f на отрезке $[a, b-\delta]$ существует такое его разбиение τ, что если s_τ и S_τ — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции для этого разбиения, то

$$S_\tau - s_\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим через τ_0 разбиение отрезка $[a, b]$, получающееся из разбиения τ_0 отрезка $[a, b-\delta]$ добавлением точки b: $\tau_0 = \tau \cup \{b\}$, и пусть $m_0 = \inf\limits_{[b-\delta, b]} f(x)$, $M_0 = \sup\limits_{[b-\delta, b]} f(x)$. Если s_{τ_0} и S_{τ_0} — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции для разбиения τ_0, то

$$S_{\tau_0} = S_\tau + M_0\delta, \quad s_{\tau_0} = s_\tau + m_0\delta.$$

Поэтому

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = S_\tau - s_\tau + (M_0 - m_0)\delta < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\delta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и, следовательно, согласно замечанию 3, функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$.

§ 45. СВЕДЕНИЕ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

Перейдем теперь к свойствам кратного интеграла, связанным со специфическими чертами, отличающими многомерный случай от одномерного. Использование этих свойств часто существенно облегчает вычисление конкретных кратных интегралов. Полные доказательства будут проводиться лишь для случая функций двух переменных. Общий, n-мерный случай, в идейном отношении не отличается от плоского, однако рассуждения там принимают более громоздкий и трудно обозримый вид.

45.1. СВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

В настоящем параграфе будет показано, что интегрирование функций многих переменных может быть сведено к последовательному интегрированию функций одной переменной. Начнем с того, что определим понятие повторного интеграла.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, такие, что $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть на множестве (рис. 173)

$$E = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\} \tag{45.1}$$

определена функция $f(x, y)$.

Если для любого фиксированного $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$, как функция переменного y, интегрируема на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$, т. е. при любом $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dx$ и функция

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \tag{45.2}$$

интегрируема на отрезке $[a, b]$, то интеграл

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right] dx \tag{45.3}$$

называется *повторным интегралом* и обозначается через

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy. \tag{45.4}$$

Функция $F(x)$, задаваемая равенством (45.2), называется *интегралом, зависящим от параметра* x. Таким образом, повторный интеграл (45.4) является интегралом от интеграла, зависящего от параметра (см. также § 53, 54).

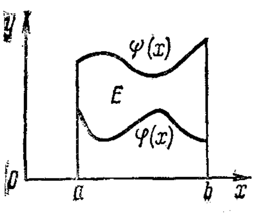

Рис. 173

Заметим, что множество E, задаваемое формулой (45.1) измеримо в смысле плоской меры Жордана и замкнуто. Действительно из непрерывности функций φ и ψ на отрезке $[a, b]$ следует их ограниченность, а поэтому множество E ограничено. Далее, его граница ∂E состоит из графиков указанных функций φ и ψ, а также, быть может, отрезков прямых $x = a$ и $x = b$. Каждое из указанных множеств имеет меру ноль (см. теорему 3 в п. 44.2), а поэтому и граница ∂E множества E также имеет меру ноль. Наконец, множество E задается с помощью нестрогих неравенств $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, где функции φ и ψ непрерывны, следовательно, эти неравенства сохраняются и при предельном переходе, откуда и вытекает замкнутость множества E. Таким образом, E — измеримый компакт.

Достаточные условия для возможности сведе́ния двукратного интеграла к повторному даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве* E, *заданном формулой* (45.1). *Тогда*

$$\iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy. \tag{45.5}$$

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *В предположениях теоремы* 1 *функция* (45.2) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство леммы. Прежде всего заметим, что интеграл (45.2) существует при любом $x \in [a, b]$. Действительно, функция $f(x, y)$, будучи непрерывной по совокупности переменных x и y, непрерывна по каждому из них. Поэтому указанный интеграл существует как интеграл от непрерывной по y функции на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$.

Выполнив в этом интеграле замену переменной y на t по формуле

$$y = \varphi(x) + [\psi(x) - \varphi(x)]\, t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{45.6}$$

получим

$$F(x) = \int_0^1 f[x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))\, t]\, (\psi(x) - \varphi(x))\, dt. \tag{45.7}$$

Положим

$$g(x, t) = f[x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))\, t]\, (\psi(x) - \varphi(x)).$$

Поскольку функция $g(x, t)$ получается с помощью арифметических операций и композиции из непрерывных функций f, φ, ψ и (45.6), то в силу теоремы о непрерывных функциях (см. п. 19.3 и 19.4) $g(x, t)$ непрерывна по совокупности переменных x, t на прямоугольнике

$$\Delta = \{(x, t) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Таким образом, для функции $F(x)$ (см. (45.2)) в силу (45.7) имеет место более простое представление

$$F(x) = \int_0^1 g(x, t)\, dt$$

(более простое в том смысле, что в нем постоянны пределы интегрирования).

Пусть теперь $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$.

Обозначим через $\omega(\delta; g)$ модуль непрерывности (см. п. 19.6) функции $g(x, t)$. Тогда

$$|F(x + \Delta x) - F(x)| = \left| \int_0^1 g(x + \Delta x, t)\, dt - \int_0^1 g(x, t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |g(x + \Delta x, t) - g(x, t)|\, dt \leqslant \omega(|\Delta x|; g). \tag{45.8}$$

Функция $g(x, t)$, будучи непрерывной на ограниченном замкнутом множестве Δ, равномерно непрерывно на нем, а поэтому (см. п. 19.6) $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta; g) = 0$. Отсюда в силу неравенства (45.8) имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] = 0,$$

что и означает непрерывность функции $F(x)$, определенной формулой (45.2). □

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что интеграл, стоящий в правой части равенства (45.5), т. е.

$$\int_b^a F(x)\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)dy,$$

является интегралом от непрерывной функции (см. лемму) и потому существует.

Разобьем теперь множество E на части E_{ij}, $i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, следующим образом. Рассмотрим разбиение $\tau_k=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a,\ b]$ на k равных отрезков:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_k=b,$$

$$x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{k},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

и пусть

$$\varphi_0(x)=\varphi(x),$$

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)+\frac{1}{k}[\psi(x)-\varphi(x)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_j(x)=\varphi(x)+\frac{j}{k}[\psi(x)-\varphi(x)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_k(x)= =\varphi(x)+\frac{k}{k}[\psi(x)-\varphi(x)]=\psi(x).$$

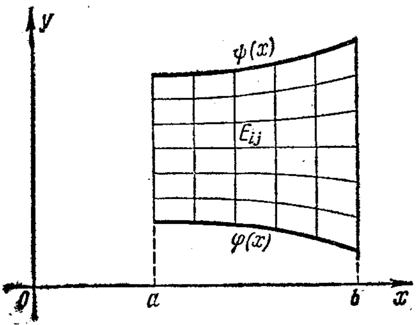

Рис. 174

Положим $E_{ij}=\{(x,\ y): x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\ \varphi_{j-1}(x)\leqslant y\leqslant\varphi_j(x)\}$, и пусть $\tau_k^*=\{E_{ij}\}$, $i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Очевидно, что τ_k^* является разбиением множества E (рис. 174).

Теперь имеем:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)dy = \sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \sum_{j=1}^{k}\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,\ y)\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,\ y)dy. \qquad (45.9)$$

Положим

$$m_{ij}=\inf_{E_{ij}} f(x,\ y)\ \text{ и }\ M_{ij}=\sup_{E_{ij}} f(x,\ y),\quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Заметив, что

$$\mu E_{ij}=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}[\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)]\,dx,$$

получим

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}dx\int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)}f(x,\ y)\,dy\leqslant M_{ij}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}dx\int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)}dy=$$

$$=M_{ij}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}[\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)]\,dx=M_{ij}\mu E_{ij},\qquad(45.10)$$

и аналогично,

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}dx\int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)}f(x,\ y)\,dy\geqslant m_{ij}\mu E_{ij}.\qquad(45.11)$$

С помощью неравенств (45.10) и (45.11) для повторного интеграла (45.9) получаем следующую оценку через нижние и верхние суммы Дарбу $s_{\tau_k^*}$ и $S_{\tau_k^*}$ функции $f(x,\ y)$:

$$s_{\tau_k^*}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}m_{ij}\mu E_{ij}\leqslant\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,\ y)\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}M_{ij}\mu E_{ij}=S_{\tau_k^*}.\qquad(45.12)$$

Для мелкости $\delta_{\tau_k^*}$ разбиения τ_k^* области G имеем $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_{\tau_k^*}=0$. Действительно, как уже отмечалось, функции φ и ψ в силу своей непрерывности ограничены на отрезке $[a,\ b]$, т. е. существует такая постоянная $M>0$, что $|\varphi(x)|\leqslant M$ и $|\psi(x)|\leqslant M$ для всех $x\in[a,\ b]$. Поэтому для диаметра $d(E_{ij})$ каждого множества $E_{ij}\in\tau_k^*$ имеем в силу определения функций φ_j

$$d(E_{ij})\leqslant\sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2+\max_{[x_{j-1},\ x_j]}[\varphi_j(x'')-\varphi_{j-1}(x')]}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2+\left[\omega\left(\frac{b-a}{k},\ \psi\right)+2\omega\left(\frac{b-a}{k},\ \varphi\right)+\frac{2M}{k}\right]^2},$$

где $\omega(\delta,\ \psi)$ и $\omega(\delta,\ \varphi)$ — модули непрерывностей функций ψ и φ.

Следовательно, $\delta_{\tau_k^*}=\max\limits_{i,\ j}d(E_{ij})\leqslant\frac{1}{k}\sqrt{(b-a)^2+4M^2}\to 0$ при $k\to$ $\to+\infty$. Поэтому, в силу интегрируемости функции $f(x,\ y)$ на E (см. п. 44.4),

$$\lim_{k\to\infty}s_{\tau_k^*}=\lim_{k\to\infty}S_{\tau_k^*}=\iint\limits_G f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Переходя теперь к пределу в неравенстве (45.12) при $k\to\infty$, получим формулу (45.5). □

Если множество E таково, что существуют такие непрерывные функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, $\alpha(y)\leqslant\beta(y)$, $c\leqslant y\leqslant d$, что

$$E=\{(x,\ y): c\leqslant y\leqslant d,\quad \alpha(y)\leqslant x\leqslant\beta(y)\},\tag{45.13}$$

а функция $f(x,\ y)$, как и раньше непрерывна на $\bar{E}$, то в силу равноправия переменных x и y, из теоремы 1 следует, что

$$\iint\limits_E f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,\ y)\,dx.\tag{45.14}$$

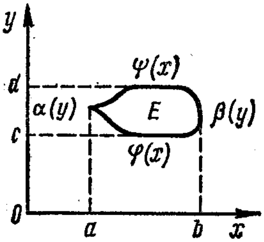

Рис. 175

Если же для множества E справедливо как равенство (45.1), так и (45.13) (рис. 175), то приравняя правые части равенств (45.5) и (45.14), для непрерывной на множестве $\bar{E}$ функции $f(x,\ y)$ получим формулу

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,\ y)\,dx,\tag{45.15}$$

выражающую собой правило перемены порядка интегрирования в повторных интегралах.

Отметим, что условия, при которых были доказаны формулы (45.5), (45.14) и (45.15), могут быть ослаблены.

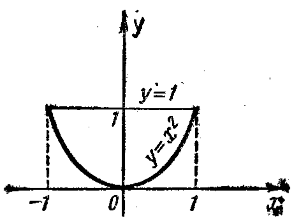

Рис. 176

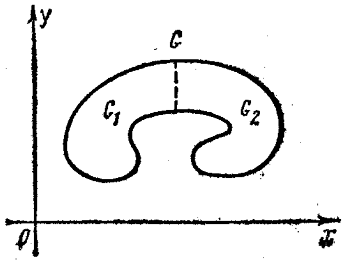

Рис. 177

Пример. Вычислим интеграл от функции $z=x^2y$ по конечной области G, ограниченной частью параболы $y=x^2$ и прямой $y=1$ (рис. 176). Имеем

$$\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy=\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx\int\limits_{x^2}^{1} y\,dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\frac{y^2}{2}\bigg|_{x^2}^{1} x^2\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^4)\,x^2\,dx=\frac{4}{21}.$$

Если требуется вычислить двойной интеграл по множеству, которое нельзя задать в виде (45.1) или (45.13), то для того чтобы использовать полученные формулы, надо попытаться разбить данное множество на части, каждая из которых будет уже иметь вид (45.1) или (45.13) (рис. 177). Если это удастся сделать, то в силу аддитивности интеграла по множествам (см. п. 44.6) вычисление данного интеграла сведется к вычислению интегралов по указанным частям, а последние с помощью формул (45.5) и (45.14) могут быть сведены к однократным.

Упражнения. Вычислить интегралы:

1. $\iint\limits_E \frac{dx\,dy}{y}$, $E=\{(x, y): x^2-6x-5<0;\quad y>1;\quad 3x-y-2>0,\ x^2-y>0\}$.

2. $\iint\limits_E x^2y^2\,dx\,dy$, $E=\{(x, y): y>0;\ xy<1;\ x^2-3xy+2y^2<0\}$.

3. $\iint\limits_E x\,dx\,dy$, $E=\{(x, y): x<20;\ y<20;\ x-y+5>0,\ xy>6\}$.

4. $\iint\limits_E x\sqrt{1+xy}\,dx\,dy$, $E=\left\{(x, y): xy<1,\ x-1<\frac{xy}{x+1}\right\}$.

5. $\int\limits_0^1\int\limits_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$.

6. $\int\limits_0^{1/2}\int\limits_{2y}^1 \cos(x^2+1)\,dx\,dy$.

7. $\int\limits_0^1\int\limits_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3-1)\,dx\,dy$.

8. $\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-y} e^{-x^2+2x}\,dx\,dy$.

9. $\int\limits_0^1\int\limits_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3/3}\,dx\,dy$.

10. $\int\limits_0^1\int\limits_{(y-1)/2}^0 \operatorname{tg}(x^2+x)\,dx\,dy$.

Изменением порядка интегрирования упростить выражения (функция f непрерывна во всей области интегрирования):

11. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{y} f(x, y)\,dx+\int\limits_1^3 dx\int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{1} f(x, y)\,dy$.

12. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy+\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^{1/x} f(x, y)\,dy$.

13. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x, y)+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{(3-x)/2} f(x, y)\,dy$.

14. Доказать формулу Дирихле $\int\limits_a^b dx\int\limits_a^x f(x, y)\,dy=\int\limits_a^b dy\int\limits_y^b f(x, y)\,dx$.

45.2. ОБОБЩЕНИЕ НА n-МЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим сначала трехмерный случай. Пусть $E\subset R^3$ и функция $f(x, y, z)$ определена на E. Обозначим через E_{xy} проекцию множества E на координатную плоскость переменных x и y

(рис. 178):

$$E_{xy}=\{(x,\ y,\ 0)\text{: существует такое } z, \text{ что } (x,\ y,\ z)\in E\}.$$

Если множество E имеет вид

$$E=\{(x,\ y,\ z):(x,\ y)\in E_{xy},\quad \varphi_1(x,\ y)\leqslant z\leqslant\psi_1(x,\ y)\},$$

где функции $\varphi_1(x,\ y)$ и $\psi_1(x,\ y)$ непрерывны на множестве E_{xy}, которое в свою очередь представимо, например в виде (45.1), а функция $f(x,\ y,\ z)$ непрерывна на исходном множестве E, то справедлива формула, аналогичная формуле (45.5),

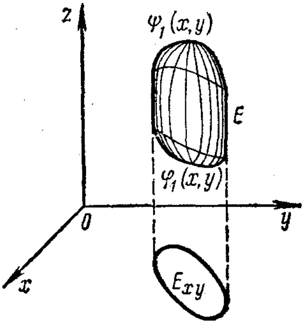

Рис. 178

$$\iiint\limits_E f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}dy\int\limits_{\varphi_1(x,\ y)}^{\psi_1(x,\ y)}f(x,\ y,\ z)\,dz. \quad (45.16)$$

Объединив в правой части два внешних интеграла, можно переписать (45.16) в виде

$$\iiint\limits_E f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{E_{xy}}dx\,dy\int\limits_{\varphi_1(x,\ y)}^{\psi_1(x,\ y)}f(x,\ y,\ z)\,dz. \quad (45.17)$$

Обозначим, теперь, через $E(x)$ сечения множества E плоскостями, перпендикулярными координатной оси Ox,

$$E(x_0)=E\cap\{(x,\ y,\ z):x=x_0\}.$$

Объединив в правой части формулы (45.16) два внутренних интеграла, получим:

$$\iiint\limits_E f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx\iint\limits_{E(x)}f(x,\ y,\ z)\,dy\,dz. \quad (45.18)$$

Таким образом, формулы (45.17) и (45.18) показывают, что в трехмерном случае существует два способа сведения трехмерного интеграла к повторному, содержащему интегралы меньшей кратности.

В частном случае, когда $f(x,\ y,\ z)\equiv 1$, имеем (см. свойство 1° кратных интегралов в п. 44.6) $\iiint dx\,dy\,dz=\mu E$, (μE — объем множества E), $\iint\limits_{E(x)}dy\,dz=\mu E(x)$, ($\mu E(x)$ площадь сечения $E(x)$). Таким образом

$$\mu E=\int\limits_a^b\mu E(x)\,dx. \quad (45.19)$$

— объем тела равен интегралу от переменной площади сечений $E(x)$.

Пример. Найдем объем эллиптического цилиндра высоты h, в основании которого лежит эллипс с полуосями a и b. Взяв за координатную плоскость xy плоскость одного из оснований цилиндра, а за ось z — его ось симметрии, перпендикулярную основаниям (рис. 179), получим согласно формуле (45.19) $\mu E = \int\limits_0^h \mu E(z)\,dz$. Но $E(z)$ эллипс с полуосями a и b, а поэтому (см. пример 4 в п. 32.1) $\mu E(z) = \pi ab$, следовательно $\mu E = = \pi ab \int\limits_0^h dz = \pi abh$.

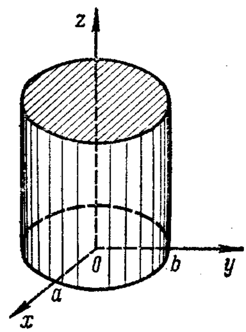

Рис. 179

Аналогично трехмерному случаю кратные интегралы от функций любого числа переменных $n > 3$ можно свести к повторным интегралам. Пусть R^n — n-мерное пространство, R^{n-1} гиперплоскость $x_n = 0$, $E \subset R^n$, $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ проекция множества E на гиперплоскость переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, т. е. на R^{n-1}:

$$E_{x_1 \ldots x_{n-1}} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0): \text{существует такое } x_n, \text{ что } (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in E\}.$$

Пусть существуют такие непрерывные на $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ функции $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, что множество E состоит из точек $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, для которых

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E_{x_1 \ldots x_{n-1}}, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Пусть множество $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ измеримо в смысле $(n-1)$-мерной меры Жордана и замкнуто. Тогда аналогично двумерному случаю (см. п. 45.1) доказывается, что E также измеримо, но уже в смысле n-мерной меры, и замкнуто, а потому является компактом.

Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна на компакте E, то справедлива формула

$$\overbrace{\int \ldots \int\limits_E}^{n \text{ раз}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int \ldots \int\limits_{E_{x_1 \ldots x_{n-1}}}}^{n-1 \text{ раз}} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_{n-1})\,dx_n, \tag{45.20}$$

которая сводит интегрирование функции n переменных к последовательному интегрированию функции одной переменной и функции $n-1$ переменных.

Если проекция $E_{x_1 \dots x_{n-1}}$ множества E на гиперплоскость R^{n-1} в свою очередь может быть представлена в виде, аналогичном виду множества E, то получившийся в правой части равенства (45.20) $(n-1)$-кратный интеграл можно свести к $(n-2)$-кратному. Продолжая этот процесс, если, конечно, это возможно, дальше, придем к формуле вида

$$\overbrace{\int \dots \int}^{n \text{ раз}}_E f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \int_{\varphi_2(x_1, x_2)}^{\psi_2(x_1, x_2)} dx_3 \dots \int_{\varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n. \tag{45.21}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае интегрирование функции от n переменных сводится к последовательному интегрированию n раз функций одной переменной.

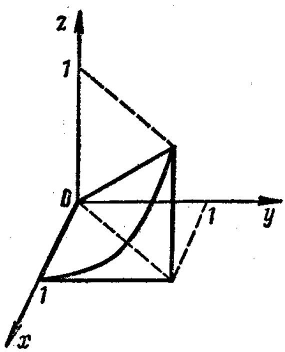

Рис. 180

Обозначим, теперь, через $E_{x_1 \dots x_m}$ проекцию множества E в пространство $R^m_{x_1 \dots x_m}$, а через $E(x_1, \dots, x_m)$ — сечение множества E гиперплоскостями размерности $n-m$, проходящими через точку $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ и ортогональными подпространству $R^m_{x_1 \dots x_m}$. Объединив в формуле (45.21) m первых и $n-m$ последних интегрирований, получим

$$\overbrace{\int \dots \int}^{n \text{ раз}}_E f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int \dots \int}^{m \text{ раз}}_{E_{x_1 \dots x_m}} dx_1 \dots dx_m \overbrace{\int \dots \int}^{n-m \text{ раз}}_{E(x_1, \dots, x_m)} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_{m+1} \dots dx_n. \tag{45.22}$$

Если $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$ на E, то из этой формулы аналогично (45.19) получаем

$$\mu E = \int \dots \int_{E_{x_1 \dots x_m}} \mu E(x_1, \dots, x_m)\, dx_1 \dots dx_m. \tag{45.23}$$

Пример. Вычислим интеграл от функции $f(x, y, z) = xy^2z^3$ по конечной области G, ограниченной поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ и $z = 0$ (рис. 180). Применив формулу (45.16), будем иметь

$$\iiint\limits_G xy^2z^3\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^x y^2\,dy\int\limits_0^{xy} z^3\,dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^5\,dx\int\limits_0^x y^6\,dy = \frac{1}{28}\int\limits_0^1 x^{12}\,dx = \frac{1}{364}.$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

15. $\iiint\limits_E z\,dx\,dy\,dz$, $E=\{(x,\ y,\ z): x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\ x^2+y^2\leqslant z^2\}$.

16. $\iiint\limits_E (x+y+z)\,x^2y^2z^2\,dx\,dy\,dz$, $E=\{(x,\ y,\ z): x\geqslant 0;\ \ y\geqslant 0;\ \ z\geqslant 0;$ $x+y+z\leqslant 1\}$.

17. $\iiint\limits_E (4x-y+z)\,dx\,dy\,dz$; область E ограничена частями поверхностей $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1,\ z=2-x^2$.

18. $\iiint\limits_E z^2\,dx\,dy\,dz$; область E общая часть шаров $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ и $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$.

45.3*. ОБОБЩЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО МИНКОВСКОГО

В качестве еще одного примера применения правила перемены порядка интегрирования докажем одно часто приемняемое интегральное неравенство.

Пусть функция $f(x,\ y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Delta = \{(x,\ y): a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$. Тогда она, очевидно, при любом фиксированном $y\in[c,\ d]$ непрерывна по x на отрезке $[a,\ b]$ и при любом фиксированном $x\in[a,\ b]$ непрерывна по y на отрезке $[c,\ d]$.

Для любого $p>1$ справедливо *обобщенное неравенство Минковского*

$$\left\{\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b |f(x,\ y)|\,dx\right]^p dy\right\}^{1/p} \leqslant \int\limits_a^b dx\left[\int\limits_c^d |f(x,\ y)|^p\,dy\right]^{1/p}. \tag{45.24}$$

Положим

$$F(y) = \int\limits_a^b |f(x,\ y)|\,dx. \tag{45.25}$$

Функция F непрерывна (см. лемму 1 в п. 45.1) и неотрицательна на отрезке $[c,\ d]$. Поэтому ее p-я степень также интегрируема и неотрицательна на этом отрезке, и $0\leqslant\int\limits_c^d F^p(y)\,dy<+\infty$.

Если $\int\limits_c^d F^p(y)\,dy=0$, то, в силу непрерывности функции F, будем иметь (см. свойство 9 п. 28.1): $F(y)\equiv 0$ на $[c,\ d]$. Поэтому из формулы (45.25) в силу того же свойства следует, что при любом $y\in[c,\ d]$ имеет место $f(x,\ y)\equiv 0$ на $[a,\ b]$, т. е. $f(x,\ y)\equiv\equiv 0$ на Δ. В этом случае неравенство (45.24) очевидно справедливо.

Пусть $\int\limits_c^d F^p(y)\,dy>0$. Тогда, изменив порядок интегрирования и применив неравенство Гельдера (28.48), получим в силу (45.25)

$$\int\limits_c^d F^p(y)\,dy=\int\limits_c^d F^{p-1}(y)\left[\int\limits_a^b |f(x,\ y)|\,dx\right]dy=$$

$$=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d |f(x,\ y)|\,F^{p-1}(y)\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d |f(x,\ y)|^p\,dy\right]^{1/p}\left[\int\limits_c^d F^{q(p-1)}(y)\,dy\right]^{1/q}dx, \qquad (45.26)$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и, следовательно $q(p-1)=p$. Сократив обе части равенства (45.26) на множитель $\left(\int\limits_c^d F^p(y)\,dy\right)^{1/q}\neq 0$, будем иметь

$$\left(\int\limits_c^d F^p(y)\,dy\right)^{1/p}\leqslant\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d |f(x,\ y)|^p\,dy\right]^{1/p}dx.$$

Подставляя сюда (45.25), получаем неравенство (45.24). Условие непрерывности функции f не является существенным для справедливости неравенства (45.24) и может быть ослаблено. Для простоты доказательства в качестве области определения функции f был взят прямоугольник. При более общих предположениях доказательство неравенства Минковского, основанное на той же идее, можно найти в монографии Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуда, Г. Полиа «Неравенства». М., 1948, 179—180.

§ 46. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

46.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ ЯКОБИАНА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Пусть G — открытое множество на плоскости R^2_{uv}, G^* — открытое множество на плоскости R^2_{xy}, F — отображение G на G^* и

$$M=(u,\ v)\in G,\quad M^*=(x,\ y)\in G^*,\quad F(M)=M^*.$$