпадают, то оно называется измеримым по Жордану. Общее значение нижней и верхней меры Жордана измеримого множества E обозначается через μE и называется n-мерной мерой Жордана или n-мерным объемом множества E:

$$\mu E = \mu_* E = \mu^* E. \tag{44.6}$$

Для пустого множества по определению полагается $\mu \varnothing = 0$.

Иногда вместо μE будем писать $\mu_n E$, для того чтобы подчеркнуть, что речь идет о мере множества E, рассматриваемого как подмножество именно n-мерного пространства.

В дальнейшем для простоты меру Жордана будем часто называть просто *мерой*, а множество, измеримое по Жордану, просто *измеримым*.

Под измеримым множеством, как это показывает сам смысл слова «измеримый», в математике подразумевается такое точечное множество в R^n, которое можно каким-то образом измерить, т. е. сопоставить ему, по определенным правилам, некоторое неотрицательное число, являющееся объемом в трехмерном случае, площадью в двумерном и длиной в одномерном. Если размерность

*) К. Жордан (1838—1922) — французский математик.

пространства $n \geqslant 3$, то множество, измеримое по Жордану в этом пространстве, называется также *кубируемым*, а в случае $n=2$ — *квадрируемым*. Термины кубируемое и квадрируемое множество отражают собой тот факт, что указанное выше измерение множества осуществляется посредством кубов, соответственно квадратов.

Простым вычислением нетрудно проверить, что если множество E представляет собой объединение конечного числа различных n-мерных кубов ($n=1, 2, \ldots$) данного ранга, то оно измеримо и его мера Жордана совпадает с мерой, определенной равенством (44.2).

Для любого множества E при каждом $k=0, 1, 2, \ldots$, очевидно,

$$\mu s_k(E) \geqslant 0, \qquad \mu S_k(E) \geqslant 0.$$

Перейдя к пределу при $k \to \infty$, получим $\mu_* E \geqslant 0$, $\mu^* E \geqslant 0$. Отсюда вытекает следующее свойство меры Жордана.

Свойство 1°. *Для всякого измеримого множества* $\mu E \geqslant 0$.

Далее заметим, что в силу определений (44.4) и (44.5) для любого множества E определена конечная или бесконечная нижняя и верхняя меры Жордана. При этом, поскольку для каждого $k=0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $0 \leqslant \mu s_k(E) \leqslant \mu S_k(E)$, то, выполнив предельный переход при $k \to \infty$, для любого множества E будем иметь

$$0 \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E.$$

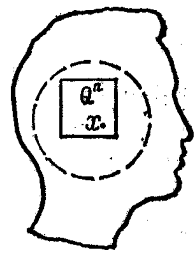

Рис. 164

Отсюда очевидным образом следует, что если верхняя мера множества E равна нулю, $\mu^* E = 0$, то множество E измеримо и $\mu E = 0$.

Если у множества E имеется внутренняя точка, то найдется такой номер k_0, что множество $s_{k_0}(E)$ будет непустым; следовательно $\mu s_{k_0}(E) > 0$, откуда в силу (44.3), (44.4) и (44.6) будет следовать, что $\mu_* E > 0$. В самом деле, если x — внутренняя точка множества E, то существует такое $\varepsilon > 0$, что сферическая окрестность $U(x, \varepsilon)$ содержится в E. Поэтому достаточно взять такой ранг k_0, чтобы длина диагонали куба*) ранга k_0 была меньше ε:

$$10^{-k_0}\sqrt{n} < \varepsilon.$$

Тогда куб Q^n ранга k, содержащий точку x (такой куб, по крайней мере один, всегда существует) будет целиком лежать во множестве $s_{k_0}(E)$ (рис. 164). Поэтому

$$\mu s_{k_0}(E) \geqslant \mu Q^n > 0.$$

Из сказанного следует, что нижняя *мера Жордана любого открытого множества* G всегда *положительна*: $\mu_* G > 0$.

*) Диагональ n-мерного куба с ребром длины a равна $a\sqrt{n}$.

Отметим, что определенный нами ранее в п. 31.1 объем открытого множества совпадает с его нижней мерой Жордана. Однако, для построения достаточно общего аналога интеграла Римана в случае функций многих переменных понятие только нижней меры Жордана оказывается недостаточным. Для этой цели очень удобно понятие измеримого по Жордану множества.

Если множество E ограничено, то $\mu_* E$ и $\mu^* E$ всегда конечны. Действительно, из ограниченности множества E следует, что оно пересекается только с конечным множеством кубов нулевого ранга и, следовательно, $S_0(E)$ состоит из конечного числа кубов. Поэтому согласно (44.2) $\mu S_0(E) < +\infty$. Но при любом $k = 0, 1, \ldots$

$$s_k(E) \subset S_k(E) \subset S_0(E).$$

Поэтому

$$0 \leqslant \mu s_k(E) \leqslant \mu S_k(E) \leqslant \mu S_0(E).$$

Отсюда, перейдя к пределу при $k \to +\infty$, получим

$$0 \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E \leqslant \mu S_0(E) < +\infty,$$

т. е. меры $\mu_* E$ и $\mu^* E$ конечны.

Если же множество E неограничено, то для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ множество $S_k(E)$ состоит из бесконечного количества кубов ранга k. Поэтому в силу формулы (44.2) для всех k имеем $\mu S_k(E) = +\infty$, следовательно и $\mu^* E = +\infty$, т. е. множество E заведомо не измеримо. Отсюда:

если множество измеримо по Жордану, то оно ограничено.

Как нижняя, так и верхняя меры Жордана обладают так называемым свойством монотонности. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 1. *Если* $E_1 \subset E_2$, *то*

$$\mu_* E_1 \leqslant \mu_* E_2, \qquad \mu^* E_1 \leqslant \mu^* E_2. \tag{44.7}$$

Это вытекает непосредственно из того, что при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы включения

$$s_k(E_1) \subset s_k(E_2), \qquad S_k(E_1) \subset S_k(E_2). \tag{44.8}$$

ибо первое из них означает, что куб ранга k, лежащий в E_1, лежит и в E_2, а второе, что куб ранга k, пересекающийся со множеством E_1, пересекается и с E_2. И то и другое утверждения следуют из включения $E_1 \subset E_2$. Из (44.8) в силу (44.2) вытекает справедливость неравенств

$$\mu s_k(E_1) \leqslant \mu s_k(E_2), \qquad \mu S_k(E_1) \leqslant \mu S_k(E_2).$$

Устремив здесь k к $+\infty$, получим в пределе (44.7). □

Следствие 1. *Если* $E_1 \subset E_2$ *и* $\mu E_2 = 0$, *то* $\mu E_1 = 0$.

Действительно, в силу леммы 1

$$0 \leqslant \mu^* E_1 \leqslant \mu^* E_2 = \mu E_2 = 0.$$

Следовательно, $\mu^* E_1 = 0$, откуда и $\mu E_1 = 0$. □

Следствие 2. *Если* $\mu E = 0$ *и* $\bar{E}$ *— замыкание множества* E *(см. п. 18.2), то* $\mu \bar{E} = 0$.

В самом деле, из условия $\mu E = 0$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой ранг k, что

$$\mu S_k(E) < \varepsilon.$$

Многогранник $S_k(E)$ состоит из конечного числа замкнутых кубов (если количество кубов ранга k, входящих в множество $S_k(E)$, было бы бесконечным, то согласно (44.2) была бы бесконечной и его мера: $\mu S_k(E) = +\infty$) и, следовательно, является замкнутым множеством: $\overline{S_k(E)} = S_k(E)$. Но $E \subset S_k(E)$, поэтому $\bar{E} \subset \overline{S_k(E)} = S_k(E)$. Отсюда $\mu^* \bar{E} \leqslant \mu^* S_k(E) = \mu S_k(E)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$:

$$\mu^* \bar{E} < \varepsilon.$$

Это возможно только тогда, когда $\mu \bar{E} = 0$. □

Из леммы 1 для измеримых множеств вытекает следующее свойство.

Свойство 2° (монотонность меры). *Если* E_1 *и* E_2 *— измеримые по Жордану множества и* $E_1 \subset E_2$, *то*

$$\mu E_1 \leqslant \mu E_2. \tag{44.9}$$

Лемма 2 (полуаддитивность верхней меры). *Для любой конечной совокупности множеств* $E_1, E_2, \ldots, E_m$ *имеет место неравенство*

$$\mu^* \bigcup_{j=1}^{m} E_j \leqslant \bigcup_{j=1}^{m} \mu^* E. \tag{44.10}$$

Доказательство. Для любого ранга $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$S_k\left(\bigcup_{j=1}^{m} E_j\right) = \bigcup_{j=1}^{m} S_k(E_j).$$

В самом деле, каждый куб ранга k, который пересекается с множеством $\bigcup_{j=1}^{m} E_j$, пересекается хотя бы с одним из множеств E_j и наоборот. Поэтому в силу (44.2)

$$\mu S_k\left(\bigcup_{j=1}^{m} E_j\right) = \mu \bigcup_{j=1}^{m} S_k(E_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu S_k(E_j).$$

Перейдя здесь к пределу при $k \to +\infty$, получим (44.10). □

Следствие. *Объединение конечного числа множеств меры ноль имеет меру ноль.*

Действительно, если $\mu E_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, то в силу (44.10)

$$\mu^* \bigcup_{j=1}^{m} E_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu^* E_j = \sum_{j=1}^{m} \mu E_j = 0.$$

Следовательно, множество $\bigcup_{j=1}^{m} E_j$ измеримо и его верхняя мера, а потому и мера равны нулю:

$$\mu \bigcup_{j=1}^{m} E_j = 0. \ \square$$

Упражнения. 1. Показать, что объединение счетной совокупности множеств жордановой меры ноль может не иметь меру ноль.

2. Доказать, что если E_1 и E_2 — открытые множества, то

$$\mu_* (E_1 \cup E_2) \leqslant \mu_* E_1 + \mu_* E_2.$$

Указание. Полезно воспользоваться утверждением, содержащимся в упражнении 11 п. 18.3.

Будет ли это неравенство всегда справедливым, т. е. без предположения об открытости множеств E_1 и E_2?

3. Привести пример таких непересекающихся множеств E_1 и E_2, что

$$\mu^* (E_1 \cup E_2) \neq \mu^* E_1 + \mu^* E_2.$$

Критерий измеримости множеств устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Для того чтобы множество E было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и чтобы его граница ∂E имела меру Жордана, равную нулю:*

$$\mu\, \partial E = 0. \tag{44.11}$$

Для всякого множества E обозначим через $\sigma_k = \sigma_k(E)$ множество точек тех и только тех кубов ранга k, которые содержатся в $S_k(E)$ и не содержатся в $s_k(E)$:

$$\sigma_k(E) = \bigcup_{Q^n \subset S_k,\ Q^n \not\subset s_k} Q^n.$$

Таким образом, множество $\sigma_k(E)$ состоит из замкнутых кубов и теоретико-множественная разность $S_k(E) \setminus s_k(E)$ содержится во множестве $\sigma_k(E)$ и, вообще говоря, не совпадает с ним! С другой стороны

$$\overline{S_k(E) \setminus s_k(E)} = \sigma_k(E)\ ^{*)}.$$

*) Черта над множеством, как всегда, обозначает его замыкание (см. п. 18.2).

Доказательству теоремы 1 предпошлем лемму.

Лемма 3. *Для любого ограниченного множества* $E \subset R^n$ *справедливы включения*

$$\partial E \subset \sigma_k(E) \subset S_k(\partial E). \tag{44.12}$$

Доказательство леммы. Покажем сначала, что

$$\partial E \subset \sigma_k(E). \tag{44.13}$$

Поскольку $E \subset S_k(E)$, то $\bar{E} \subset \overline{S_k(E)}$. Множество $S_k(E)$ состоит, в силу ограниченности множества E, из конечного числа замкнутых кубов и поэтому замкнуто: $\overline{S_k(E)} = S_k(E)$. Следовательно, для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{E} \subset S_k(E)$, а значит и $\partial E \subset S_k(E)$, ибо $\partial E \subset \bar{E}$.

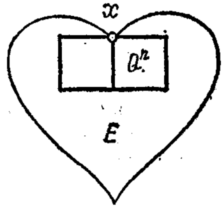

Рис. 165

Возьмем какую-либо граничную точку x множества $E: x \in \partial E$. В силу включения $\partial E \subset S_k(E)$ существует по крайней мере один такой куб Q^n ранга k, что $x \in Q^n$ и $Q^n \subset S_k(E)$. Если Q^n не содержится в $s_k(E)$, то, очевидно, $Q^n \subset \sigma_k(E)$, а следовательно, и $x \in \sigma_k(E)$.

Если же $Q^n \subset s_k(E)$ (рис. 165), то в силу включений $x \in Q^n$ и $Q^n \subset s_k(E) \subset E$ имеем $x \in E$. Поэтому в этом случае все кубы ранга k, содержащие точку x, лежат в $S_k(E)$, ибо пересечение всякого такого куба со множеством E содержит точку x и, следовательно, не пусто. Все эти кубы не могут принадлежать множеству E — в противном случае точка x была бы внутренней, а не граничной точкой множества E. Поэтому среди всех кубов ранга k, содержащих точку x, найдется по крайней мере один куб Q_0^n, который не содержится в $s_k(E)$, т. е. $Q_0^n \subset S_k(E)$, но $Q_0^n \not\subset s_k(E)$. Отсюда следует, что $Q_0^n \subset \sigma_k(E)$, и поскольку $x \in Q_0^n$, то и в этом случае $x \in \sigma_k(E)$. Точка x была произвольной точкой границы ∂E, а поэтому включение (44.13) доказано.

Второе включение (44.12), т. е. включение $\sigma_k(E) \subset S_k(\partial E)$ доказывается проще и даже без предположения об ограниченности множества E. Всякий куб Q^n ранга k, лежащий в $\sigma_k(E)$ имеет заведомо точки как из множества E (ибо в силу определения множества $\sigma_k(E)$ всякий куб ранга k, содержащийся в этом множестве, содержится и в $S_k(E)$, а следовательно, пересекается с E), так и точки, не принадлежащие E (ибо согласно тому же определению никакой куб ранга k, целиком лежащий в E, т. е. принадлежащий к $s_k(E)$, не содержится в $\sigma_k(E)$). Поскольку куб Q^n — линейно связное множество, то в нем заведомо имеются точки границы множества E (см. лемму 9 в п. 18.2). Это и означает, что $Q^n \subset S_k(\partial E)$, а поскольку Q^n был произвольным кубом ранга k, лежащим в $\sigma_k(E)$, то

$$\sigma_k(E) \subset S_k(\partial E). \ \square \tag{44.14}$$

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть E — измеримое множество. Тогда, как доказано выше, оно ограничено. Далее, согласно определению измеримого множества нижняя и верхняя меры множества E конечны и равны: $\mu_* E = \mu^* E$, т. е.

$$\lim_{k \to +\infty} \mu s_k(E) = \lim_{k \to \infty} \mu S_k(E). \qquad (44.15)$$

Поскольку, согласно определению множества $\sigma_k(E)$ и формуле (44.2)

$$\mu \sigma_k(E) = \mu S_k(E) - \mu s_k(E), \qquad (44.16)$$

то из (44.15) следует, что

$$\lim_{k \to +\infty} \mu \sigma_k(E) = 0. \qquad (44.17)$$

В силу включения (44.13) и монотонности верхней меры (см. (44.7)) при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\mu^* \partial E \leqslant \mu^* \sigma_k(E) = \mu \sigma_k(E).$$

Перейдя к пределу при $k \to +\infty$, в силу (44.17) получим $\mu^* \partial E = 0$.

Следовательно, множество ∂E измеримо по Жордану, и $\mu \partial E = 0$.

Достаточность. Пусть E — ограниченное множество и $\mu \partial E = 0$. Тогда, по определению меры

$$\lim_{k \to +\infty} \mu S_k(\partial E) = 0. \qquad (44.18)$$

В силу включения (44.14) и монотонности меры (см. свойство 2 меры) справедливо неравенство $\mu \sigma_k(E) \leqslant \mu S_k(\partial E)$ и, следовательно, (см. (44.16)) неравенство

$$\mu S_k(E) - \mu s_k(E) \leqslant \mu S_k(\partial E). \qquad (44.19)$$

Поскольку множество E — ограничено, то его нижняя мера $\mu_* E$ и верхняя $\mu^* E$ конечны и поэтому (см. (44.4) и (44.5)) в неравенстве (44.19) можно перейти к пределу при $k \to +\infty$. В силу (44.18) получим

$$\mu^* E - \mu_* E = 0, \text{ т. е. } \mu^* E = \mu_* E.$$

Это и означает измеримость по Жордану множества E. $\square$

С помощью теоремы 1 легко показать, что при теоретико-множественных операциях объединения множеств, пересечения и вычитания их измеримость не нарушается. Предварительно заметим, что для любых двух множеств E_1 и E_2, лежащих в пространстве R^n, справедливы включения (рис. 166)

$$\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2, \qquad (44.20)$$

$$\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2, \qquad (44.21)$$

$$\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2. \qquad (44.22)$$

Докажем, например, включение (44.21). Пусть $x \in \partial(E_1 \cap E_2)$. Тогда, прежде всего, $x \in \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$, ибо из того, что $x \in \partial(E_1 \cap E_2)$ следует, что в любой окрестности точки x имеются точки, одновременно принадлежащие к E_1 и к E_2, т. е. x является точкой прикосновения как множества E_1, так и E_2. Если $x \in \partial E_1$, или $x \in \partial E_2$, или и то и другое, то, очевидно, $x \in \partial E_1 \cup \partial E_2$. Если же $x \notin \partial E_1$ и $x \notin \partial E_2$, то поскольку $x \in \bar{E}_1$ и $x \notin \partial E_1$, то x является внутренней точкой для множества E_1 и аналогично, внутренней точкой для множества E_2 (ибо замыкание всякого множества состоит только из внутренних точек этого множества и его граничных точек; каждое из них может, конечно, оказаться пустым). В этом случае у точки x существуют окрестности $U_1(x) \subset E_1$ и $U_2(x) \subset E_2$, пересечение $U(x) = U_1(x) \cap U_2(x)$ которых будет также окрестностью точки x, и, очевидно, $U(x) \subset E_1 \cap E_2$. Таким образом, у точки x нашлась окрестность $U(x)$, все точки которой принадлежат множеству $E_1 \cap E_2$, т. е. x — внутренняя, а не граничная точка этого множества: $x \notin \partial(E_1 \cap E_2)$. Полученное противоречие показывает, что случай $x \notin \partial E_1$ и одновременно $x \notin \partial E_2$ невозможен, если $x \in \partial(E_1 \cap E_2)$.

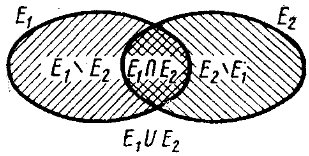

Рис. 166

Упражнение 4. Доказать включения (44.20) и (44.22).

Из включений (44.20) и (44.21) методом математической индукции для любого конечного числа множеств легко устанавливается справедливость включений

$$\partial \bigcup_{j=1}^{m} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{m} \partial E_j, \quad \partial \bigcap_{j=1}^{m} E_j \subset \bigcap_{j=1}^{m} \partial E_j. \tag{44.23}$$

Свойство 3°. *Объединение и пересечение конечного числа измеримых по Жордану множеств, а также разность двух таких множеств являются измеримыми по Жордану множествами.*

В самом деле, если множества E_j измеримы, то согласно теореме 1 $\mu \partial E_j = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому в силу следствия из леммы 2 $\mu \bigcup_{j=1}^{m} \partial E_j = 0$, а тогда (см. следствие 1 леммы 1) из включений (44.23) следует соответственно, что

$$\mu \partial \bigcup_{j=1}^{m} E_j = 0, \quad \mu \partial \bigcap_{j=1}^{m} E_j = 0.$$

Отсюда следует, что в силу той же теоремы 1 множества $\bigcup_{j=1}^{m} E_j$

и $\bigcap\limits_{j=1}^{m} E_j$ также измеримы. Аналогично доказывается измеримость разности измеримых множеств.

Теперь можно легко доказать, что для меры Жордана справедливо неравенство, аналогичное неравенству (44.10) для верхней меры. Сформулируем соответствующее утверждение.

Для любой конечной совокупности измеримых множеств $E_1, E_2, \ldots$ $\ldots, E_m$ справедливо неравенство

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} E_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu E_i. \tag{44.24}$$

Действительно, если множества E_i измеримы, то $\mu^* E_i = \mu E_i$, и согласно выше доказанному объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$ также измеримо, и следовательно, $\mu^* \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i = \mu \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$. Поэтому формула (44.24) в рассматриваемом случае совпадает с формулой (44.10).

Свойство 4° (аддитивность меры). *Мера объединения конечного числа попарно непересекающихся измеримых по Жордану множеств равна сумме мер этих множеств.*

Таким образом, если E_i — измеримые множества, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, то

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} E_i = \sum_{i=1}^{m} \mu E_i. \tag{44.25}$$

Докажем это. Поскольку для любого ранга k справедливо включение $s_k(E_i) \cap s_k(E_j) \subset E_i \cap E_j$, то из условия $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$ следует, что $s_k(E_i) \cap s_k(E_j) = \varnothing$, $i \neq j$; поэтому согласно (44.2)

$$\sum_{i=1}^{m} \mu s_k(E_i) = \mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(E_i). \tag{44.26}$$

Если куб ранга k лежит в некотором множестве E_i, то он лежит и в объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$, следовательно,

$$\bigcup_{i=1}^{m} s_k(E_i) \subset s_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right).$$

Отсюда в силу (44.26) и монотонности меры (в данном случае — даже из формулы (44.2)) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{m} \mu s_k(E_i) = \mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(E_i) \leqslant \mu s_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right).$$

Перейдя к пределу при $k\to+\infty$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \mu E_i \leqslant \mu \bigcup_{i=1}^{m} E_i. \tag{44.27}$$

С другой стороны для любых измеримых множеств справедливо обратное неравенство (44.24). Очевидно, что из (44.24) и (44.27) и следует равенство (44.25), т. е. аддитивность меры.

Замечание. Из свойств 3 и 4 меры вытекает, что если к измеримому множеству присоединить или вычесть из него множество меры ноль, то полученное множество будет также измеримым, и его мера будет равной мере исходного множества. Действительно, если E — измеримое множество, а $\mu E_0=0$, то, по свойству 3 меры, множества $E\setminus E_0$ и $E\cup E_0$ также измеримы. Далее по свойству 4 при $E_0\subset E$ и $\mu E_0=0$ имеем

$$\mu E=\mu[(E\setminus E_0)\cup E_0]=\mu(E\setminus E_0)+\mu E_0=\mu(E\setminus E_0).$$

В силу же монотонности меры и неравенства (44.24) для любого E_0, $\mu E_0=0$ справедливы неравенства

$$\mu E\leqslant\mu(E\cup E_0)\leqslant\mu E+\mu E_0=\mu E,$$

откуда $\mu(E\cup E_0)=\mu E$.

В свою очередь из сказанного следует, что если к измеримому множеству присоединить или вычесть из него какое-то множество его граничных точек, то получится снова измеримое множество с той же мерой, что и данное. Это вытекает из того, что в силу теоремы 1 граница измеримого множества, а значит и любое ее подмножество, имеют меру ноль. Таким образом, в частности, если множество E измеримо, то его замыкание $\bar E=E\cup\partial E$ также измеримо, причем $\mu E=\mu\bar E$.

Обратное утверждение неверно: *существуют неизмеримые по Жордану множества, замыкания которых измеримы.* Простым примером подобного множества является множество рациональных точек на некотором отрезке. Оно неизмеримо (почему?), а его замыканием является отрезок, который измерим.

Примеры измеримых множеств сколь угодно большой размерности можно получить с помощью построения цилиндров, основаниями которых служат также измеримые множества. Сформулируем определение цилиндра.

Определение 2. *Пусть E_0 — множество, лежащее на гиперплоскости $R^{n-1}=\{x: x_n=0\}$ пространства R^n, a и b действительные числа, $a\leqslant b$. Множество*

$$E=\{x:(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ 0)\in E_0,\ a\leqslant x_n\leqslant b\}$$

называется n-мерным цилиндром с основанием E_0 и образующей (параллельной координатной оси x_n) длины $h=b-a$.

Очевидно, что, используя понятие произведения множеств (см. п. 1.2* или 41.2) можно сказать, что цилиндр E является произведением множеств E_0 и отрезка $[a, b]: E = E_0 \times [a, b]$. Если E_0 — ограниченное множество, то и цилиндр с основанием E_0 является ограниченным множеством. Отсюда следует, что всякий цилиндр, в основании которого лежит измеримое множество, ограничен, ибо измеримое множество ограничено.

Теорема 2. *Если E_0 — измеримое по Жордану множество пространства R^{n-1}, то всякий n-мерный цилиндр E с основанием E_0 является измеримым по Жордану множеством в пространстве R^n, и*

$$\mu_n E = h\mu_{n-1} E_0, \tag{44.28}$$

где h — длина образующей цилиндра E.

Следствие. *Если основание цилиндра имеет $(n-1)$-мерную меру, равную нулю, то сам n-мерный цилиндр имеет n-мерную меру, также равную нулю.*

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что проекция *) каждого n-мерного куба Q^n ранга k является $(n-1)$-мерным кубом Q^{n-1} также ранга k и

$$\mu Q^n = (10^{-k})\, \mu Q^{n-1}. \tag{44.29}$$

Обозначим через $q_1^{n-1}, \ldots, q_l^{n-1}$ $(n-1)$-мерные кубы ранга k, составляющие множество $s_k(E_0)$, а через $Q_1^{n-1}, \ldots, Q_m^{n-1}$ — $(n-1)$-мерные кубы, составляющие $S_k(E_0)$.

Пусть $q_{i1}^n, \ldots, q_{ip}^n$ суть n-мерные кубы из $s_k(E)$, проектирующиеся в куб $q_i^{n-1} \subset s_k(E_0)$. Поскольку E — цилиндр, то число p таких n-мерных кубов q_{ij}^n одно и то же для всех $i = 1, 2, \ldots, l$, поэтому

$$s_k(E) = \bigcup_{i=1}^{l} \bigcup_{j=1}^{p} q_{ij}^n. \tag{44.30}$$

Аналогично, число r n-мерных кубов Q_{ij}^n из $S_k(E)$, проектирующихся в один и тот же куб Q_i^{n-1} из $S_k(E_0)$, одинаково для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, поэтому

$$S_k(E) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{r} Q_{ij}^n. \tag{44.31}$$

Проекция множества $\bigcup_{j=1}^{p} q_{ij}^n$ на ось x_n является отрезком длины $p/10^k$, причем

$$p/10^k \leqslant h, \tag{44.32}$$

*) Проекцией $\text{пр}_{x_n} E$ множества $E \subset R^n$ на гиперплоскость $R^{n-1} = \{x : x_n = 0\}$ называется множество точек вида $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ для каждой из которых существует такое x_n, что $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in E$.

ибо все кубы q_{ij}^n содержатся в $s_k(E)$ и, следовательно, в цилиндре E. Проекция же указанного множества на гиперплоскость R^{n-1} представляет собой один из кубов q_i^{n-1}, поэтому

$$\mu_n s_k(E) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p} \mu_n q_{ij}^n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{10^k} \mu_{n-1} q_i^{n-1} =$$
$$= \frac{p}{10^k} \sum_{i=1}^{l} \mu_{n-1} q_i^{n-1} = \frac{p}{10^k} \mu_{n-1} s_k(E_0). \qquad (44.33)$$

Проекция «столбика кубов» $\bigcup_{j=1}^{r} Q_{ij}^n$ (рис. 167) на ось x_n есть отрезок длины $10^{-k}r$, причем

$$h \leqslant \frac{r}{10^k} \leqslant h + \frac{2}{10^k}. \qquad (44.34)$$

Далее, каждый такой столбик проектируется на гиперплоскость R^{n-1} в куб Q_i^{n-1}, либо содержащийся в $s_k(E_0)$, либо в $\sigma_k(E_0) = \overline{S_k(E_0) \setminus s_k(E_0)}$ (множество $\sigma_k(E_0)$ было введено при доказательстве теоремы 1). Поэтому

$$\mu_n S_k(E) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \mu_n Q_{ij}^n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{10^k} \mu_{n-1} Q_i^{n-1} =$$
$$= \frac{r}{10^k} \sum_{i=1}^{m} \mu_{n-1} Q_i^{n-1} = \frac{r}{10^k} [\mu s_k(E_0) + \mu \sigma_k(E_0)]. \qquad (44.35)$$

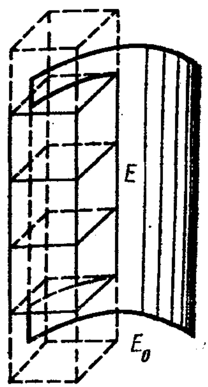

Рис. 167

Наконец, заметим, что каждый из столбиков $\bigcup_{j=1}^{r} Q_{ij}^n$, который проектируется в куб $q^{n-1} \subset s_k(E_0)$, отличается от столбика $\bigcup_{j=1}^{p} q_{ij}^n$, проектирующегося в тот же куб q^{n-1}, лишь двумя кубами, добавленными к нему снизу и сверху (в смысле убывания, соответственно возрастания, координаты x_n (см. рис. 148). Поэтому

$$r = p + 2.$$

Отсюда и из неравенств (44.32) и (44.34) имеем

$$\frac{p}{10^k} \leqslant h \leqslant \frac{p+2}{10^k} = \frac{r}{10^k} \leqslant h + \frac{2}{10^k}.$$

В силу этого из неравенств (44.33) и (44.35) получим

$$\mu_n S_k(E)-\mu_n s_k(E)=\frac{r-p}{10^k}\mu_{n-1}s_k(E_0)+ \\ +\frac{r}{10^k}\mu\sigma_k(E_0)\leqslant\frac{2}{10^k}\mu_{n-1}E_0+\left(h+\frac{2}{10^k}\right)\mu\sigma_k(E_0),$$

и поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2}{10^k}=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\mu\sigma_k(E_0)=0$, то

$$\lim_{k\to+\infty}[\mu_n S_k(E)-\mu_n s_k(E)]=0. \tag{44.36}$$

Множество E_0, как всякое измеримое множество, ограничено. Нетрудно убедиться, что диаметры $d(E_0)$ и $d(E)$ множеств E_0 и E связаны соотношением $d(E)=\sqrt{[d(E_0)]^2+h^2}$, из которого следует, что множество E также ограничено. Поэтому, как было упомянуто выше, оно имеет конечные верхнюю и нижнюю меры. Из формул (44.4), (44.5) и (44.36) следует, что они равны: $\mu^*E=\mu_*E$, т. е. множество E измеримо.

Докажем теперь формулу (44.28). Для этого умножим неравенство

$$\mu_{n-1}s_k(E_0)\leqslant\mu E_0\leqslant\mu_{n-1}S_k(E_0)$$

на h. Применив неравенства (44.32) и (44.34), будем иметь (см. также (44.33) и (44.35))

$$\mu_n s_k(E)=\frac{p}{10^k}\mu_{n-1}s_k(E_0)\leqslant h\mu E_0\leqslant\frac{r}{10^k}\mu_{n-1}S_k(E_0)=\mu_n S_k(E),$$

причем обе части получившегося неравенства в силу (44.36) стремятся при $k\to\infty$ к одному и тому же пределу μE, откуда и следует формула (44.28).

Задача 29. Построить пример неизмеримой по Жордану области.

Задача 30. Доказать, что мера Жордана не зависит от выбора декартовой системы координат.

44.2. МНОЖЕСТВА МЕРЫ НОЛЬ

В предыдущем пункте было установлено, что множество измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница имеет меру ноль. Поэтому важно иметь признаки, по которым можно было бы установить, что множество имеет меру ноль. Достаточно общим примером множеств меры ноль являются цилиндры, в основании которых лежат множества меры ноль (см. следствие из теоремы 2). Другой широкий класс множеств меры ноль дается в нижеследующей теореме.

Теорема 3. *График всякой непрерывной на компакте функции имеет меру ноль.*

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна на компакте $A\subset R_x^n$. Пусть E — ее график, т. е.

множество таких точек $(x, y)=(x_1, \ldots, x_n, y)$ в n-мерном пространстве R_{xy}^{n+1}, что $(x_1, \ldots, x_n) \in A$, а $y=f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$E=\{(x, y):(x_1, \ldots, x_n) \in A, \quad y=f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Покажем, что $(n+1)$-мерная мера Жордана множества E равна нулю. Множество A будучи компактом, ограничено. Поэтому существует такое натуральное число m, что n-мерный куб

$$P_m=\{x:-m \leqslant x_i \leqslant m, \quad i=1, 2, \ldots, n\}$$

содержит множество $A: P_m \supset A$. Тем более куб

$$P_{m+1}=\{x:-m-1 \leqslant x_i \leqslant m+1, \quad i=1, 2, \ldots, n\}$$

также содержит $A: P_{m+1} \supset A$ и, более того, каким бы ни был куб Q некоторого ранга $k=0, 1, 2, \ldots$, пересекающийся со множеством A, т. е. $Q \subset S_k(A)$, он также содержится в $P_{m+1}: Q \subset P_{m+1}$. Поэтому при любом k имеем $S_k(A) \subset P_{m+1}$. Здесь и в дальнейшем через $S_k(A)$, $S_k(E)$, как и в п. 44.1, обозначаются множества точек всех кубов ранга k, соответствующих пространств, пересекающихся с множествами $A \subset E_x^n$, $E \subset R_{xy}^{n+1}$.

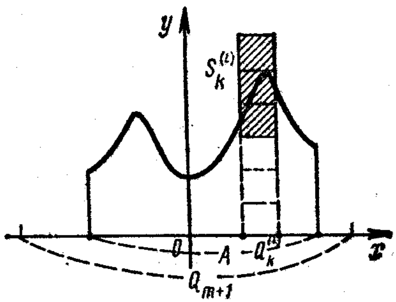

Рис. 168

Множество $S_k(E)$ распадается на конечное число «столбиков» $S_k^{(i)}$, каждый из которых состоит из $(n+1)$-мерных кубов ранга k, имеющих одну и ту же проекцию (см. сноску на с. 124) $Q_k^{(i)}$ в пространство R_x^n (на рис. 168 изображен случай $n=1$):

$$S_k(E)=\bigcup_i S_k^{(i)}, \quad \mathrm{пр}_y S_k^{(i)}=Q_k^{(i)}, \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{44.37}$$

Обозначим через $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции f на A. Замечая, что диагональ (диаметр *)) n-мерного куба с ребром длины $1/10^k$ равна $\sqrt{n}/10^k$, для высоты $h_k^{(i)}$ каждого столбика $S_k^{(i)}$ имеем (см. рис. 149) оценку

$$h_k^{(i)} \leqslant \omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right)+\frac{2}{10^k}. \tag{44.38}$$

Действительно, для оценки высоты $h_k^{(i)}$ к расстоянию $\omega(10^{-k}\sqrt{n})$ между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$ на

*) Определение диаметра множества см. определение 11 в п. 19.6.

кубе $Q_k^{(i)}$ достаточно добавить длины ребер самого нижнего и самого верхнего кубов рассматриваемого столбика $S_k^{(i)}$ (эта оценка достигается, когда точки графика, соответствующие указанным экстремальным значениям, окажутся на гранях кубов ранга k). Из (44.37) и (44.38) получаем:

$$\mu S^k(E) = \mu \bigcup_i S_k^{(i)} = \sum_i \mu S_k^{(i)} = \sum_i h_k^{(i)} \mu Q_k^{(i)} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}\right] \sum_i \mu Q_k^{(i)} \leqslant \left[\omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}\right] \mu P_{m+1}. \qquad (44.39)$$

Поскольку функция f непрерывна на компакте, она равномерно непрерывна на нем, и поэтому $\lim\limits_{k\to+\infty} \omega(10^{-k}\sqrt{n}) = 0$, и поскольку $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{2}{10^k} = 0$, то из (44.39) имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \mu S_k(E) = 0$, а это и означает, что $\mu^* E = 0$, следовательно, и $\mu E = 0$. □

В силу теорем 2 и 3 всякое ограниченное множество, границу которого можно представить как объединение конечного числа множеств, каждое из которых представляет собой либо часть графика непрерывной на ограниченном замкнутом множестве функции, либо часть цилиндра с основанием меры ноль, является измеримым множеством, ибо, в силу аддитивности меры, мера границы указанного множества равна нулю, и, следовательно, согласно теореме 1 оно измеримо. Таким образом получено описание достаточно широкого класса множеств, измеримых по Жордану и часто встречающихся в математическом анализе и его приложениях. Так, например, плоские множества (криволинейные трапеции, «секторы» кривых, заданных в полярных координатах, а также тела вращения, площади и соответственно объемы которых вычислялись в § 32 с помощью одномерного интеграла Римана, являются измеримыми по Жордану множествами, ибо, как нетрудно убедиться, их границы имеют меру ноль.

Подобным же образом измеримы по Жордану параллелепипеды и эллипсоиды, в частности — шары, так как их границы можно представить в виде объединения графиков непрерывных на компактах функций.

Заметим, что в § 31 было введено понятие меры $\operatorname{mes} G$ для открытых множеств. Сравнивая ее определение с определением, приведенным в п. 44.1, видим, что $\operatorname{mes} G = \mu_* G$, т. е. введенная в § 31 мера является нижней мерой Жордана. Однако в силу сказанного выше все рассмотренные в примерах § 32 множества были измеримыми по Жордану и, следовательно, для них мера $\operatorname{mes} G$ являлась мерой Жордана, т. е. для них имело место $\operatorname{mes} G = \mu G$.

Представляет интерес обобщить теорему 3 на случай параметрически заданных множеств, в частности — на случай параметрических кривых. Оказывается, что даже в этом случае одной лишь непрерывности рассматриваемых кривых недостаточно для того, чтобы они имели меру ноль. Существуют, например, кривые $x_i = x_i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($x_i(t)$ — непрерывные на некотором отрезке $[a, b]$ функции), называемые кривыми Пеано*), которые проходят через каждую точку некоторого n-мерного куба и, следовательно, не имеют меры ноль.

Задача 31. Построить пример кривой Пеано.

Теорема 4. *Всякая плоская спрямляемая кривая имеет меру ноль.*

Доказательство. Пусть задана спрямляемая кривая γ, длина которой равна S. Пусть, далее $r = r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — некоторое представление кривой γ. Разобьем ее последовательно, т. е. в порядке возрастания параметра t, точками $r(t_i)$, $t_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $t_0 = a$, $t_m = b$, на m равных по длине частей, т. е. возьмем такое разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=m}$ отрезка $[a, b]$, чтобы длина каждой части γ_i (кривой γ), задаваемой представлением $r = r(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, имела длину S/m.

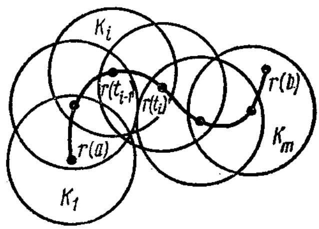

Рис. 169

Обозначим через K_i замкнутый круг с центром в точке $r(t_{i-1})$ и радиусом S/m. Поскольку дуга γ_i имеет длину S/m и ее начало является центром круга K_i, то вся она лежит в этом круге (рис. 169). Отсюда вытекает, что вся кривая γ содержится в объединении кругов K_i:

$$\gamma \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

Следовательно, в силу монотонности и полуаддитивности верхней меры (см. леммы 1 и 2 в п. 44.1)

$$\mu^*\gamma \leqslant \mu^* \bigcup_{i=1}^{m} K_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu^* K_i. \tag{44.40}$$

Но $\mu^* K_i = \mu K_i = \pi\left(\frac{S}{m}\right)^2$, $i = 1, \ldots, m$ **), поэтому из (44.40) имеем $\mu^*\gamma \leqslant \pi S^2/m$. Левая часть неравенства не зависит от m, а правая — стремится к нулю, при $m \to +\infty$, вследствие чего $\mu\gamma = 0$. $\square$

*) Д. Пеано (1858—1932) — итальянский математик.

**) Действительно, окружность C, являющуюся границей круга K, можно представить как объединение двух полуокружностей, каждая из которых представляет собой график непрерывной на отрезке функции. Поэтому согласно теореме 3 $\mu C = 0$, следовательно, всякий круг K является измеримым множеством.

Упражнение 5. Доказать, что всякая спрямляемая кривая в трехмерном пространстве имеет меру ноль.

Из теорем 1 и 4 следует, что всякое ограниченное плоское множество, граница которого является спрямляемой кривой, измеримо.

44.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА

Сформулируем определение кратного интеграла Римана. Для этого введем прежде всего понятие разбиения измеримого множества и понятие мелкости этого разбиения.

Пусть E — измеримое по Жордану множество, $E \subset R^n$. Конечная система $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ непустых измеримых по Жордану множеств E_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, называется *разбиением множества* E, если

1) попарные пересечения множеств E_i имеют меру ноль:

$$\mu(E_i \cap E_j) = 0, \qquad i \neq j;$$

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i = E$;

Число $\delta_\tau = \max\limits_{i=1, 2, \ldots, i_0} d(E_i)$, где $d(E_i)$ — диаметр множества E_i, называется *мелкостью разбиения* τ.

В силу аддитивности меры Жордана для всякого разбиения $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества E имеем

$$\mu E = \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i. \tag{44.41}$$

Действительно, пусть при фиксированном i $E_i^* = \bigcup\limits_{j \neq i} E_i \cap E_j$ и $E^* = \bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i^*$. Тогда, в силу п. 1) определения разбиения множества $\mu(E_i \cap E_j) = 0$, $i \neq j$, поэтому $\mu E_i^* \leqslant \sum\limits_{j \neq i} \mu(E_i \cap E_j) = 0$, т. е. $\mu E_i^* = 0$. Отсюда $\mu E^* \leqslant \sum\limits_{i=1}^{i_0} \mu E_i^* = 0$, следовательно $\mu E^* = 0$. Кроме того, множества E^*, $E_i \setminus E^* = E_i^{**}$ $i = 1, 2, \ldots, i_0$, попарно не пересекаются и в силу п. 2) $\bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i^{**} \cup E^* = \bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i = E$. Поскольку

$$\mu E_i = \mu(E_i \setminus E^*) = \mu E_i^{**},$$

то из всего этого, вследствие аддитивности меры следует, что

$$\mu E = \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i^{**} + \mu E^* = \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i. \; \square$$

Для простоты обозначений иногда вместо $\{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ будем писать $\{E_i\}$.

Пусть $\tau=\{E_i\}$ и $\tau'=\{E'_j\}$ — разбиения измеримого множества E. Разбиение τ' называется *вписанным* в разбиение τ, если для каждого $E'_j \in \tau'$ существует такой элемент $E_i \in \tau$, что $E'_j \subset E_i$. В этом случае пишут $\tau' \succ \tau$ или $\tau \prec \tau'$.

Отметим два свойства разбиений множества.

1°. *Если $\tau \prec \tau'$ и $\tau' \prec \tau''$, то $\tau \prec \tau''$.*

2°. *Для любых двух разбиений $\tau'=\{E'_i\}$ и $\tau''=\{E''_j\}$ измеримого множества E существует такое его разбиение τ, что $\tau \succ \tau'$ и $\tau \succ \tau''$.*

Свойство 1° очевидным образом следует из определения вписанного разбиения. В качестве же указанного в свойстве 2° разбиения τ можно взять множество всевозможных непустых пересечений $E'_i \cap E''_j$.

Примером разбиения измеримого множества является совокупность всевозможных непустых пересечений данного множества с кубами некоторого фиксированного ранга k. Отсюда видно, что для всякого измеримого множества существуют разбиения сколь угодно малой мелкости.

Определение 3. *Пусть на измеримом по Жордану множестве $E \subset R^n$ задана функция $y=f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ и $\tau=\{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — некоторое разбиение множества E; выберем произвольным образом точки $\xi^{(i)} \in E_i$, $i=1, 2, \ldots, i_0$. Сумма вида*

$$\sigma_\tau=\sigma_\tau(f;\ \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_0)})=\sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\,\mu E_i \tag{44.42}$$

называется интегральной суммой Римана функции f.

Подобно случаю функции одного переменного определение кратного интеграла можно сформулировать, используя понятие предела последовательности или «язык $\varepsilon-\delta$».

Определение 4. *Число A называется интегралом Римана от функции f по измеримому по Жордану множеству $E \subset R^n$, если какова бы ни была последовательность разбиений $\tau_m=\{E_i^m\}_{i=1}^{i=i^{(m)}}$, $m=1, 2, \ldots$, множества E такая, что мелкости разбиений τ_m стремятся к нулю при $m\to+\infty$: $\lim\limits_{m\to+\infty}\delta_{\tau_m}=0$, и каковы бы ни были точки $\xi^{(i,\,m)} \in E_i^m$, $i=1, 2, \ldots, i^{(m)}$, последовательность интегральных сумм $\sigma_{\tau_m}\left(f;\ \xi^{(1,\,m)}, \ldots, \xi^{(i^{(m)},\,m)}\right)$ при $m\to+\infty$ имеет своим пределом число A:*

$$\lim_{m\to+\infty}\sigma_{\tau_m}\left(f;\ \xi^{(1,\,m)}, \ldots, \xi^{(i^{(m)},\,m)}\right)=A. \tag{44.43}$$

Интеграл от функции f по множеству E обозначается через

$$\int f(x)\,dE \quad \text{или} \quad \underset{E}{\int\int\ldots\int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Если существует интеграл $\int f(x)\,dE$, то функция f называется *интегрируемой по Риману* на множестве E. Интегрируемые по Риману функции часто будем называть просто *интегрируемыми*.

Равенство (44.43), т. е. определение интеграла, кратко записывается в виде формулы

$$\int f(x)\,dE = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau. \tag{44.44}$$

В терминах ε и δ этот предел означает следующее: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta_\varepsilon > 0$, *что каково бы ни было разбиение* $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ *множества* E *мелкости* $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ *и каковы бы ни были точки* $\xi^{(i)} \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, *выполняется неравенство*

$$|\sigma_\tau(f;\ \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_0)}) - \int f(x)\,dE| < \varepsilon. \tag{44.45}$$

Обычным путем доказывается, что определения (44.43) и (44.45) предела интегральных сумм эквивалентны.

Отметим, что определение интеграла (44.44), в случае, когда $n = 1$, а множеством, по которому производится интегрирование, является отрезок, формально не совпадает с данным ранее определением интеграла Римана от функции одной переменной, так как там рассматривались лишь разбиения отрезка на отрезки, а теперь рассматриваются всевозможные разбиения отрезка на измеримые по Жордану множества. Однако, можно показать (это будет сделано в п. 44.7*), что при $n = 1$ оба определения для случая, когда множество, по которому производится интегрирование, является отрезком, равносильны, т. е. приводят к одному и тому же понятию интегрируемости функции и к одному и тому же понятию интеграла.

При определении интеграла по множеству $E \subset R^n$ можно для составления интегральных сумм использовать не все элементы разбиений τ множества E, а отбрасывать те слагаемые, которые соответствуют элементам разбиения, замыкания которых пересекаются с некоторым фиксированным множеством меры ноль. Проанализируем это обстоятельство подробнее.

Пусть E — измеримое множество, $E_0 \subset E$ и $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — разбиение множества E. Обозначим через $\tau(E_0)$ совокупность тех элементов разбиения τ, замыкания которых не пересекаются со множеством E_0:

$$\tau(E_0) = \{E_i : \bar{E}_i \cap E_0 = \varnothing,\quad E_i \in \tau\}, \tag{44.46}$$

а через $\tau_0(E_0)$ — наоборот, совокупность тех E_i, для которых их замыкания $\bar{E}_i$ пересекаются с E_0:

$$\tau_0(E_0) = \{E_i : \bar{E}_i \cap E_0 \neq \varnothing,\quad E_i \in \tau\}. \tag{44.47}$$

Лемма 6. *Пусть E — измеримое по Жордану множество пространства R^n, $E_0 \subset E$ и $\mu E_0 = 0$. Тогда*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i = 0. \tag{44.48}$$

Суммирование в формуле (44.48) происходит только по тем индексам i, для которых $E_i \in \tau_0(E_0)$.

Доказательство. Пусть $E_0 \subset E$ и $\mu E_0 = 0$; тогда и $\mu \bar{E}_0 = 0$ (см. в п. 44.1 замечание после доказательства аддитивности меры). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такой ранг k, что

$$\mu S_k(\bar{E}_0) < \varepsilon. \tag{44.49}$$

Здесь, как всегда, $S_k(\bar{E}_0)$ обозначает совокупность точек всех кубов ранга k, пересекающихся со множеством $\bar{E}_0$ и, следовательно, покрывающих его: $\bar{E}_0 \subset S_k(\bar{E}_0)$.

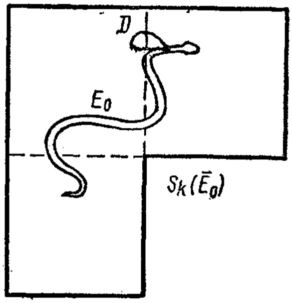

Рис. 170

Напомним, что $\bar{E}_0$ лежит строго внутри многогранника $S_k(\bar{E}_0)$, т. е. не пересекается с его границей (см. п. 44.1). Поскольку множество $\bar{E}_0$ ограничено и замкнуто, а граница $\partial S_k(\bar{E}_0)$ многогранника $S_k(\bar{E}_0)$, как и граница любого множества, замкнута, то $\bar{E}_0$ и $\partial S_k(\bar{E})$ находятся на положительном расстоянии δ друг от друга (см. лемму 7 в п. 18.2).

$$\delta = \rho(\bar{E}_0, \partial S_k(\bar{E})) > 0. \tag{44.50}$$

Поэтому всякое множество D с диаметром $d(D)$, меньшим чем δ, пересекающееся со множеством $E_0 \subset \bar{E}_0$, будет целиком лежать в $S_k(\bar{E}_0)$ (рис. 170). Действительно, если $d(D) < \delta$ и существует $x \in D \cap E_0$, то (см. (44.50)) $D \subset U(x, \delta) \subset S_k(\bar{E}_0)$, где, как обычно, $U(x, \delta)$ — шаровая окрестность точки x радиуса δ.

Пусть теперь $\tau = \{E_i\}$ — разбиение множества E мелкости $\delta_\tau < \delta$. Тогда для всякого элемента E_i этого разбиения, замыкание которого пересекается с множеством E_0, т. е. для каждого $E_i \in \tau_0(E_0)$, будем иметь $E_i \subset S_k(\bar{E}_0)$. Поэтому

$$\bigcup_{E_i \in \tau_0(E_0)} E_i \subset S_k(\bar{E}_0).$$

Следовательно, в силу (44.49)

$$\sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i = \mu \bigcup_{E_i \in \tau_0(E_0)} E_i \leq \mu S_k(\bar{E}_0) < \varepsilon. \ \square$$

Введем еще одно обозначение. Пусть E — измеримое множество, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — некоторое его разбиение, $E_0 \subset E$. Для всякой функции f, определенной на E, положим (см. (44.46) и (44.47))

$$\sigma_{\tau(E_0)} = \sigma_{\tau(E_0)}(f;\ \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_0)}) = \sum_{E_i \in \tau(E_0)} f(\xi^{(i)})\,\mu E_i. \quad (44.51)$$

Эта запись означает, что суммирование в правой части равенства происходит только по тем индексам i, для которых $E_i \in \tau(E_0)$. Как всегда $\xi^{(i)} \in E_i$. Для симметрии записи обычные интегральные суммы Римана можно по аналогии записывать в виде

$$\sigma_\tau = \sum_{E_i \in \tau} f(\xi^{(i)})\,\mu E_i.$$

Вместо символа суммирования $\sum\limits_{E_i \in \tau}$ иногда для краткости будем писать $\sum\limits_{\tau}$.

Теорема 5. *Пусть E — измеримое по Жордану множество пространства R^n, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — его разбиение, $E_0 \subset E$ и $\mu E_0 = 0$. Если функция f ограничена на множестве E, то риманов интеграл*

$$\int f(x)\,dE = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau$$

существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_{\tau(E_0)}.$$

При этом, если последний предел существует, то он равен интегралу $\int f(x)\,dE$.

Доказательство. Для всякого разбиения $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества E у каждого элемента E_i либо его замыкание $\overline{E}_i$ не пересекается со множеством E_0, и тогда $E_i \in \tau(E_0)$ (см. (44.46)), либо — пересекается (см. (44.47)), а тогда $E_i \in \tau_0(E_0)$. Следовательно, $\tau = \tau(E_0) \cup \tau_0(E_0)$, причем $\tau(E_0)$ и $\tau_0(E_0)$ не имеют общих элементов.

Положим

$$\sigma_{\tau_0(E_0)} = \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} f(\xi^{(i)})\,\mu E_i, \quad \xi^{(i)} \in E_i.$$

Здесь суммирование в правой части равенства происходит только по тем индексам i, для которых $E_i \in \tau_0(E_0)$. Очевидно, что для любой интегральной суммы Римана σ_τ справедливо равенство (см. (44.42) и (44.51))

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau(E_0)} + \sigma_{\tau_0(E_0)}. \quad (44.52)$$

В силу ограниченности на E функции f существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

Поэтому

$$|\sigma_{\tau_0(E_0)}| \leqslant \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} |f(\xi^{(i)})| \mu E_i \leqslant M \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i.$$

Поскольку согласно лемме 6

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_{\tau_0(E_0)} = 0.$$

В силу этого из равенства (44.52) следует, что интегральные суммы σ_τ и $\sigma_{\tau(E_0)}$ одновременно имеют или нет пределы при $\delta_\tau \to 0$, причем, если эти пределы существуют, то они равны. □

Из этой теоремы следует, что, если функция определена и ограничена на некотором измеримом множестве E, то при определении интеграла, как предела интегральных сумм, в них можно отбрасывать все слагаемые, соответствующие элементам разбиения, замыкания которых содержат граничные точки, ибо множество $E_0 = \partial E$ имеет меру ноль (см. теорему 1 в п. 44.1).

Из теоремы 5 следует также, что если функция f определена и ограничена на измеримом множестве E, то изменение ее значений на некотором множестве $E_0 \subset E$ меры ноль, в результате которого снова получается ограниченная на E функция, не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла от функции, если он существует. Это сразу следует из того, что, при указанном изменении функций сумма $\sigma_{\tau(E_0)}$ не меняется, а в силу теоремы 5, если ее предел при $\delta_\tau \to 0$ существует, то он равен интегралу $\int f(x)\, dE$:

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_{\tau(E_0)} = \int f(x)\, dE.$$

Из этого замечания, в частности, следует, что функция f является интегрируемой на измеримом множестве E тогда и только тогда, когда на этом множестве E интегрируема всякая функция, получающаяся из f произвольным изменением ее значений в граничных точках, т. е. на множестве $E \cap \partial E$, таким, что эти значения остаются, однако, ограниченными. При указанной операции не меняется и значение интеграла $\int f(x)\, dE$. Все это следует из того, что граница измеримого множества, а значит, и любая ее часть, имеют меру ноль.

Таким образом, интегрируемость и значение интеграла от функции по множеству E не зависят от значений функции в граничных точках измеримого множества E, если только эти значения ограничены.

44.4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА

Простейшим примером интегрируемой по Риману функции является произвольная числовая функция f, определенная на некотором множестве $E \subset R^n$, мера Жордана которого равна нулю: $\mu E = 0$. В этом случае для любого разбиения $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества E будем иметь $\mu E_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, i_0$, и потому при любом выборе точек $\xi^{(i)} \in E_i$ получим $f(\xi^{(i)})\,\mu E_i = 0$, и, следовательно, (см. (44.42))

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f;\ \xi^{(1)}, \ \ldots, \ \xi^{(i_0)}) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\,\mu E_i = 0.$$

Отсюда, согласно определению интеграла, он существует в этом случае и равен нулю:

$$\int f(x)\,dE = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = 0.$$

Поскольку функция f произвольна, то в частности, она может быть и неограниченной. Иначе говоря, условие ограниченности функции не является необходимым для ее интегрируемости по Риману на произвольном измеримом по Жордану множестве. Вспомним, что для интегрируемости функции по Риману на отрезке условие ограниченности функции было необходимым (см. теорему 1 в п. 27.2). Однако, с некоторым видоизменением теорема об ограниченности интегрируемой функции оказывается справедливой и для рассматриваемого здесь интеграла.

Предварительно докажем лемму.

Лемма 7. *Пусть функция f определена на измеримом по Жордану множестве E, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — разбиение этого множества и E^* — объединение всех элементов этого разбиения, имеющих положительную меру:* $E^* = \bigcup\limits_{\mu E_i > 0} E_i$.

Если функция f неограничена на множестве E^*, то каково бы ни было число $M > 0$, можно так выбрать точки $\xi^{(i)} \in E_i$, что будет справедливо неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\,\mu E_i \right| > M.$$

Следствие. *Пусть функция f определена на измеримом по Жордану множестве E. Если у множества E существуют сколь угодно мелкие разбиения, для которых функция f неограничена на объединении всех их элементов положительной меры, то функция f неинтегрируема на E.*

Доказательство леммы. По условию леммы множество E^* является объединением элементов E_i положительной меры разбиения τ. Поскольку всякое разбиение состоит из конечного числа элементов, то E^* является конечной суммой указанных множеств $E_i \in \tau$. Поэтому, если функция f неограничена на множестве E^*, то она неограничена и на некотором множестве E_i положительной меры. Пусть для определенности им будет множество E_1. В силу неограниченности функции f на E_1 можно выбрать такую последовательность $\xi_n^{(1)} \in E_1$, $n=1, 2, \ldots$, что будет иметь место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n^{(1)})=\infty$. Зафиксируем каким-либо образом остальные точки $\xi^{(i)} \in E_i$ при $i=2, 3, \ldots, i_0$.

Поскольку сумма $\sum\limits_{i=2}^{n} f(\xi^{(i)})\mu E_i$ — фиксированное число и $\mu E_1 > 0$, то в сумме

$$f(\xi_n^{(1)})\mu E_1+\sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i$$

при $n\to\infty$ первое слагаемое стремится к бесконечности, а второе — постоянное; отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\left|f(\xi_n^{(1)})\mu E_1+\sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i\right|=+\infty.$$

Поэтому для любого числа $M>0$ можно подобрать такой номер $n_0=n_0(M)$, что будет справедливым неравенство

$$\left|f(\xi_{n_0}^{(1)})\mu E_1+\sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i\right|>M. \ \square$$

Доказательство следствия. Если функция f интегрируема на множестве E, т. е. существует предел

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i=\int f(x)\,dE,$$

то для любого $\varepsilon>0$, например для $\varepsilon=1$, существует такое $\delta_0>0$, что для всех разбиений $\tau=\{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества E мелкости $\delta<\delta_0$ при любом выборе точек $\xi^{(i)}\in E_i\in\tau$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i-\int f(x)\,dE\right|<1$$

и, следовательно, неравенство

$$\int f(x)\,dE-1<\sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu E_i<\int f(x)\,dE+1. \qquad (44.53)$$

Если же функция f удовлетворяет условиям следствия, то у множества E существует разбиение τ мелкости $\delta_\tau < \delta_0$, для которого функция f неограничена на объединении всех элементов положительной меры этого разбиения. Тогда по лемме 7 сумму $\sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\,\mu E_i$ можно сделать сколь угодно большой по абсолютной величине за счет выбора точек $\xi^{(i)} \in E_i \in \tau$. Поэтому такая функция не может быть интегрируемой — для нее не выполняется условие (44.53). □

Покажем теперь, что если пренебречь множеством меры ноль, то всякая интегрируемая функция будет ограниченной.

Теорема 6. *Если функция f интегрируема на множестве E, то существует такое множество $E_0 \subset E$ меры ноль: $\mu E_0 = 0$, что функция f ограничена на $E \setminus E_0$.*

Доказательство. Пусть функция f интегрируема на E, и указанного в теореме множества E_0 не существует. Возьмем любое $\delta_0 > 0$ и какое-либо разбиение τ множества E мелкости $\delta_\tau < \delta_0$. Обозначим через E^* объединение всех элементов положительной меры. Тогда множество $E \setminus E^*$ является объединением конечного числа множеств $E_i \in \tau$ меры ноль, и поэтому оно само имеет меру ноль: $\mu(E \setminus E^*) = 0$. Вследствие этого по сделанному предположению функция f неограничена на множестве E^*. Отсюда, согласно следствию из леммы 7 получаем, что функция f неинтегрируема. □

Покажем теперь, что для важного класса измеримых по Жордану открытых множеств теорема об ограниченности интегрируемой функции полностью сохраняется. Для доказательства этого нам понадобится одна геометрическая лемма.

Лемма 8. *Непустое пересечение замкнутого n-мерного куба с открытым множеством n-мерного пространства имеет положительную нижнюю меру Жордана.*

Следствие. *Для любого открытого измеримого по Жордану множества существуют сколь угодно мелкие разбиения, все элементы которых имеют положительную меру.*

Доказательство леммы. Пусть Q — n-мерный куб, G — открытое множество пространства R^n и $Q \cap G \neq \varnothing$. Какова бы ни была точка $x \in Q \cap G$, в силу открытости множества G существует такая ее окрестность $U(x)$, что

$$U(x) \subset G. \tag{44.54}$$

Нетрудно убедиться, что во множестве $U(x)$ всегда имеется внутренняя точка y куба Q. В самом деле, может случиться, что сама точка x является внутренней для куба Q и тогда можно взять $y = x$. Если же x — граничная точка куба Q, то она является граничной и для множества его внутренних точек. Поэтому ее окрестность $U(x)$ заведомо содержит внутреннюю точку y куба Q

(рис. 171). В силу определения внутренней точки (см. п. 18.2) существует такая ее окрестность $V(y)$, что

$$V(y) \subset Q. \tag{44.55}$$

В силу (44.54) и (44.55) справедливы включения

$$U(x) \cap V(y) \subset U(x) \subset G, \quad U(x) \cap V(y) \subset V(y) \subset Q;$$

поэтому

$$U(x) \cap V(y) \subset Q \cap G. \tag{44.56}$$

Поскольку $y \in U(x)$ и $y \in V(y)$, то пересечение $U(x) \cap V(y)$ не пусто, ибо содержит во всяком случае точку y. Далее, будучи пересечением двух открытых множеств, оно также является открытым и потому (см. п. 44.1)

$$\mu_*[U(x) \cap V(y)] > 0.$$

В силу свойства монотонности нижней меры (см. лемму 1 в п. 44.1) из (44.56) имеем

$$\mu_*[U(x) \cap V(y)] \leqslant \mu_*(Q \cap G).$$

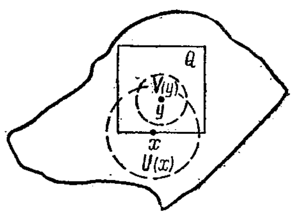

Рис. 171

Из двух последних неравенств явствует, что $\mu_*(Q \cap G) > 0$. □

Доказательство следствия. Пусть G — измеримое открытое в R^n множество. Зафиксируем разбиение пространства R^n на кубы некоторого ранга k. Множество кубов Q этого ранга, имеющих непустое пересечение со множеством G, является конечным, ибо множество G, в силу его измеримости, ограничено. Перенумеруем все указанные кубы: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{i_0}$. Множества $E_i = Q_i \cap G \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, измеримы и образуют разбиение $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества G. Действительно, с одной стороны $E_i = Q_i \cap G \subset G$, следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i \subset G$, а с другой — каждая точка $x \in G$, как и всякая точка пространства R^n принадлежит хотя бы одному кубу Q ранга k: $x \in Q \cap G$. Тогда $Q \cap G \in \tau$, т. е. при некотором i $Q = Q_i$, поэтому $x \in Q_i \cap E = E_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i$.

Таким образом, $\bigcup\limits_{i=1}^{i_0} E_i = G$.

Далее, $E_i \cap E_j \subset Q_i \cap Q_j$. Если пересечение $Q_i \cap Q_j$ непусто, то оно представляет собой куб размерности, меньшей чем n, и, следовательно, является графиком непрерывной (даже линейной) функции на компакте. Поэтому его мера равна нулю: $\mu Q_i \cap Q_j = 0$, откуда и $\mu E_i \cap E_j = 0$, $i \neq j$. Наконец, согласно лемме 8 $\mu E_i > 0$.

Очевидно, что существуют сколь угодно мелкие разбиения τ указанного вида. Действительно, каково бы ни было $\delta>0$, достаточно взять такой ранг k, чтобы $\sqrt{n}/10^k<\delta$ ($d(Q)=10^{-k}\sqrt{n}$ — диаметр куба Q ранга k) и тогда

$$d(E_i)=d(Q_i\cap G)\leqslant d(Q_i)=10^{-k}\sqrt{n}<\delta,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ i_0,$$

и поэтому $\delta_\tau<\delta$. □

Теорема 7. *Если функция интегрируема на открытом множестве, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть функция f интегрируема на открытом множестве G. Тогда, согласно определению интеграла, множество G измеримо по Жордану, а на основании следствия из леммы 8, существуют сколь угодно мелкие его разбиения, все элементы которых имеют положительную меру. Очевидно, что в силу леммы 8 для разбиений, построенных при доказательстве следствия из указанной леммы, объединение всех их элементов положительной меры совпадает с самим множеством G. Если функция f была бы неограниченной на G, то, согласно следствию из леммы 7, она была бы неинтегрируемой.

Замечание. Как видно из приведенного доказательства теоремы 7, открытость множества G потребовалась лишь для того, чтобы показать, что существуют его разбиения сколь угодно малой мелкости, все элементы которых имеют положительную меру. Тем самым для всех множеств, обладающих этим свойством, интегрируемость на них функций влечет за собой их ограниченность.

Легко, например, можно убедиться в том, что замыкание $\overline{G}$ любого измеримого открытого множества G также имеет сколь угодно мелкие разбиения, мера всех элементов которых положительна. Действительно, достаточно снова взять все кубы Q_i ранга k, имеющие с G непустое пересечение. Тогда они будут и подавно иметь непустое пересечение с замыканием $\overline{G}$ множества G: $Q_i\cap\overline{G}\supset Q_i\cap G\neq\varnothing$. При этом, поскольку $S_k(G)$ — замкнутое множество и $G\subset S_k(G)$, то $\overline{G}\subset S_k(G)$. Следовательно, если положить $E_i=Q_i\cap\overline{G}$, где $Q_i\cap G\neq\varnothing$, то $\tau=\{E_i\}$ образует покрытие замыкания $\overline{G}$ множества G, ибо многогранник $S_k(G)$ состоит только из указанных кубов Q_i, и по лемме 8

$$\mu E_i=\mu(Q_i\cap\overline{G})\geqslant\mu(Q_i\cap G)>0.$$

Упражнение 6. Построить пример функции, неограниченной и интегрируемой на множестве положительной меры.

Если функция f ограничена на измеримом множестве то, как и в одномерном случае, можно определить верхние и нижние суммы Дарбу.

Определение 5. *Пусть f — функция, ограниченная на измеримом по Жордану множестве E, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — разбиение множества E,*

$$m_i = \inf_{x \in E_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in E_i} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, i_0.$$

Тогда суммы

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu E_i, \quad S_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu E_i$$

называются соответственно нижними и верхними суммами Дарбу.

Для сумм Дарбу и интегральных сумм Римана справедливы очевидные неравенства

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau.$$

Как и для функций одной переменной, для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 справедливо неравенство

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}.$$

Теорема 8. *Для того чтобы ограниченная на измеримом по Жордану множестве $E \subset R^n$ функция f была интегрируемой по Риману на этом множестве необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{44.57}$$

При выполнении этих условий

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \int f(x)\, dE. \tag{44.58}$$

Условие (44.57) равносильно следующему

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \omega(f;\, E_i)\, \mu E_i = 0, \tag{44.59}$$

где $\omega(f;\, E_i)$ — колебание функции f на множестве $E_i \in \tau = \{E_i\}$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично одномерному случаю и рекомендуется проделать читателю самостоятельно.

Упражнение 7. Сформулировать определения пределов (44.57) — (44.59) с помощью последовательностей и используя «ε-δ-язык».

Теорема 9. *Если функция непрерывна на измеримом по Жордану компакте, то она интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть E — измеримый компакт, $E \subset R^n$, а f — непрерывная на нем функция. Всякая функция, непрерывная на компакте, ограничена (см. п. 19.5) и равномерно непрерывна (см. п. 19.6) на нем. Поэтому и здесь доказательство протекает аналогично одномерному случаю (см. п. 27.5): легко получается оценка

$$\sum_{i=1}^{i_0} \omega(f;\ E_i)\,\mu E_i \leqslant \omega(\delta_\tau;\ f)\,\mu E,$$

где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции f. Из этой оценки сразу следует выполнение условия (44.59), а поэтому, согласно теореме 8, и интегрируемость функции f. □

44.5*. ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Непрерывность функции не является необходимым условием интегрируемости: существуют и разрывные интегрируемые функции. Достаточно широкий класс разрывных интегрируемых функций устанавливается следующей теоремой.

Теорема 10. *Если функция ограничена на измеримом по Жордану компакте и множество ее точек разрыва имеет жорданову меру ноль, то эта функция интегрируема по Риману.*

Доказательство. Пусть функция f определена и ограничена на компакте, т. е. на ограниченном замкнутом множестве $E \subset R^n$. В силу ограниченности функции f на E существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant M. \tag{44.60}$$

Пусть E_0 — множество точек разрыва функции f. По условию теоремы $\mu E_0 = 0$, а поэтому для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такой ранг k, что

$$\mu S_k(E_0) < \frac{\varepsilon}{3^n 4M}. \tag{44.61}$$

Это следует из того, что в данном случае, согласно определению меры, $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu S_k(E_0) = 0$. Пусть многогранник $S_k(E_0)$ состоит из кубов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$. Обозначим через P_j куб, получающийся из Q_j преобразованием подобия с центром в центре куба Q_j и коэффициентом подобия равным трем; тогда

$$\mu P_j = 3^n \mu Q_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l. \tag{44.62}$$

Положим $P = \bigcup\limits_{j=1}^{s} P_j$. В силу неравенств (44.61) и (44.62) имеем

$$\mu P = \mu \bigcup_{j=1}^{l} P_j \leqslant \sum_{j=1}^{s} \mu P_j = \sum_{j=1}^{s} 3^n \mu Q_j = 3^n \mu S_k(E_0) < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{44.63}$$

Отметим, что множество P получается из $S_k(E_0)$ окаймлением последнего полосой кубов с ребрами длины 10^{-k}, поэтому всякое множество A с диаметром $d(A)$, меньшим чем 10^{-k}, пересекающееся с множеством $S_k(E_0)$, содержится в P (рис. 172):

$$d(A) < 10^{-k}, \quad A \cap S_k(E_0) \neq \varnothing \Rightarrow A \subset P. \tag{44.64}$$

Обозначим теперь через G множество внутренних точек многогранника $S_k(E_0)$. Очевидно, G — открытое множество, а поскольку по условиям теоремы E замкнуто, то множество $F = E \setminus G$ также замкнуто, причем в силу ограниченности E множество F ограничено, поэтому F — компакт. Далее, множество E_0 лежит внутри многогранника $S_k(E_0)$, т. е. $E_0 \subset G$ (как отмечалось выше, см. п. 44.1, это справедливо вообще для любого множества E и вытекает из определения многогранника $S_k(E)$). Отсюда явствует, что функция f непрерывна на компакте F, а поскольку, кроме того, множество F измеримо, как разность двух измеримых множеств E и G, то согласно теореме 9 функция f интегрируема на F. Поэтому для выбранного выше $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения τ_F множества F мелкости $\delta_{\tau_F} < \delta$ выполняется неравенство

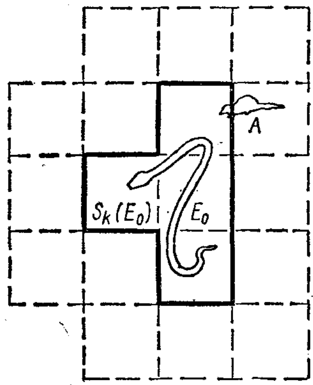

Рис. 172

$$S_{\tau_F} - s_{\tau_F} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{44.65}$$

где S_{τ_F} и s_{τ_F} — верхние и нижние суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению τ_F множества F.

Пусть

$$\delta_0 = \min\{10^{-k}, \delta\} \tag{44.66}$$

$\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — какое-либо разбиение множества E мелкости $\delta_\tau < \delta_0$. Очевидно, что $\tau_F \stackrel{\text{def}}{=} \{E_i \cap F\}$, где $E_i \cap F \neq \varnothing$, является разбиением множества F мелкости $\delta_{\tau_F} \leqslant \delta_\tau < \delta_0$, и поэтому в силу (44.66), для τ_F выполняется неравенство (44.65).

Положим

$$M_i = \sup_{x \in E_i} f(x), \qquad m_i = \inf_{x \in E_i} f(x),$$

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu E_i, \qquad s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu E_i,$$

$$M_i' = \sup_{x \in E_i \cap F} f(x), \qquad m_i' = \inf_{x \in E_i \cap F} f(x),$$

$$S_{\tau_F} = \sum_{E_i \cap F \neq \varnothing} M_i' \mu(E_i \cap F), \qquad s_{\tau_F} = \sum_{E_i \cap F \neq \varnothing} m_i' \mu(E_i \cap F).$$

Каждое множество $E_i \in \tau$ либо пересекается с G, либо нет. В случае непересечения, т. е. если $E_i \cap G = \varnothing$, то $E_i \subset F$, и для таких индексов i имеем $M_i = M_i'$, $m_i = m_i'$, $E_i \cap F = E_i$.

Поскольку $E_i \neq \varnothing$ и $E_i \subset E = F \cup G$, то из $E_i \cap G = \varnothing$ следует, что $E_i \subset F$ и, следовательно, $E_i \cap F \neq \varnothing$. Поэтому, заметив, что в нижеписанных суммах все слагаемые неотрицательны, получим:

$$\sum_{E_i \cap G = \varnothing} (M_i - m_i)\,\mu E_i = \sum_{E_i \cap G = \varnothing} (M_i' - m_i')\,\mu E_i \leq$$
$$\leq \sum_{E_i \cap F \neq \varnothing} (M_i' - m_i')\,\mu(E_i \cap F) = S_{\tau_F} - s_{\tau_F} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44.67}$$

Если же $E_i \cap G \neq \varnothing$, то в силу (44.64) и (44.66) $E_i \subset P$ и поэтому для этих индексов i (см. еще (44.63))

$$\sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} \mu E_i = \mu \bigcup_{E_i \cap G \neq \varnothing} E_i \leq \mu P < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{44.68}$$

Использовав очевидные неравенства $|m_i| \leq M$, $|M_i| \leq M$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, непосредственно вытекающие из (44.60), и применив неравенство (44.68), будем иметь

$$\sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} (M_i - m_i)\,\mu E_i \leq \sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} [|M_i| + |m_i|]\,\mu E_i \leq$$
$$\leq 2M \sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} \mu E_i < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44.69}$$

Из (44.67) и (44.69) вытекает, что

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} (M_i - m_i)\,\mu E_i =$$
$$= \sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} (M_i - m_i)\,\mu E_i + \sum_{E_i \cap G = \varnothing} (M_i - m_i)\,\mu E_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда, согласно теореме 8, следует интегрируемость функции f на множестве E. $\square$

44.6. СВОЙСТВА КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА

В этом пункте будут рассмотрены свойства кратного интеграла, аналогичные свойствам интеграла от функции одного переменного по отрезку. Напомним, что интегрируемость какой-либо функции (по Риману) на некотором множестве предполагает его измеримость по Жордану.

1°. *Пусть E — измеримое множество; тогда* $\int dE = \mu E$.

Действительно, в данном случае подынтегральная функция тождественно равна единице. Поэтому, если $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — некоторое разбиение множества E, то (см. (44.41))

$$\int dE = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i = \mu E.$$

2°. *Пусть E и E^* — измеримые множества, $E^* \subset E$ и функция f ограничена и интегрируема на E; тогда она интегрируема и на E^*.*

В самом деле, множество $E^{**} = E \setminus E^*$ также измеримо, как разность двух измеримых множеств. Пусть $\tau^* = \{E_i^*\}$ — разбиение множества E^* мелкости δ_{τ^*} и $\tau^{**} = \{E_j^{**}\}$ — разбиение множества E^{**} мелкости $\delta_{\tau^{**}} \leqslant \delta_{\tau^*}$. Тогда $\tau = \{E_i^*, E_j^{**}\}$ является разбиением множества E мелкости $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$. Если

$$\omega_\tau = \sum_{\tau^*} \omega(f, E_i^*) \mu E_i^* + \sum_{\tau^{**}} \omega(f, E_j^{**}) \mu E_j^{**}$$

и

$$\omega_{\tau^*} = \sum_{\tau^*} \omega(f, E_i^*) \mu E_i^*,$$

то, очевидно, $0 \leqslant \omega_{\tau^*} \leqslant \omega_\tau$. Но $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega_\tau = 0$, а поэтому $\lim\limits_{\delta_{\tau^*} \to 0} \omega_{\tau^*} = 0$, откуда и следует интегрируемость функции f на множестве E^* (см. (44.59)).

3°. **Аддитивность интеграла по множествам.** *Если E' и E'' — измеримые множества, $E = E' \cup E''$, $E' \cap E'' = \varnothing$ и функция f ограничена и интегрируема на множестве E, то интегралы $\int f(x)\,dE'$ и $\int f(x)\,dE''$ существуют и*

$$\int f(x)\,dE = \int f(x)\,dE' + \int f(x)\,dE''. \tag{44.70}$$

Поскольку существование интегралов $\int f(x)\,dE'$ и $\int f(x)\,dE''$ следует из свойства 2°, то нуждается в доказательстве лишь формула (44.70). Пусть $\tau' = \{E_i'\}$ и $\tau'' = \{E_j''\}$ — разбиения соответственно множеств E' и E''. Тогда $\tau = \{E_i', E_j''\}$ является разбиением множества E, и его мелкость равна наибольшей из мелкостей разбиений $\delta_{\tau'}$ и $\delta_{\tau''}$: $\delta_\tau = \max\{\delta_{\tau'}, \delta_{\tau''}\}$.

Пусть $\xi^{(i)} \in E_i'$, $\eta^{(j)} \in E_j''$,

$$\delta_{\tau'} = \sum_{\tau'} f(\xi^{(i)}) \mu E_i', \quad \sigma_{\tau''} = \sum_{\tau''} f(\eta^{(j)}) \mu E_j''$$

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau'} + \sigma_{\tau''}. \tag{44.71}$$

В силу интегрируемости функции f на множествах E, E' и E''

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=\int f(x)\,dE,\ \lim_{\delta_{\tau'}\to 0}\sigma_{\tau'}=\int f(x)\,dE',\ \lim_{\delta_{\tau''}\to 0}\sigma_{\tau''}=\int f(x)\,dE''.$$

Поэтому, переходя к пределу в равенстве (44.71) при $\delta_\tau\to 0$ получим (44.70).

Замечание. Следует обратить внимание на следующее обстоятельство: может случиться, что функция f определена на множестве $E=E'\cup E''$, где E' и E'' — измеримые множества, $E'\cap E''=\varnothing$, интегралы $\int f(x)\,dE'$ и $\int f(x)\,dE''$ существуют, а интеграл $\int f(x)\,dE$ не существует.

Поясним сказанное на примере. Пусть $(r,\ \varphi)$ — полярные координаты точки на плоскости,

$$f(r,\ \varphi)=\begin{cases}0, & \text{если } r<1,\\ 1/\varphi, & \text{если } r=1,\ 0<\varphi\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

$E'=\{(r,\ \varphi):\ r<1\}$ — открытый круг, $E''=\{(r,\ \varphi):\ r=1\}$ — окружность. Очевидно, $\mu E''=0$, а поэтому, несмотря на то, что функция f неограничена на E'' она интегрируема и $\int f(r,\ \varphi)\,dE''=0$. Существует и интеграл $\int f(r,\ \varphi)\,dE'=0$. Однако, интеграл $\int f(r,\ \varphi)\,dE$ по замкнутому кругу $E=E'\cup E''$ не существует. Действительно, множество E представляет собой замыкание области, поэтому у него существуют сколь угодно мелкие разбиения, все элементы которых имеют положительную меру. Следовательно (см. замечание к теореме 7), всякая интегрируемая на E функция ограничена, а заданная функция f неограничена и потому не интегрируема.

Важно отметить, однако, что для ограниченных функций подобной ситуации быть не может: если функция f ограничена и интегрируема на измеримых множествах E' и E'', $E'\cap E''=\varnothing$, то она интегрируема и на множестве $E=E'\cup E''$, причем справедлива формула (44.70). Это будет доказано в п. 44.7*.

Заметим лишь, что в случае, когда одно из множеств E' или E'' имеет меру ноль, то интегрируемость ограниченной функции f на их объединении, в предположении ее интегрируемости на каждом из них, можно получить почти дословным повторением рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 10. В самом деле, пусть f интегрируема и ограничена на измеримых множествах E' и E'', $\mu E'=0$, $E=E'\cup E''$. Тогда, если, как и в указанном доказательстве, построить множество $G\supset E'$ (множество E' играет здесь роль множества E_0 из теоремы 10) и положить $F=E\setminus G$, то будем иметь $F\subset E''$ и, следовательно, в силу свойства 2° интегралов, функция f окажется интегрируемой на множестве F, откуда, как и выше, вытекает ее интегрируемость на множестве E, а, значит, в силу свойства 3°, и справедливость формулы (44.70), где $\int f(x)\,dE' = 0$.

Подобным методом, только более сложным путем, можно доказать и общее утверждение.

4°. **Линейность интеграла.** *Если функции f_1 и f_2 интегрируемы на множестве E, то для любых чисел λ_1 и λ_2 существует интеграл $\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\,dE$ и справедливо равенство*

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\,dE = \lambda_1 \int f_1(x)\,dE + \lambda_2 \int f_2(x)\,dE.$$

5°. *Если функции f и g интегрируемы и ограничены на некотором множестве, то и их произведение и отношение f/g* (при $\inf\limits_E |g| > 0$) *интегрируемы на этом множестве.*

6°. **Интегрирование неравенств.** *Если функции f и g интегрируемы на множестве E, и для всех $x \in E$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int f(x)\,dE \leqslant \int g(x)\,dE$.*

7°. *Если функция f интегрируема и ограничена на множестве E, тогда и ее абсолютная величина $|f|$ интегрируема на нем, причем $\left|\int f(x)\,dE\right| \leqslant \int |f(x)|\,dE$.*

Доказательство свойств 4°, 5°, 6°, 7° проводится совершенно аналогично одномерному случаю (см. п. 28.1).

8°. **Монотонность интеграла от неотрицательных функций по множествам.** *Если E и E^* — измеримые множества, $E^* \subset E$, функция f неотрицательна, ограничена и интегрируема на E, то*

$$\int f(x)\,dE^* \leqslant \int f(x)\,dE. \tag{44.72}$$

Действительно, в силу свойств 2° и 3° интегралы $\int f(x)\,dE^*$ и $\int f(x)\,d(E \setminus E^*)$ существуют и

$$\int f(x)\,dE = \int f(x)\,dE^* + \int f(x)\,d(E \setminus E^*).$$

Поскольку $f(x) \geqslant 0$, то в силу свойства 6° $\int f(x)\,d(E \setminus E^*) \geqslant 0$, а отсюда и следует неравенство (44.72).

9°. *Пусть функция f интегрируема и неотрицательна на измеримом открытом множестве G, $x^0 \in G$, функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ и $f(x^{(0)}) > 0$. Тогда*

$$\int f(x)\,dG > 0. \tag{44.73}$$

Действительно, в силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U = U(x^{(0)})$ этой точки, что для всех $x \in U$ выполняется неравенство $f(x^{(0)}) - \varepsilon < f(x) < f(x^{(0)}) + \varepsilon$. При этом в силу открытости множества G окрестность U всегда можно выбрать так, чтобы $U \subset G$.

Выбрав $\varepsilon = \frac{f(x^{(0)})}{2}$ получим для него такую окрестность U, что для всех x, принадлежащих этой окрестности будем иметь $f(x) > \frac{f(x^{(0)})}{2}$. Отсюда, применяя последовательно свойства 8°, 6° и 1°, найдем, что

$$\int f(x)\,dG \geqslant \int f(x)\,dU \geqslant \frac{f(x^{(0)})}{2} \int dU = \frac{f(x^{(0)})}{2} \mu U > 0,$$

ибо $\mu U > 0$, как мера всякого открытого множества. □

Отметим непосредственное следствие из свойства 9°.

Следствие. *Если функция f непрерывна, интегрируема и неотрицательна на измеримом открытом множестве G и не является тождественным нулем, то* $\int f(x)\,dG > 0$.

10°. **Полная аддитивность интеграла по множествам.** *Пусть функция f ограничена и интегрируема на множестве E, а $\{E_k\}$, $k=1, 2\ldots$ — последовательность таких измеримых множеств $E_k \subset E$, что*

$$\lim_{k\to+\infty} \mu E_k = \mu E. \text{*)} \tag{44.74}$$

Тогда

$$\lim_{k\to+\infty} \int f(x)\,dE_k = \int f(x)\,dE. \tag{44.75}$$

В силу аддитивности интеграла имеем:

$$\int f(x)\,dE - \int f(x)\,dE_k = \int f(x)\,d(E \setminus E_k).$$

Поскольку по условию функция f ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in E$, то

$$\left|\int f(x)\,dE - \int f(x)\,dE_k\right| = \left|\int f(x)\,d(E\setminus E_k)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int |f(x)|\,d(E\setminus E_k) \leqslant M \int d(E\setminus E_k) = M\mu(E\setminus E_k).$$

По аддитивности меры имеем $\mu(E\setminus E_k) = \mu E - \mu E_k$, следовательно

$$\left|\int f(x)\,dE - \int f(x)\,dE_k\right| \leqslant M(\mu E - \mu E_k).$$

Отсюда в силу (44.74) и следует (44.75). □

11°. **Теорема о среднем.** *Пусть функции f и g ограничены и интегрируемы на множестве E. Если функция g не меняет знака на E и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in E$, то существует такое число λ, $m \leqslant \lambda \leqslant M$, что*

$$\int f(x)\,g(x)\,dE = \lambda \int g(x)\,dE.$$

---

*) С последовательностями измеримых множеств, обладающих свойством (44.74) мы уже встречались, см. например, теорему 2 в п. 31.2.

Следствие. *Пусть E — измеримое линейно связное множество или замыкание линейно связного множества. Тогда если функция f ограничена, интегрируема и непрерывна на E, то существует такая точка $\xi \in E$, что* $\int f(x)\,dE = f(\xi)\,\mu E$.

Теорема о среднем доказывается совершенно аналогично одномерному случаю (см. п. 28.2). Для получения следствия надо использовать теорему о промежуточных значениях функции, непрерывной на линейно связном множестве или на его замыкании (см. п. 19.5).

44.7*. КРИТЕРИИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ РИМАНА И ДАРБУ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Пусть функция f определена и ограничена на измеримом по Жордану множестве E, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — его разбиение, $m_i = \inf\limits_E f$, $M_i = \sup\limits_E f$, $s_\tau = \sum\limits_{i=1}^{i_0} m_i \mu E_i$, $S_\tau = \sum\limits_{i=1}^{i_0} M_i \mu E_i$ — нижняя и верхняя суммы Дарбу, соответствующие разбиению τ. Положим

$$I_* = \sup_\tau s_\tau, \quad I^* = \inf_\tau S_\tau; \tag{44.76}$$

I_* называется *нижним*, а I^* — *верхним интегралом Дарбу* функции f. Оказывается, что нижний и верхний интегралы Дарбу являются не только соответственно верхней и нижней гранью интегральных сумм Дарбу, но и их пределом при условии, что мелкость разбиений стремится к нулю.

Теорема 11. *Если функция f ограничена на измеримом по Жордану множестве E, то*

$$I_* = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau, \quad I^* = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau.$$

Доказательство. Установим справедливость первой формулы (вторая доказывается аналогично). Пусть $|f(x)| \leqslant M$, $x \in E$, а $\varepsilon > 0$ задано. В силу определения (44.76) существует такое разбиение $\tau^* = \{E_i^*\}$ множества E, что

$$s_{\tau^*} > I_* - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.77}$$

Здесь $s_{\tau^*} = \sum\limits_{i=1}^{i_0} m_i^* \mu E_i^*$, $m_i^* = \inf\limits_{E_i^*} f$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$. Пусть

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^{i_0} \partial E_i^*. \tag{44.78}$$

Поскольку каждое множество E_i^* измеримо, то $\mu\partial E_i^*=0$; поэтому $\mu E_0=0$. Следовательно, существует такой ранг $k=k(\varepsilon)$, что

$$\mu S_k(E_0)<\frac{\varepsilon}{3^{n+1}M}. \tag{44.79}$$

Покажем, что для любого разбиения $\tau=\{E_j\}_{j=1}^{j=j_0}$ множества E мелкости $\delta_\tau<10^{-k}$ выполняется равенство

$$I_*-\varepsilon<s_\tau\leqslant I_*. \tag{44.80}$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ это и означает, что $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0} s_\tau=I_*$.

Неравенство $s_\tau\leqslant I_*$ непосредственно вытекает из определения нижнего интеграла I_* (см. (44.76)). Поэтому надо доказать лишь неравенство

$$s_\tau>I_*-\varepsilon \tag{44.81}$$

при условии $\delta_\tau<10^{-k}$.

Пусть $S_k=S_k(E_0)$ состоит из кубов $Q_1, \ldots, Q_m$. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 10, обозначим через P_j куб, получающийся из Q_j преобразованием подобия с центром в центре куба Q_j и коэффициентом подобия, равным 3, $j=1, 2, \ldots, m$. Положим

$$P=\bigcup_{j=1}^{m} P_j, \quad G=E\diagdown P. \tag{44.82}$$

Из определений множеств P и G следует, что множество G отделено от многогранника $S_k(E_0)$ «полосой» кубов с ребрами длины 10^{-k}. Прежде всего оценим меру μP. Из определения множества P (см. 44.82)) и неравенства (44.79) имеем (сравните с (44.63))

$$\mu P=\mu\bigcup_{j=1}^{m} P_j\leqslant\sum_{j=1}^{m}\mu P_j=$$
$$=3^n\sum_{j=1}^{m}\mu Q_j=3^n\mu S_k(E_0)<\frac{\varepsilon}{3M}. \tag{44.83}$$

Далее заметим, что для любого множества $A\subset E$ с диаметром $d(A)<10^{-k}$, пересекающимся со множеством $G: A\cap G\neq\varnothing$, существует и притом единственное множество $E_i^*\in\tau^*$ такое, что

$$A\subset E_i^*. \tag{44.84}$$

Действительно, выберем какую-либо точку $x\in A\cap G$. Поскольку $A\subset E$, то $x\in E$, и поэтому точка x содержится в некотором элементе E_i^* разбиения τ^*. Для этого элемента и выполняется включение (44.84). В самом деле, если это включение не имело бы места, то нашлась бы точка $y \in A \setminus E_i^*$. Поскольку $x \in A$, $y \in A$ и $d(A) < 10^{-k}$, то $\rho(x, y) < 10^{-k}$. Следовательно, отрезок с концами в точках x и y, имея длину, меньшую, чем 10^{-k}, и один конец x во множестве G, не пересекается со множеством $S_k(E_0)$, ибо оно отделено от G полосой ширины 10^{-k}. Однако из того, что один конец отрезка принадлежит некоторому множеству, в данном случае — множеству E_i^*, а другой нет, следует (см. лемму 9 в п. 18.2), что на этом отрезке существует точка $z \in \partial E_i^*$. Но (см. (44.78)) $\partial E_i^* \subset E_0 \subset S_k(E_0)$, т. е. $z \in S_k(E_0)$. Следовательно, указанный отрезок пересекается со множеством $S_k(E_0)$. Полученное противоречие и доказывает вложение (44.84).

Докажем единственность множества E_i^*, удовлетворяющего включению (44.84). Пусть существует еще одно множество $E_k^* \in \tau^*$, такое, что $A \subset E_k^*$, $k \neq i$. Тогда $A \subset E_i^* \cap E_k^*$. Если пересечение $E_i^* \cap E_k^*$ содержало бы хоть одну точку, являющуюся одновременно внутренней для множеств E_i^* и E_k^*, то эта точка была бы внутренней и для пересечения $E_i^* \cap E_k^*$, а тогда имело бы место неравенство $\mu E_i^* \cap E_k^* > 0$. Это неравенство противоречит определению разбиения (см. п. 44.3), в силу которого $\mu E_i^* \cap E_k^* = 0$ при $i \neq k$. Следовательно, каждая точка пересечения $E_i^* \cap E_k^*$, поэтому и каждая точка множества A, является граничной точкой по крайней мере для одного из множеств E_i^*, E_k^*. Но тогда $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{i_0} \partial E_i^* = E_0 \subset S_k(E_0)$. Это невозможно, так как множество A пересекается со множеством G, которое не пересекается с $S_k(E_0)$. Противоречие получилось из предположения о существовании второго элемента E_k^* из τ^*, содержащего множество A. Следовательно такой элемент единственен.

Возьмем теперь произвольное разбиение $\tau = \{E_j\}_{j=1}^{j=j_0}$ множества E мелкости $\delta_\tau < 10^{-k}$. Нижнюю сумму Дарбу

$$s_\tau = \sum_{j=1}^{j_0} m_j \mu E_j, \quad m_j = \inf_{x \in E_j} f(x), \quad j = 1, 2, \ldots, j_0,$$

разобьем на два слагаемых, соответствующих тем E_j, которые пересекаются со множеством G, и тем, которые с ним не пересекаются и, следовательно, целиком лежат в множестве P (см. (44.82)).

$$s_\tau = \sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j + \sum_{E_j \subset P} m_j \mu E_j. \tag{44.85}$$

Использовав очевидное неравенство

$$|m_j| \leqslant M, \quad j = 1, 2, \ldots, j_0, \tag{44.86}$$

где $|f(x)| \leqslant M$, $x \in E$, и оценку (44.83), получим

$$\left|\sum_{E_j \subset P} m_j \mu E_j\right| \leqslant \sum_{E_j \subset P} |m_j| \mu E_j \leqslant M \sum_{E_j \subset P} \mu E_j \leqslant$$
$$\leqslant M\mu \bigcup_{E_j \subset P} E_j \leqslant M\mu P < M\frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

В частности, $\sum\limits_{E_j \subset P} m_j \mu E_j > -\frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому из (44.85) имеем

$$s_\tau > \sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.87}$$

Теперь заметим, что $d(E_j) \leqslant \delta_\tau < 10^{-k}$, поэтому для каждого E_j, пересекающегося со множеством G, в силу (44.84) существует такое $E_i^* \in \tau^*$, что $E_j \subset E_i^*$. Обозначим через G_i объединение всех тех E_j, которые пересекаются с G и содержатся в E_i^*:

$$G_i = \bigcup_{E_j \subset E_i^*,\ E_j \cap G \neq \varnothing} E_j.$$

Группируя в сумме $\sum\limits_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j$ слагаемые, содержащиеся в одном и том же множестве G_i, запишем ее в виде

$$\sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{E_j \subset G_i} m_j \mu E_j. \tag{44.88}$$

Для оценки внутренней суммы, заметим, что для любого $i = 1, 2, \ldots, i_0$ согласно очевидному равенству

$$E_i^* = (E_i^* \cap G_i) \cup (E_i^* \setminus G_i) = G_i \cup (E_i^* \setminus G_i)$$

(второе равенство следует из включения $G_i \subset E_i^*$) имеем

$$m_i^* \mu E_i^* = m_i^* \mu G_i + m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i) =$$
$$= m_i^* \mu \bigcup_{E_j \subset G_i} E_j + m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i) =$$
$$= m_i^* \sum_{E_j \subset G_j} \mu E_j + m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i). \tag{44.89}$$

Оценим второе слагаемое. Каждая точка $x \in E_i^* \setminus G_i$ принадлежит некоторому множеству $E_j \in \tau : x \in E_j$. Это E_j не может пересекаться с G, так как всякое $E_j \in \tau$, пересекающееся с G, целиком содержится в некотором элементе разбиения τ^* (см. (44.84)). Поскольку пересечение $E_j \cap E_i^*$ непусто: $x \in E_j \cap E_i^*$, то в данном случае этим элементом может быть только множество E_i^*, т. е. $E_j \subset E_i^*$. Но тогда, в силу определения множества G_i, имело бы место включение $E_j \subset G_i$ и, следовательно, $x \in G_i$. Это противоречит предположению, что $x \in E_i^* \setminus G_i$. Итак, множество E_j не пересекается с G и поэтому $E_j \subset P$. Отсюда, в частности, вытекает, что $x \in P$. Поскольку x — произвольная точка множества $E_i^* \setminus G_i$, то $E_i^* \setminus G_i \subset P$, и поэтому $E_i^* \setminus G_i \subset E_i^* \cap P$.

Использовав это включение и неравенство (44.86), получим

$$m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i) \leqslant M \mu E_i^* \cap P.$$

Подставив это неравенство в (44.89), будем иметь

$$m_i^* \mu E_i^* \leqslant \sum_{E_j \subset G_i} m_i^* \mu E_j + M \mu E_i^* \cap P.$$

Теперь заметив, что из включения $E_j \subset G_i \subset E_i^*$ следует неравенство $m_i^* \leqslant m_j$ (нижняя грань подмножества не меньше, чем нижняя грань самого множества), получим

$$m_i^* \mu E_i^* \leqslant \sum_{E_j \subset G_i} m_j \mu E_j + M \mu E_i^* \cap P,$$

откуда

$$\sum_{E_j \subset G_i} m_j \mu E_j \geqslant m_i^* \mu E_i^* - M \mu E_i^* \cap P.$$

Просуммировав обе части по i от 1 до i_0, в силу (44.88) будем иметь

$$\sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j \geqslant \sum_{i=1}^{i_0} m_i^* \mu E_i - M \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i^* \cap P = s_{\tau^*} - M \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i^* \cap P.$$

Поскольку, согласно (44.83)

$$\sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i^* \cap P = \mu \bigcup_{i=1}^{i_0} E_i^* \cap P \leqslant \mu P < \frac{\varepsilon}{3M},$$

то

$$\sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j > s_{\tau^*} - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.90}$$

Применив теперь последовательно неравенства (44.87), (44.90) и (44.77), получим

$$s_\tau > \sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j - \frac{\varepsilon}{3} > s_{\tau^*} - \frac{2\varepsilon}{3} > I_* - \varepsilon,$$

т. е. неравенство (44.81), а следовательно, и теорема 11, доказаны. □

С ее помощью можно установить два критерия интегрируемости ограниченной функции.

Теорема 12 (критерий Дарбу). *Ограниченная на измеримом по Жордану множестве функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний интегралы Дарбу равны.*

Доказательство. Пусть I_* и I^* — соответственно нижний и верхний интегралы Дарбу функции f, ограниченной на измеримом множестве E. Следовательно, для любого разбиения τ множества E выполняются неравенства (см. (44.76))

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau. \tag{44.91}$$

Необходимость условия $I_* = I^*$. Если функция f интегрируема на множестве E, то (см. (44.57))

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0,$$

и поскольку $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau$, то $I_* = I^*$.

Достаточность условия $I_* = I^*$. Если $I_* = I^*$, то в силу теоремы 11

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau - \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = I^* - I_* = 0,$$

и поэтому, согласно теореме 8 из п. 44.4, функция f интегрируема. $\square$

Теорема 13 (критерий Римана). *Ограниченная на измеримом по Жордану множестве E функция f интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение τ множества E, что*

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon, \tag{44.92}$$

где s_τ и S_τ — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению τ.

Доказательство. Если функция f интегрируема на множестве E, то для нее выполняется условие (44.57) (см. теорему 8 в п. 44.4). Справедливость (44.92) следует из определения предела сумм Дарбу при $\delta_\tau \to 0$.

Если, наоборот, выполняется условие (44.92), то в силу (44.91) при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon$ и потому $I_* = I^*$. Отсюда, согласно теореме 12 и вытекает, что функция f интегрируема на множестве E. $\square$

Итак, вспоминая определение кратного интеграла, данное в п. 44.3, теорему 8 из п. 44.4 и теоремы 12 и 13 этого пункта, получаем эквивалентность следующих пяти утверждений:

1) *функция f интегрируема на множестве E, т. е. существует предел* $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int f(x)\, dE$;

2) $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$;

3) $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sum\limits_{i=1}^{i_0}\omega(f;\ E_i)\mu E_i=0$, $\tau=\{E_i\}_{i=1}^{i_0}$ — *разбиение множества* E;

4) *для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое разбиение* τ *множества* E, *что* $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$;

5) $I_*=I^*$.

Таким образом выполнение каждого из этих условий равносильно существованию интеграла $\int f(x)dE$, причем

$$\int f(x)dE=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=\lim_{\delta_\tau\to 0}s_\tau=\lim_{\delta_\tau\to 0}S_\tau.$$

Замечание 1. Доказанные теоремы позволяют теперь без труда доказать аддитивность интеграла по измеримым множествам для ограниченных функций (см. п. 44.6, свойство 3) в следующем виде: *если ограниченная функция* f *интегрируема на непересекающихся множествах* E_1 и E_2, *то она интегрируема и на множестве* $E=E_1\cup E_2$.

Действительно, если функция f ограничена и интегрируема на множествах E_1 и E_2, то, в силу теоремы 13, для любого $\varepsilon>$ >0 существуют разбиения τ_1 и τ_2 соответственно множеств E_1 и E_2 такие, что

$$S_{\tau_1}-s_{\tau_1}<\frac{\varepsilon}{2},\quad S_{\tau_2}-s_{\tau_2}<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (44.93)$$

Поскольку $\tau=\tau_1\cup\tau_2$ является разбиением множества $E=E_1\cup E_2$ и соответствующие ему верхняя S_τ и нижняя s_τ суммы Дарбу выражаются через аналогичные суммы Дарбу, соответствующие разбиениям τ_1 и τ_2, по формулам $S_\tau=S_{\tau_1}+S_{\tau_2}$, $s_\tau=s_{\tau_1}+s_{\tau_2}$, то вычитая из первого из этих равенств второе, получаем в силу (44.93)

$$S_\tau-s_\tau=(S_{\tau_1}-s_{\tau_1})+(S_{\tau_2}-s_{\tau_2})<\varepsilon.$$

Из выполнения этого условия следует (снова согласно теореме 13), что функция f интегрируема на множестве E.

Замечание 2. Как уже отмечалось в п. 44.3, для функций одной переменной, определенных на отрезках, мы располагаем двумя определениями интеграла, а именно, определением, данным в п. 27.1 — с помощью разбиений отрезков только на отрезки, и определением из п. 44.3 — с помощью разбиений отрезков на любые измеримые по Жордану множества. Эти два определения эквивалентны.

Докажем это. И при первом и при втором определении необходимым условием интегрируемости является ограниченность рассматриваемой функции: см. теорему 1 в п. 27.2 и замечание к теореме 7 в п. 44.4. (отрезок является замыканием интервала, т. е. замыканием открытого множества). Поэтому рассмотрим ограниченную на некотором отрезке $[a, b]$ функцию f. Пусть для этой функции существует интеграл $I=\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu E_i$ в смысле п. 44.3, т. е. для всевозможных разбиений $\tau=\{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ отрезка $[a, b]$ на измеримые по Жордану множества E_i. Тогда, если ограничиться лишь частью разбиений τ, для которых все множества E_i являются отрезками, то при $\delta_\tau\to 0$ предел интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu E_i$ по указанной части разбиений также будет существовать и будет равен тому же числу I. Следовательно, если существует интеграл в смысле п. 44.3, то он существует и в смысле п. 27.1.

Пусть, наоборот, существует интеграл $I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в смысле п. 27.1. Тогда согласно теореме 2 из п. 27.4 $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}(S_\tau-s_\tau)=0$, где τ — разбиение отрезка $[a, b]$ на отрезки. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всякого разбиения τ отрезка $[a, b]$ на отрезки длин, не превышающих δ, справедливо неравенство $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$. Но уже из того, что существует по крайней мере одно разбиение τ, для которого выполняется неравенство $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$, следует, согласно теореме 13 из этого пункта, что функция f интегрируема в смысле определения п. 44.3.

Итак, оба определения интеграла по отрезку действительно эквивалентны.

Замечание 3. Из доказанного вытекает также следующее усиление достаточных условий интегрируемости функции, доказанных в теореме 2 из п. 27.4: для интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$ в смысле определения интеграла в п. 27.1 достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось хотя бы одно такое разбиение τ отрезка $[a, b]$ на отрезки, что для нижних и верхних сумм Дарбу соответствующих этому разбиению, выполнялось бы неравенство $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$.

Действительно, в этом случае функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ в смысле п. 44.3, а потому, согласно доказанному, и в смысле п. 27.1.

Замечание 4. Из предыдущего замечания непосредственно следует, что функция f, ограниченная на некотором отрезке $[a, b]$ и интегрируемая по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a<\eta<b$, интегрируема и на всем отрезке $[a, b]$ (это факт был отмечен нами без доказательства в п. 33.1). Действительно, если $|f(x)|\leqslant M$, $x\in[a, b]$, и задано $\varepsilon>0$, то выберем δ, $0<\delta<b-a$, так, чтобы $\delta<\frac{\varepsilon}{4M}$. Тогда в силу интегрируемости функции

f на отрезке $[a, b-\delta]$ существует такое его разбиение τ, что если s_τ и S_τ — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции для этого разбиения, то

$$S_\tau - s_\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим через τ_0 разбиение отрезка $[a, b]$, получающееся из разбиения τ_0 отрезка $[a, b-\delta]$ добавлением точки b: $\tau_0 = \tau \cup \{b\}$, и пусть $m_0 = \inf\limits_{[b-\delta, b]} f(x)$, $M_0 = \sup\limits_{[b-\delta, b]} f(x)$. Если s_{τ_0} и S_{τ_0} — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции для разбиения τ_0, то

$$S_{\tau_0} = S_\tau + M_0\delta, \quad s_{\tau_0} = s_\tau + m_0\delta.$$

Поэтому

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = S_\tau - s_\tau + (M_0 - m_0)\delta < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\delta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и, следовательно, согласно замечанию 3, функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$.

§ 45. СВЕДЕНИЕ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

Перейдем теперь к свойствам кратного интеграла, связанным со специфическими чертами, отличающими многомерный случай от одномерного. Использование этих свойств часто существенно облегчает вычисление конкретных кратных интегралов. Полные доказательства будут проводиться лишь для случая функций двух переменных. Общий, n-мерный случай, в идейном отношении не отличается от плоского, однако рассуждения там принимают более громоздкий и трудно обозримый вид.

45.1. СВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

В настоящем параграфе будет показано, что интегрирование функций многих переменных может быть сведено к последовательному интегрированию функций одной переменной. Начнем с того, что определим понятие повторного интеграла.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, такие, что $\varphi(x) \leq \psi(x)$, $a \leq x \leq b$, и пусть на множестве (рис. 173)

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \tag{45.1}$$

определена функция $f(x, y)$.

Если для любого фиксированного $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$, как функция переменного y, интегрируема на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$,