Если $\int_c^d F^p(y)\,dy=0$, то, в силу непрерывности функции F, будем иметь (см. свойство 9 п. 28.1): $F(y)\equiv 0$ на $[c,\ d]$. Поэтому из формулы (45.25) в силу того же свойства следует, что при любом $y\in[c,\ d]$ имеет место $f(x,\ y)\equiv 0$ на $[a,\ b]$, т. е. $f(x,\ y)\equiv\equiv 0$ на Δ. В этом случае неравенство (45.24) очевидно справедливо.

Пусть $\int_c^d F^p(y)\,dy>0$. Тогда, изменив порядок интегрирования и применив неравенство Гельдера (28.48), получим в силу (45.25)

$$\int_c^d F^p(y)\,dy=\int_c^d F^{p-1}(y)\left[\int_a^b |f(x,\ y)|\,dx\right]dy=$$
$$=\int_a^b dx\int_c^d |f(x,\ y)|\,F^{p-1}(y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant\int_a^b\left[\int_c^d |f(x,\ y)|^p\,dy\right]^{1/p}\left[\int_c^d F^{q(p-1)}(y)\,dy\right]^{1/q}dx, \qquad (45.26)$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и, следовательно $q(p-1)=p$. Сократив обе части равенства (45.26) на множитель $\left(\int_c^d F^p(y)\,dy\right)^{1/q}\neq 0$, будем иметь

$$\left(\int_c^d F^p(y)\,dy\right)^{1/p}\leqslant\int_a^b\left[\int_c^d |f(x,\ y)|^p\,dy\right]^{1/p}dx.$$

Подставляя сюда (45.25), получаем неравенство (45.24). Условие непрерывности функции f не является существенным для справедливости неравенства (45.24) и может быть ослаблено. Для простоты доказательства в качестве области определения функции f был взят прямоугольник. При более общих предположениях доказательство неравенства Минковского, основанное на той же идее, можно найти в монографии Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуда, Г. Полиа «Неравенства». М., 1948, 179—180.

§ 46. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

46.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ ЯКОБИАНА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Пусть G — открытое множество на плоскости R^2_{uv}, G^* — открытое множество на плоскости R^2_{xy}, F — отображение G на G^* и

$$M=(u,\ v)\in G,\quad M^*=(x,\ y)\in G^*,\quad F(M)=M^*.$$

Отображение F задается парой функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{46.1}$$

Будем предполагать, что F удовлетворяет следующим условиям:

1) оно взаимно однозначно отображает G на G^*;
2) оно непрерывно дифференцируемо на G;
3) якобиан $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ не обращается в нуль на G.

Заметим, что отображение F^{-1}, обратное к F, также является непрерывно дифференцируемым взаимно однозначным отображением с якобианом, не равным нулю на G^* (см. п. 41.7). Поэтому, в частности, отображение F является диффеоморфным отображением открытого множества G (см. определение 11 в п. 41.7) на G^*.

Если γ — простой замкнутый контур, лежащий в G, то в силу взаимной однозначности отображения F его образ $\gamma^* = F(\gamma)$ также является простым замкнутым контуром.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *открытое ограниченное множество и* $\bar{\Gamma} \subset G$. *Тогда* $\Gamma^* = F(\Gamma)$ *также ограниченное открытое множество и*

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial\Gamma). \tag{46.2}$$

Доказательство. Поскольку F и F^{-1} — гомеоморфные отображения, то при каждом из них открытые множества отображаются в открытые. Следовательно, внутренние точки какого-либо множества, например, Γ или, соответственно Γ^* переходят во внутренние точки его образа, а граничные — в граничные.

В самом деле, пусть для примера M — внутренняя точка множества Γ, т. е. существует ее окрестность $U = U(M)$, лежащая в Γ: $U \subset \Gamma$. Тогда окрестность $U^* = F(U)$ точки $M^* = F(M)$ лежит в Γ^*: $U^* \subset \Gamma^*$, т. е. M^* внутренняя точка множества Γ^* *).

Пусть теперь M граничная точка множества Γ, $M^* = F(M)$ и U^* — окрестность точки M^*. В силу гомеоморфности отображения F множество $U = F^{-1}(F^*)$ является окрестностью точки M, а поскольку $M \in \partial\Gamma$, то в окрестности U имеются как точки, принадлежащие множеству Γ, так и не принадлежащие ему. Следовательно, в окрестности U^* точки $M^* = F(M)$ (поскольку эта окрестность является образом окрестности $U = U(M)$ точки M при отображении F) также есть точки, как принадлежащие множеству Γ^*, так и не принадлежащие ему, т. е. граничные точки действительно отображаются в граничные:

$$F(\partial\Gamma) \subset \partial\Gamma^*. \tag{46.3}$$

*) Мы получили это утверждение как прямое следствие только гомеоморфности отображения F. Конечно, в данном случае это следует сразу из более сильных сделанных выше предположений (см. следствие из теоремы 7 в п. 41.8).

Поскольку аналогичные рассуждения справедливы и для обратного отображения, то в формуле (46.3) можно заменить знак включения знаком равенства, т. е. выполняется условие (46.2). Кроме того, из открытости множества Γ в силу доказанного вытекает и открытость множества Γ^*. Далее, поскольку Γ — ограниченное множество, то замкнутое множество $\overline{\Gamma}$ также ограничено. Поэтому согласно лемме 3 из п. 41.4, множество $F(\overline{\Gamma})$ ограничено. Из ограниченности множества $F(\overline{\Gamma})$ вытекает и ограниченность множества $\Gamma^* = F(\Gamma)$, ибо $F(\Gamma) \subset F(\overline{\Gamma})$. □

Следствие. *Если в предположениях леммы* 1 *граница* Γ *состоит из конечного числа кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых, то открытые множества* Γ *и* Γ^* *квадрируемы.*

Доказательство. Если γ непрерывно дифференцируемая кривая, лежащая во множестве G, и $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — некоторое ее представление, то функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. При отображении F кривая γ перейдет в кривую $\gamma^* = F(\gamma)$ с представлением

$$x(t) = x(u(t),\ v(t)),\quad y(t) = y(u(t),\ v(t)),\qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

у которого в силу формул дифференцирования сложной функции (см. п. 20.3) и теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций (см. п. 19.4) функции $x(t)$ и $y(t)$ также имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Следовательно, кривая γ^* — также непрерывно дифференцируема. Отсюда, очевидно, сразу вытекает, что если γ — кусочно-непрерывно дифференцируемая кривая, т. е. является объединением конечного числа непрерывно дифференцируемых кривых (см. п. 16.3), то γ^* — также кусочно-непрерывно дифференцируемая кривая.

Если теперь граница $\partial\Gamma$ открытого множества $\Gamma \subset G$ состоит из конечного числа кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых, то и граница $\partial\Gamma^*$ открытого множества $\Gamma^* \subset G^*$ также, в силу сказанного выше, состоит из конечного числа кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых. Следовательно, как $\partial\Gamma$, так и $\partial\Gamma^*$ спрямляемы (см. теорему 1 в п. 16.5), вследствие чего они имеют меру ноль (см. теорему 4 в п. 44.2). Поэтому в рассматриваемом случае открытые множества Γ и Γ^*, имея границы меры ноль, — квадрируемы. □

Пусть теперь $(u_0, v_0) \in G$ и h некоторое число. Рассмотрим замкнутый квадрат S (рис. 181) с вершинами в точках

$$(u_0,\ v_0),\quad (u_0+h,\ v_0),\quad (u_0+h,\ v_0+h),\quad (u_0,\ v_0+h). \tag{46.4}$$

Пусть $S \subset G$ (при достаточно малом h это включение всегда выполняется; почему?). Граница ∂S квадрата S, состоящая из четырех его сторон, очевидно, является простым замкнутым кусочно-гладким контуром. В силу следствия из леммы 2 множество

$S^* = F(S)$ (см. рис. 181) представляет собой замкнутую квадрируемую область (то, что S^* — замкнутая **область**, следует из принципа сохранения области, см. п. 41.8).

Изучим поведение отношения

$$\mu F(S)/\mu S\ ^{*)}, \tag{46.5}$$

при стремлении h к нулю.

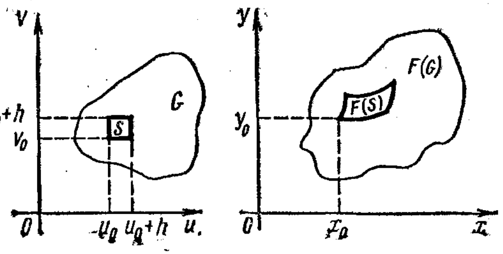

Рис. 181

Введем обозначения:

$$x(u_0, v_0) = x_0, \quad y(u_0, v_0) = y_0, \quad \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} = a_{11}, \quad \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} = a_{12},$$

$$\frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} = a_{21}, \quad \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} = a_{22}, \quad u - u_0 = \Delta u, \quad v - v_0 = \Delta v,$$

$$r = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}.$$

В силу дифференцируемости функций (46.1) справедливы формулы

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \varepsilon_1 r, \\ y &= y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \varepsilon_2 r, \end{aligned} \tag{46.6}$$

где функции $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$, $i = 1, 2$, стремятся к нулю при $r \to 0$.

Наряду с отображением F рассмотрим линейное отображение $\tilde{F}$ плоскости R^2_{uv} на плоскость R^2_{xy}, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0), \\ \tilde{y} &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0). \end{aligned} \tag{46.7}$$

Из аналитической геометрии известно, что при линейном отображении образ всякого параллелограмма, в частности — квадрата, является параллелограммом, причем отношение площади последнего к площади отображаемого параллелограмма равняется абсолютной величине определителя отображения, который для отобра-

*) Здесь, как всегда, μE обозначает меру (в данном случае — площадь) множества E.

жения $\tilde{F}$ совпадает с якобианом $J(u, v)$ отображения F в точке (u_0, v_0). Таким образом, в рассматриваемом нами случае для отображения (46.7) имеем

$$\frac{\mu\tilde{F}(S)}{\mu S} = \left| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right| = |J(u_0, v_0)|. \tag{46.8}$$

Непрерывно дифференцируемое отображение F в окрестности точки (u_0, v_0) отличается от линейного отображения $\tilde{F}$ на бесконечно малую функцию более высокого порядка, чем приращение аргументов (см. (46.6)). Покажем, что отсюда следует справедливость равенства

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(u_0, v_0)|. \tag{46.9}$$

Более того, покажем, что стремление к пределу в этом равенстве происходит равномерно на любом компакте, лежащем в открытом множестве G. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть отображение F открытого множества $G \subset R^2_{uv}$ на открытое множество $G^* \subset R^2_{xy}$ взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо на G и пусть его якобиан $J(u, v)$ не обращается в ноль на G. Тогда, если S — квадрат с вершинами* (46.4), *то*

$$\frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(u_0, v_0)| + \varepsilon(u_0, v_0, h), \tag{46.10}$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(u_0, v_0, h)$ при $h \to 0$ стремится к нулю равномерно относительно (u_0, v_0) на любом компакте $A \subset G$ *).

Следствие. *Для любой точки (u_0, v_0) открытого множества G выполняется равенство* (46.9).

Доказательство. Покажем, что площадь образа квадрата S при отображении F отличается от площади образа этого квадрата при линейном отображении $\tilde{F}$ на бесконечно малую более высокого порядка, чем площадь h^2 самого квадрата S, и эта оценка равномерна на любом компакте $A \subset G$, т. е. что

$$\mu F(S) = \mu\tilde{F}(S) + \varepsilon h^2, \tag{46.11}$$

где ε стремится к нулю равномерно на множестве A, когда длина h стороны квадрата S стремится к нулю (определение равномерного стремления функции к пределу см. в п. 39.4). Поскольку (см. (46.8))

$$\mu\tilde{F}(S) = |J(u_0, v_0)|\,\mu S \tag{46.12}$$

и

$$\mu S = h^2,$$

то из (46.11) непосредственно следует утверждение теоремы, т. е. формула (46.10).

*) Таким образом, $A \ni (u_0, v_0)$.

Переходя к доказательству формулы (46.11), зафиксируем прежде всего множество A. Поскольку A компакт и $A \subset G$, то функции $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$, $i = 1, 2$ (см. (46.6)) равномерно стремятся к нулю на множестве A при $r \to 0$ (см. замечание к теореме 4 в п. 20.2, а также п. 39.4). Множества A и $E^2_{uv} \setminus G$ не пересекаются и замкнуты, и кроме того, A ограничено, а поэтому (см. лемму 7 в п. 18.2) $\eta = \rho(A, E^2_{uv} \setminus G) > 0$.

В дальнейшем будем h всегда выбирать таким, что $|h| < \frac{\eta}{\sqrt{2}}$. В этом случае из того, что $(u_0, v_0) \in A$, следует, что $S \subset G$.

Оценим расстояние между образами одной и той же точки квадрата S при отображениях F и $\tilde{F}$. Пусть

$$M = (u, v) \in S, \quad F(M) = (x, y) \quad \text{и} \quad \tilde{F}(M) = (\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Тогда из (46.6) и (46.7) получим $x = \tilde{x} + \varepsilon_1 r$, $y = \tilde{y} + \varepsilon_2 r$ и, следовательно,

$$\rho(F(M), \tilde{F}(M)) = \sqrt{(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2} = r\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}.$$

Поскольку r — расстояние от вершины (u_0, v_0) квадрата S до точки $M \in S$, а $|h|\sqrt{2}$ — длина диагонали квадрата S, то, очевидно, выполняется неравенство $r \leqslant |h|\sqrt{2}$, а потому имеем

$$d = \sup_{M \in S} \rho(F(M), \tilde{F}(M)) \leqslant$$
$$\leqslant |h|\,\varepsilon_3(u_0, v_0, h), \qquad (46.13)$$

где $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(u_0, v_0, h) = \sup_{M \in S} \sqrt{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}$ при $h \to 0$ стремится к нулю равномерно на множестве A.

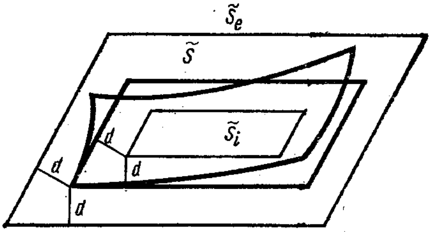

Рис. 182

Построим замкнутый $\tilde{S}_e$*) и открытый $\tilde{S}_i$**) параллелограммы со сторонами, параллельными сторонам параллелограмма $\tilde{S} = \tilde{F}(S)$ и отстоящими от его соответствующих сторон на расстояние d (рис. 182), так, чтобы

$$\tilde{S}_i \subset \tilde{S} = \tilde{F}(S) \subset \tilde{S}_e. \qquad (46.14)$$

Прежде всего покажем, что при достаточно малых h множество $\tilde{S}_i$ не пусто. Более того, покажем, что параллелограмм $\tilde{S}_i$ содержит в себе круг радиуса d с центром в центре параллелограмма S.

*) «e» — начальная буква латинского слова exterior (внешний).
**) «i» — начальная буква латинского слова interior (внутренний).

Обозначим через a и b длины сторон параллелограмма $\tilde{S}$, а через H_a и H_b — длины его высот, опущенных соответственно на стороны длин a и b (рис. 183). Для доказательства того, что при достаточно малых h круг радиуса d с центром в центре параллелограмма $\tilde{S}$ содержится в $\tilde{S}_i$, очевидно, достаточно установить справедливость при достаточно малых h неравенств

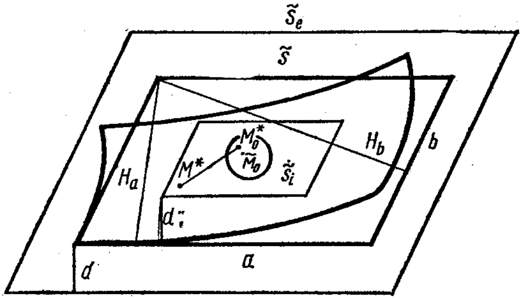

Рис. 183

$$4d < H_a, \quad 4d < H_b. \tag{46.15}$$

Докажем это. Пусть для определенности сторона параллелограмма $\tilde{S}$ длины a соединяет вершины, являющиеся при отображении $\tilde{F}$ образами вершин (u_0, v_0) и (u_0+h, v_0) квадрата S, т. е. соединяет точки (x_0, y_0) и $(x_0+a_{11}h, y_0+a_{21}h)$. Тогда

$$a=\sqrt{a_{11}^2h^2+a_{21}^2h^2}=|h|\sqrt{a_{11}^2+a_{21}^2}. \tag{46.16}$$

Аналогично,

$$b=|h|\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}. \tag{46.17}$$

Функции $a_{ij}=a_{ij}(u_0, v_0)$, $i, j=1, 2$ являются значениями соответствующих частных производных функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ в точках (u_0, v_0) компакта A. В силу предположенной непрерывности этих частных производных они ограничены на множестве A, т. е. существует такая постоянная $c_1>0$, что на A выполняются неравенства $|a_{ij}|\leqslant c_1$, $i, j=1, 2$.

Отсюда и из формул (46.16) и (46.17) следует, что

$$|a|\leqslant c_1\sqrt{2}\,|h|, \tag{46.18}$$

$$|b|\leqslant c_1\sqrt{2}\,|h|. \tag{46.19}$$

Далее, по предположению, якобиан $J(u, v)$ отображения F, являющийся непрерывной функцией, не обращается в ноль на множестве G, а следовательно, и на компакте A. Поэтому существует (почему?) такая постоянная $c_2>0$, что на множестве A выполняется неравенство

$$|J(u, v)|\geqslant c_2. \tag{46.20}$$

Заметив, что $\mu\tilde{S}=aH_a=bH_b=|J(u_0, v_0)|h^2$, получим (см. (46.18), (46.19) и (46.20)):

$$h^2=\frac{aH_a}{|J(u_0, v_0)|}\leqslant\frac{1}{c_2}\sqrt{2}\,|h|\,H_a,$$

$$h^2=\frac{bH_b}{|J(u_0, v_0)|}\leqslant\frac{1}{c_2}c_1\sqrt{2}\,|h|\,H_b,$$

т. е.

$$|h|\leqslant\frac{c_1\sqrt{2}}{c_2}H_a, \tag{46.21}$$

$$|h|\leqslant\frac{c_1\sqrt{2}}{c_2}H_b. \tag{46.22}$$

Располагая этими оценками, легко доказать справедливость неравенств (46.15). Действительно, использовав неравенства (46.13), (46.21) и (46.22), получим

$$4d\leqslant 4\varepsilon_3|h|\leqslant\frac{4\sqrt{2}\,c_1\varepsilon_3}{c_2}H_a, \tag{46.23}$$

$$4d\leqslant\frac{4\sqrt{2}\,c_1\varepsilon_3}{c_2}H_b. \tag{46.24}$$

Выберем теперь такое $\delta>0$, чтобы при $|h|<\delta$ и $(u_0, v_0)\in A$ выполнялось условие

$$\frac{4\sqrt{2}\,c_1\varepsilon_3}{c_2}<1. \tag{46.25}$$

Это всегда возможно в силу того, что функция $\varepsilon_3=\varepsilon_3(u_0, v_0, h)$ (см. (46.13)) стремится к нулю равномерно на компакте A при $h\to 0$. Из (46.23), (46.24) и (46.25) следует, что при $|h|<\delta$ выполняются неравенства (46.15), откуда, в частности, вытекает, что множество $\tilde{S}_i$ не пусто. В дальнейшем в ходе доказательства будем всегда предполагать, что $|h|<\delta$.

Множество $\tilde{S}_e\setminus\tilde{S}_i$ назовем *рамкой* и обозначим через $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}=\tilde{S}_e\setminus\tilde{S}_i.$$

Рамка $\tilde{R}$ представляет собой объединение четырех не обладающих общими внутренними точками трапеций, высоты которых имеют длину $2d$, а средние линии совпадают с соответствующими сторонами параллелограмма S. Поэтому $\mu\tilde{R}=4d(a+b)$.

Заметим, что если множество $\tilde{S}_i$ было бы пустым, то подсчет площади рамки $\tilde{R}$ пришлось бы делать иначе: указанные выше трапеции превратились бы в треугольники, у которых стороны параллелограмма $\tilde{S}$ уже не являлись бы, вообще говоря, средними линиями.

Из полученного для площади $\mu\tilde{R}$ рамки $\tilde{R}$ выражения, в силу неравенств (46.13), (46.18) и (46.19), следует, что $\mu\tilde{R} \leqslant \leqslant 8\sqrt{2}\,c_1\varepsilon_3h^2$. Положив $\varepsilon_4 = 8\sqrt{2}\,c_1\varepsilon_3$, окончательно будем иметь:

$$\mu\tilde{R} \leqslant \varepsilon_4 h^2, \tag{46.26}$$

где функция ε_4 равномерно стремится к нулю на компакте A при $h \to 0$.

Покажем теперь, что площадь множества $F(S)$ отличается от площади параллелограмма $\tilde{S} = \tilde{F}(S)$ не более чем на площадь рамки $\tilde{R}$. Для этого прежде всего установим, что

$$\tilde{S}_i \subset F(S) \subset \tilde{S}_e. \tag{46.27}$$

Действительно, если $M \in S$, то $\tilde{F}(M) \in \tilde{S}$ и согласно (46.13) $\rho(F(M),\ \tilde{F}(M)) \leqslant d$.

Далее, по построению множество $\tilde{S}_e$ содержит все точки плоскости, находящиеся от параллелограмма $\tilde{S}$ на расстоянии, не превышающем числа d. Поэтому $F(M) \in \tilde{S}_e$ и включение $F(S) \subset \subset \tilde{S}_e$ доказано. Осталось доказать, что $\tilde{S}_i \subset F(S)$. Прежде всего заметим, что

$$F(\partial S) \subset \tilde{R}. \tag{46.28}$$

Действительно, если $M \in \partial S$, то $F(M) \in \partial\tilde{S}$ и, согласно (46.13), $\rho(F(M),\ \tilde{F}(M)) \leqslant d$. Но по построению рамка $\tilde{R}$ содержит все точки плоскости, отстоящие от границы $\partial\tilde{S}$ параллелограмма $\tilde{S}$ на расстояние, не превышающее числа d, а поэтому $F(M) \in \tilde{R}$ и включение (46.28) доказано. Поскольку при сделанных предположениях граница $\partial F(S)$ образа $F(S)$ квадрата S совпадает с образом $F(\partial S)$ границы ∂S квадрата S (см. лемму 1 п. 46.1), то включение (46.28) можно переписать в виде

$$\partial F(S) \subset \tilde{R}. \tag{46.29}$$

Пусть теперь M_0 — центр квадрата S. При отображении $\tilde{F}$ он переходит в центр $\tilde{M}_0 = \tilde{F}(M_0)$ параллелограмма $\tilde{S}$. Пусть Q — замкнутый круг радиуса d с центром в точке $\tilde{M}_0$ (величина d определяется формулой (46.13)). Выше было доказано, что $Q \subset \subset \tilde{S}_i$. Если $M_0^* = F(M_0)$, то согласно (46.13), $\rho(M_0^*, \tilde{M}_0) \leqslant d$ и, следовательно, $M_0^* \in Q$, а поэтому и $M_0^* \in \tilde{S}_i$. Таким образом, $\tilde{S}_i$ содержит заведомо одну точку $F(S)$, а именно образ M_0^* центра M_0 квадрата S при отображении F.

Покажем теперь, что и все точки $\tilde{S}_i$ принадлежат $F(S)$. Допустим противное: пусть существует такая точка $M^* \in \tilde{S}_i$, что

$M^* \notin F(S)$ (см. рис. 183). Всякий отрезок является, очевидно, линейно связным множеством, а поэтому, согласно лемме 9 из п. 18.2, на отрезке $M_0^*M^*$ с концами в точках M_0^* и M^* найдется точка границы $\partial F(S)$ множества $F(S)$. Этой точкой не может являться M^*, поскольку множество $F(S)$ замкнуто (см. лемму 3 в п. 41.4), и следовательно, $\partial F(S) \subset F(S)$, а по предположению, $M^* \notin F(S)$. Поэтому точка пересечения множества $\partial F(S)$ с отрезком $M_0^*M^*$ является внутренней точкой параллелограмма $\tilde{S}_i$, а это противоречит включению (46.29).

Таким образом, не существует точки $M^* \in \tilde{S}_i$, для которой одновременно $M^* \notin F(S)$, поэтому $\tilde{S}_i \subset F(S)$. Формула (46.27) доказана.

Из (46.14) и (46.27) следует, что

$$\mu\tilde{S}_i \leqslant \mu\tilde{F}(S) \leqslant \mu\tilde{S}_e, \quad \mu\tilde{S}_i \leqslant \mu F(S) \leqslant \mu\tilde{S}_e,$$

и, следовательно,

$$|\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)| \leqslant \mu\tilde{S}_e - \mu\tilde{S}_i = \mu\tilde{R}.$$

Поэтому в силу (46.26)

$$|\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)| \leqslant \varepsilon_4 h^2, \tag{46.30}$$

где ε_4 стремится к нулю равномерно на компакте A при $h \to 0$.

Положим

$$\varepsilon(u_0, v_0, h) = \frac{\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)}{h^2}, \tag{46.31}$$

тогда из (46.30) следует, что $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_4|$ и поэтому ε равномерно на множестве A стремится к нулю при $h \to 0$. Из (46.31) имеем

$$\mu F(S) = \mu\tilde{F}(S) + \varepsilon h^2,$$

т. е. мы получили формулу (46.11), откуда, как это уже отмечалось, сразу следует (46.10). □

46.2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВУКРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Вначале сохраним обозначения и предположения предыдущего пункта, в частности, будем предполагать, что F является взаимно однозначным непрерывно дифференцируемым отображением открытого множества $G \subset R^2_{uv}$ на открытое множество $G^* \subset R^2_{xy}$ с якобианом, не равным нулю на G. Пусть Γ и Γ^* квадрируемые (и, следовательно, ограниченные) открытые множества, $\overline{\Gamma} \subset G$, $\overline{\Gamma}^* \subset G^*$ и пусть при отображении F множество $\overline{\Gamma}$ отображается на $\overline{\Gamma}^*$. Тогда $\overline{\Gamma}$ и $\overline{\Gamma}^*$ компакты, внутренние точки Γ переходят во внутренние, а граница Γ отображается на границу Γ^*.

Теорема 2 (формула замены переменных в двукратном интеграле). *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на $\overline{\Gamma}^*$. Тогда*

$$\iint\limits_{\Gamma^*} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \qquad (46.32)$$

Доказательство. Заметим, что входящие в (46.32) интегралы существуют как интегралы от функций, непрерывных на замыкании квадрируемых областей. Действительно, по условию функция $f(x, y)$ непрерывна на $\overline{\Gamma}^*$ и якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ — на $\overline{\Gamma}$, а функция $f[x(u, v), y(u, v)]$ непрерывна на $\overline{\Gamma}$ как композиция непрерывных функций.

Возьмем разбиение ранга k плоскости R_{uv} на квадраты. Ранг k выберем столь большим, чтобы всякий квадрат этого ранга, пересекающийся с $\overline{\Gamma}$, целиком содержался в G (почему такой ранг существует?). Обозначим через Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, i_k$ всевозможные непустые пересечения внутренностей (множества внутренних точек) квадратов ранга k с множеством Γ. Множества Γ_i квадрируемы и открыты, ибо их границы имеют меру ноль, так как состоят, вообще говоря, из части границы соответствующего квадрата ранга k и части границы множества Γ. Совокупность $\tau_k = \{\Gamma_i\}_{i=1}^{i=i_k}$ образует разбиение множества Γ, причем, очевидно,

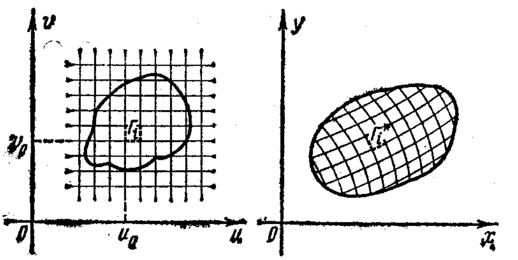

Рис. 184

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{\tau_k} = 0. \qquad (46.33)$$

Пусть далее, $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$; при этом граница Γ_i отображается на границу Γ_i^*, а поэтому граница Γ_i^*, вообще говоря, состоит из части границы множества Γ^* (эта граница в силу предположенной квадрируемости множества Γ^* имеет меру ноль) и части кусочно-гладкой кривой, являющейся образом границы соответствующего квадрата и имеет поэтому также меру ноль. Из сказанного следует, что Γ_i^* является квадрируемым открытым множеством. Из взаимной однозначности отображения F следует, что совокупность $\tau_k^* = \{\Gamma_i^*\}_{i=1}^{i=i_k}$ образует разбиение множества Γ^* (рис. 184).

Оценим мелкость разбиения τ_k^*. Пусть δ_k диаметр квадрата ранга k $\left(\text{очевидно, } \delta_k = \frac{\sqrt{2}}{10^k}\right)$ и $M_1^* = (x_1, y_1) \in \Gamma_i^*$, $M_2^* = (x_2, y_2) \in$

$\in \Gamma_i^*$. Тогда существуют такие $M_1 \in \Gamma_i$ и $M_2 \in \Gamma_i$, что $F(M_1) = M_1^*$, $F(M_2) = M_2^*$, причем $\rho(M_1, M_2) < \delta_k$. Следовательно,

$$\rho(M_1^*, M_2^*) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k;\ x)+\omega^2(\delta_k;\ y)}, \tag{46.34}$$

где $\omega(\delta; x)$ и $\omega(\delta; y)$ — модули непрерывности функций $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ на компакте $\overline{\Gamma}$. В силу непрерывности этих функций на $\overline{\Gamma}$ они равномерно непрерывны, и поэтому (см. п. 19.6)

$$\lim_{k\to\infty} \omega(\delta_k;\ x) = \lim_{k\to\infty} \omega(\delta_k;\ y) = 0. \tag{46.35}$$

Из (46.34) для диаметра $d(\Gamma_i^*)$ получаем

$$d(\Gamma_i^*) = \sup_{\substack{M_1^* \in \Gamma_i^* \\ M_2^* \in \Gamma_i^*}} \rho(M_1^*, M_2^*) \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k;\ x)+\omega^2(\delta_k;\ y)},$$

и, следовательно,

$$\delta_{\tau_k^*} = \sup_{\Gamma_i^* \in \tau_k^*} d(\Gamma_i^*) \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k;\ x)+\omega^2(\delta_k;\ y)},$$

а поэтому в силу (46.35)

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{\tau_k^*} = 0\ ^{*)}. \tag{46.36}$$

Отберем теперь только те элементы разбиений τ_k и τ_k^*, замыкания которых не пересекаются с границами $\partial\Gamma$ и $\partial\Gamma^*$ множеств Γ и Γ^*. Обозначим их соответственно через $\tau_k(\partial\Gamma)$ и $\tau_k^*(\partial\Gamma^*)$:

$$\tau_k(\partial\Gamma) = \{\Gamma_i\colon\ \Gamma_i \in \tau_k,\ \overline{\Gamma}_i \cap \partial\Gamma = \varnothing\},$$
$$\tau_k^*(\partial\Gamma^*) = \{\Gamma_i^*\colon\ \Gamma_i^* \in \tau_k^*,\ \overline{\Gamma}_i^* \cap \partial\Gamma^* = \varnothing\}.$$

В силу сделанных предположений $\Gamma_i^* \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)$; при этом $\tau_k(\partial\Gamma)$ состоит из тех и только тех элементов $\Gamma_i \in \tau_k$, которые являются целыми квадратами, содержащимися вместе с их границами в множестве Γ.

Составим интегральные суммы $\sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma^*)}$ (см. п. 44.3) для функции $f(x, y)$, взяв в качестве точек $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{\Gamma}_i \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)$ образы каких-либо вершин (u_i, v_i) соответствующих квадратов Γ_i:

$$\xi_i = x(u_i, v_i), \quad \eta_i = y(u_i, v_i). \tag{46.37}$$

---

*) Нетрудно убедиться, что равенство (46.36) можно непосредственно получить из равномерной непрерывности непрерывного отображения компакта (см. лемму 4 в п. 41.4).

Иначе говоря, рассмотрим суммы вида

$$\sigma_{\tau_k^*}(\partial\Gamma^*) = \sum_{\Gamma_i^* \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu\Gamma_i^*. \tag{46.38}$$

Как известно (см. теорему 5 в п. 44.3), в силу выполнения условия (46.36)

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau_k^*}(\partial\Gamma^*) = \iint_{\Gamma^*} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{46.39}$$

С другой стороны, для $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$, для которых Γ_i является квадратом, и, следовательно, для $\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)$, согласно теореме 1 предыдущего пункта,

$$\mu\Gamma_i^* = |J(u_i, v_i)|\,\mu\Gamma_i + \varepsilon\mu\Gamma_i, \tag{46.40}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(u_i, v_i, \delta_{\tau_k})$ на компакте $\overline{\Gamma}$ равномерно стремится к нулю при $k \to 0$. Подставляя (46.37) и (46.40) в (46.38), получим

$$\sigma_{\tau_k^*}(\partial\Gamma^*) = \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\,|J(u_i, v_i)|\,\mu\Gamma_i + \\ + \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} \varepsilon f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\,\mu\Gamma_i. \tag{46.41}$$

Суммирование в этих суммах распространено на все индексы i, для которых $\overline{\Gamma}_i$ не пересекается с границей Γ. Для первой суммы, стоящей в правой части равенства (46.41), в силу условия (46.33) имеем (см. теорему 5 в п. 44.3)

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\,|J(u_i, v_i)|\,\mu\Gamma_i = \\ = \iint_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)]\,|J(u, v)|\,du\,dv.$$

Что же касается второй суммы в равенстве (46.41), то она стремится к нулю при $k \to \infty$. Действительно, в силу непрерывности функции $f[x(u, v), y(u, v)]$ на компакте $\overline{\Gamma}$ она ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|f[x(u, v), y(u, v)]| \leqslant C, \qquad (u, v) \in \overline{\Gamma}.$$

Если фиксировано произвольное $\varepsilon_0 > 0$, то в силу равномерного на $\overline{\Gamma}$ стремления ε к нулю при $k \to \infty$ можно выбрать k_0 так, чтобы при $k \geqslant k_0$ выполнялось неравенство $|\varepsilon| < \frac{\varepsilon_0}{c\mu\Gamma}$ для всех $(u_i, v_i) \in \overline{\Gamma}_i$, $\Gamma_i \subset \overline{\Gamma}$, тогда:

$$\left| \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} \varepsilon f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] \mu\Gamma_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} |\varepsilon| \, |f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]| \mu\Gamma_i < \frac{\varepsilon_0}{\mu\Gamma} \sum_i \mu\Gamma_i \leqslant \varepsilon_0.$$

Итак,

$$\lim_{k \to \infty} \sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma)} = \iint_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)] \, |J(u, v)| \, du\, dv. \tag{46.42}$$

Из (46.39) и (46.42) и следует непосредственно формула (46.32). $\square$

Доказанная теорема легко обобщается и на несколько более общий случай, когда якобиан отображения (46.1) может обращаться в ноль на границе области интегрирования, а само отображение быть не взаимно однозначным на этой границе. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2′. *Пусть G и G^* открытые квадрируемые множества: $G \subset R^2_{uv}$, $G^* \subset R^2_{xy}$, и*

$$x = x(u, v),$$
$$y = y(u, v)$$

— непрерывное отображение $\overline{G}$ на $\overline{G}^*$, взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо отображающее G на G^*, якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ этого отображения не обращается в ноль на G и непрерывно продолжаем на $\overline{G}$. Тогда, если функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $\overline{G}^*$, то

$$\iint_{G^*} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{G} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv.$$

Доказательство. Пусть Γ_k, $k = 1, 2 \ldots$ — последовательность ограниченных открытых квадрируемых множеств, граница которых состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых, и

$$\overline{\Gamma}_k \subset G, \quad \Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = G.$$

В качестве Γ_k можно взять, например совокупность всех внутренних точек множества $S_k(G)$ (см. п. 44.1). Пусть $\Gamma_k^* = F(\Gamma_k)$; тогда Γ_k^* также является ограниченным открытым квадрируемым множеством и

$$\overline{\Gamma}_k^* = F(\overline{\Gamma}_k)' \subset G^*, \quad \Gamma_k^* \subset \Gamma_{k+1}^*, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^* = G^*.$$

Из выполнения этих условий следует, что (см. теорему 2. п. 31.2)

$$\lim_{k\to\infty}\mu\Gamma_k=\mu G,\quad \lim_{k\to\infty}\mu\Gamma_k^*=\mu G^*. \tag{46.43}$$

Для каждого из множеств Γ_k, $k=1, 2, \ldots$, выполняются все условия теоремы 2 этого пункта, поэтому

$$\iint\limits_{\Gamma_k^*} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\Gamma_k} f[x(u, v), y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{46.44}$$

Функция $f(x, y)$, как непрерывная на $\bar G^*$ функция, интегрируема на G^*, а функция $f[x(u, v), y(u, y)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ по тем же соображениям интегрируема*) на G. Поэтому в силу выполнения условий (46.43) получаем (см. свойство 10° в п. 44.6):

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_{\Gamma_k^*} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{G^*} f(x, y)\,dx\,dy,$$

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_{\Gamma_k} f[x(u, v)\, y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{G} f[x(u, v), \quad y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{46.45}$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, в равенстве (46.44) в силу формул (46.45) мы получим искомую формулу замены переменного в интеграле. □

Замена переменных в кратном интеграле часто существенно упрощает его исследование и вычисление. При этом в отличие от однократного интеграла нередко целью замены переменного является не упрощение подынтегральной функции, а переход к более простой области интегрирования, даже ценой некоторого усложнения подынтегральной функции.

Пример. Вычислим интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2<1}\cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Для этого введем новые переменные r, φ (полярные координаты) по формулам

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi. \tag{46.46}$$

Тогда $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r$. Отображение (46.46) отображает прямоугольник $G=\{(r, \varphi): 0<r<1,\ -\pi<\varphi<\pi\}$ (здесь r

*) Напомним, что в силу условий теоремы эта функция непрерывно продолжаема с множества G на $\bar G$, причем значения продолженной функции на границе множества G не влияют на значение интеграла (см. п. 44.3).

и φ рассматриваются как декартовы координаты на плоскости r, φ) взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и с якобианом, не равным нулю, на круг $K=\{(x, y): x^2+y^2<1\}$, из которого исключен радиус, лежащий на отрицательной части оси Ox, т. е. на множество (рис. 185) $G^* = K\setminus\{(x, y): x\leqslant 0, y=0\}$.

Замкнутый же прямоугольник $\bar{G}$ при отображении (46.46) переходит в замкнутый круг $\bar{G}^*=\bar{K}$, причем на границе G это отображение уже не взаимно однозначно. Якобиан отображения (46.46) непрерывен на $\bar{G}$, причем в одной точке границы, в начале координат, он обращается в ноль. Все условия, накладываемые на отображение (46.1) в теореме 2' этого пункта выполняются для отображения (46.46), а поэтому можно применить формулу замены переменного в интеграле:

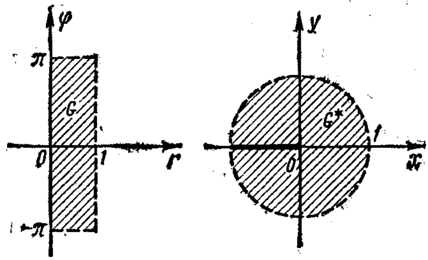

Рис. 185

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos \pi \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{\substack{0<r<1\\ -\pi<\varphi<\pi}} r \cos \pi r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \cos \pi r\, dr = 2\pi \left[\frac{r \sin \pi r}{\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin \pi r\, dr \right] = -\frac{4}{\pi}.$$

Формула (46.32) замены переменных в двойном интеграле может быть доказана и для более общего случая, в частности, когда якобиан отображения обращается в ноль в области интегрирования, а подынтегральная функция имеет разрывы. Если множества указанных точек имеют меру ноль и отображаются также во множества меры ноль, причем эти множества разбивают области интегрирования G и G^* на конечное число открытых множеств, на каждом из которых подынтегральная функция продолжаема до непрерывной вплоть до границы функции, то формула (46.32) непосредственно следует из доказанного выше.

Упражнения. 1. Пусть $f(x, y)=2\pi(x^2-y^2)\sin \pi (x-y)^2$, а E — квадрат с вершинами (1, 0), (0, 1), (—1, 0), (0, —1). С помощью замены переменных $u=x+y$, $v=x-y$ вычислить интеграл $\iint\limits_E f(x, y)\, dx\, dy$.

2. Переходом к полярным координатам вычислить интеграл $\iint\limits_E f(x, y)\, dx\, dy$, где

а) $f(x, y)=y$, $E=\{(x, y): x^2+y^2<2x,\ 0<x<y\}$;

б) $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $E=\{(x, y): x^2+y^2<1,\ x<y<\sqrt{3}x\}$.

46.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Формулы
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{46.47}$$
можно рассматривать не только как отображение, но и как переход от одной системы координат к другой, вообще говоря, криволинейной. Поясним прежде всего понятие криволинейной системы координат.

Пусть G — некоторое открытое множество на плоскости R^2_{xy} и каждой точке $M = (x, y) \in G$, а значит, и каждой упорядоченной паре чисел (x, y), являющихся координатами точки M в выбранной прямоугольной системе координат, поставлена в соответствие пара чисел (u, v) таким образом, что разным точкам M_1 и M_2 соответствуют разные пары (u_1, v_1) и (u_2, v_2). В этом случае говорят, что на множестве G задана система координат u, v. При этом если точке M соответствует пара (u, v), то пишут $M = (u, v)$. Каждая пара (u, v) является функцией точки $M \in G$, поэтому и каждый из ее элементов u и v также является функцией точки $M: u = u(M)$, $v = v(M)$, или, что то же, ее декартовых координат:
$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y). \end{aligned} \tag{46.48}$$

Обратно, каждой паре (u, v) из рассматриваемого множества пар соответствует точка $M \in G$, т. е. точка M есть функция пар $(u, v): M = M(u, v)$, а поэтому ее декартовы координаты x и y также являются функциями указанных пар (u, v). Иначе говоря, справедливы формулы (46.47), задающие отображение, обратное отображению (46.48).

Множества точек $(x, y) \in G$, удовлетворяющих условию $u(x, y) = u_0$ и соответственно $v(x, y) = v_0$, где u_0 и v_0 некоторые фиксированные постоянные, называются *координатными линиями* в системе координат u, v.

Используя формулы (46.47), координатные линии можно записать в виде
$$\begin{aligned} x &= x(u_0, v), \\ y &= y(u_0, v), \end{aligned} \tag{46.49}$$
соответственно в виде
$$\begin{aligned} x &= x(u, v_0), \\ y &= y(u, v_0). \end{aligned} \tag{46.50}$$

В случае декартовых координат координатные линии суть прямые, в общем же случае — некоторые кривые, задаваемые представлениями (46.49) и (49.50). Этим и объясняется название «криволинейные координаты» (рис. 186).

Будем предполагать, что функции (46.47) удовлетворяют на G всем условиям, при которых была выведена формула (46.32) замены переменного в интеграле, в частности, что они непрерывно дифференцируемы и что якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ не равен нулю на G. В силу этого координатные линии в окрестности каждой точки из G являются непрерывно дифференцируемыми кривыми.

Исследуем, какой смысл будет иметь в этом случае модуль якобиана. Зафиксируем какие-либо значения u_0, Δu, v_0, Δv. Пусть $M_0=(u_0, v_0)$, Γ — множество всех точек, криволинейные координаты u, v которых удовлетворяют неравенствам $u_0<u<u_0+\Delta u$, $v_0<v<v_0+\Delta v$, и пусть: $\Gamma\subset G$. Множество Γ называется *координатным* (*криволинейным*) *параллелограммом*. Множество Γ открыто (почему?), и его граница представляет собой кусочно-гладкий контур (он состоит из кривых вида $x=x(u_0, v)$, $y=y(u_0, v)$, где $v_0\leqslant v\leqslant v_0+\Delta v$ и т. п.), поэтому Γ квадрируемая область. Вычислим ее площадь (см. рис. 186). Применив формулу замены переменного в интеграле и интегральную теорему о среднем (см. п. 44.6) получим

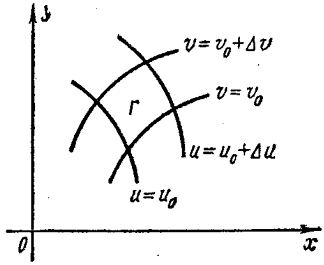

Рис. 186

$$\mu\Gamma=\iint\limits_{\Gamma} dx\,dy=\iint\limits_{\substack{u_0<u<u_0+\Delta u\\ v_0<v<v_0+\Delta v}}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv=$$

$$=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M\int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u} du\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M \Delta u\,\Delta v, \quad M\in\overline{\Gamma}.$$

В силу непрерывной дифференцируемости функций (46.47)

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}+\varepsilon,$$

где $\lim\limits_{\Delta u^2+\Delta v^2\to 0}\varepsilon=0$. Таким образом,

$$\mu\Gamma=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}\Delta u\,\Delta v+\varepsilon\,\Delta u\,\Delta v. \tag{46.51}$$

Формула (46.51) показывает, что модуль якобиана в точке (u_0, v_0) представляет собой коэффициент главной части площади координатного параллелограмма с вершиной в точке (u_0, v_0) относительно произведения $\Delta u\,\Delta v$ при $\Delta u^2+\Delta v^2\to 0$. Это замечание часто используется на практике при вычислении якобиана преобразования криволинейных координат в декартовы. Покажем это на примере полярных координат r, φ. Зафиксируем какие-либо значения r, $r+\Delta r$, φ и $\varphi+\Delta\varphi$ и рассмотрим координатный параллелограмм Γ (рис. 187), образованный координатными линиями r, $r+\Delta r$, φ и $\varphi+\Delta\varphi$. Длины двух его сторон равны соответственно Δr и $r\,\Delta\varphi$. Вычислив площадь этого параллелограмма так, как если бы он был обыкновенным прямоугольником, будем иметь

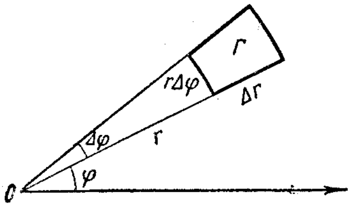

Рис. 187

$$\mu\Gamma \approx r\,\Delta r\,\Delta\varphi.$$

Таким образом, коэффициент у произведения $\Delta r\,\Delta\varphi$ оказался равным r, откуда естественно ожидать, что $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = r$. В действительности (см. пример в п. 46.2) так и есть. Это произошло потому что при наших неточных вычислениях площади Γ допущена ошибка более высокого порядка малости, чем произведение $\Delta r\,\Delta\varphi$ при $\Delta r^2+\Delta\varphi^2 \to 0$. В самом деле, вычислив $\mu\Gamma$ как разность площадей двух секторов, получим

$$\mu\Gamma = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\,\pi(r+\Delta r)^2 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\,\pi r^2 = r\,\Delta r\,\Delta\varphi + \frac{1}{2}\,\Delta r^2\,\Delta\varphi.$$

46.4. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В n-КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Все сказанное в предыдущих пунктах этого параграфа вместе с доказательством переносится и на n-мерный случай, поэтому мы ограничимся лишь формулировкой соответствующих теорем.

Теорема 3. *Пусть* $G_x \subset R_x^n$ и $G_t \subset R_t^n$ — *открытые множества,* $x = F(t) = \{x_i = x_i(t_1, \ldots, t_n),\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ — *взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение* G_t *на* G_x, *якобиан* $J(t) = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$ *которого не равен нулю на* G_t. *Пусть далее* S — *n-мерный куб*:

$$S = \{t : t_i^{(0)} \leqslant t_i \leqslant t_i^{(0)} + h, \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \subset G_t, \quad t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \ldots, t_n^{(0)}).$$

Тогда $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(t^{(0)})|$; *при этом, если*

$$\frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(t^{(0)})| + \varepsilon(t^{(0)}, h),$$

то для любого компакта $A \subset G_t$ *функция* $\varepsilon(t^{(0)}, h)$, $t^{(0)} \in A$, *равномерно стремится к нулю на* A *при* $h \to 0$.

Теорема 4. *Пусть*: 1) G_x и G_t — *измеримые открытые множества* $G_x \subset R_x^n$, $G_t \subset R_t^n$; 2) $x = F(t)$ — *непрерывное отображение* $\overline{G}_t$ *на* $\overline{G}_x$, *взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо отобра-*

жающее G_t *на* G_x; 3) *якобиан* $J(t)=\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$ *этого отображения не обращается в ноль на* G_t *и непрерывно продолжаем на* $\bar{G}_t$. *Тогда если функция* $f(x)$ *непрерывна на множестве* $\bar{G}_x$, *то*

$$\int f(x)\,dG_x=\int f(x(t))\,|J(t)|\,dG_t.$$

Упражнения. Написать формулы замены переменных в тройных интегралах для преобразований координат:

3. $x=r\cos\psi\cos\varphi$, $y=\cos\psi\sin\varphi$, $z=r\sin\psi$, $0\leqslant r<+\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$ (сферические координаты).

4. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $0\leqslant r<+\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $-\infty<z<+\infty$ (цилиндрические координаты).

Замечание. В силу формулы замены переменного для любого измеримого множества $G\subset R^n$ и любых криволинейных координат $u_1, \ldots, u_n$ справедлива формула

$$\int\underset{G}{\ldots}\int dx_1\ldots dx_n=\int\underset{G}{\ldots}\int\left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right|du_1\ldots du_n.$$

В частности, если

$$\left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right|=1, \tag{46.52}$$

то

$$\int\underset{G}{\ldots}\int dx_1\ldots dx_n=\int\underset{G}{\ldots}\int du_1\ldots du_n. \tag{46.53}$$

Условие (46.52) заведомо выполняется, если $u_1, \ldots, u_n$ также являются декартовыми координатами в пространстве R^n, и следовательно, выражаются через $x_1, \ldots, x_n$ с помощью линейного преобразования, определитель которого равен ± 1;

$$x_i=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}u_j,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad \det\|c_{ij}\|=\pm 1.$$

Левая часть формулы (46.53) равна мере μG множества G «в координатах $x_1, \ldots, x_n$» (см. свойство 1° кратного интеграла в п. 44.6), а правая часть этой формулы в случае, когда $u_1, \ldots, u_n$ — декартовы координаты, равна соответственно мере множества G «в координатах $u_1, \ldots, u_n$». Таким образом, формула (46.53) показывает, что мера открытого измеримого множества не зависит от выбора декартовой системы координат.

Справедливости ради следует заметить, что при доказательстве формулы замены переменных в кратном интеграле мы использовали тот доказываемый в геометрии факт, что при аффинных (т. е. невырожденных линейных) отображениях абсолютная величина определителя преобразования равна отношению объема параллелепипеда, являющегося образом некоторого куба к объему этого куба.

Упражнения. 5. Пусть $G=\{(x, y, z): 1<x<2;\ 1<x+y<3;\ 1<x+y+y+z<5\}$. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y)(x+y+z)}$ путем перехода к переменным u, v, w, связанным с x, y, z соотношениями $x+y+z=u$, $x+y=uv$, $x=uvw$.

6. Пусть $G=\{(x, y, z): x<yz<2x;\ y<zx<2y;\ z<xy<2z\}$. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G xyz\,dx\,dy\,dz$ путем перехода к переменным u, v, w, связанным с x, y, z соотношениями $ux=yz$, $vy=zx$, $wz=xy$.

§ 47. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

47.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

Пусть в трехмерном пространстве R^3 задана кривая $\gamma=\{r(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ (см. § 16). Мы будем рассматривать однозначные функции F, определенные на точках $r(t)$ этой кривой: $F=F(r(t))$. Если $\rho(t)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — какое-либо другое представление той же кривой γ и $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, осуществляющее эквивалентность этих представлений (т. е. $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — допустимое преобразование параметра, см. п. 16.1), то, поскольку значение функции F определяется лишь точкой кривой, будем иметь

$$F(\rho(\tau))=F(r(t)),\quad t=(\tau),\quad \alpha\leqslant\tau\leqslant\beta.$$

Рассматриваемые функции F принимают, вообще говоря, различные значения в точках кривой, соответствующих различным значениям параметра, но совпадающих как точки пространства (см. кратные точки в п. 16.1). Такая точка зрения соответствует физической интерпретации кривой γ, например, как траектории движения материальной точки, а функции F — как некоторой силы, действующей на нее, и зависящей не только от положения точки в пространстве, но и от момента, в котором эта точка находится в данном месте. Кроме того, такой подход дает и определенные математические преимущества, которые будут видны в дальнейшем.

Из сказанного следует, что указанные функции, заданные на кривой, нельзя рассматривать как функции, определенные на некотором множестве пространства R^3 и потому, строго говоря, их нельзя обозначать через $F(x, y, z)$, где x, y, z — декартовы координаты пространственных точек. Однако в рассматриваемых ниже вопросах такое обозначение является традиционным, поэтому мы будем его употреблять. Если всегда помнить, что в этих вопросах речь идет о функциях, определенных на точках кривых, то его использование не приведет к недоразумениям.