лелепипеда, являющегося образом некоторого куба к объему этого куба.

Упражнения. 5. Пусть $G=\{(x, y, z): 1<x<2;\ 1<x+y<3;\ 1<x+y+y+z<5\}$. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y)(x+y+z)}$ путем перехода к переменным u, v, w, связанным с x, y, z соотношениями $x+y+z=u$, $x+y=uv$, $x=uvw$.

6. Пусть $G=\{(x, y, z): x<yz<2x;\ y<zx<2y;\ z<xy<2z\}$. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G xyz\,dx\,dy\,dz$ путем перехода к переменным u, v, w, связанным с x, y, z соотношениями $ux=yz$, $vy=zx$, $wz=xy$.

§ 47. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

47.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

Пусть в трехмерном пространстве R^3 задана кривая $\gamma=\{r(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ (см. § 16). Мы будем рассматривать однозначные функции F, определенные на точках $r(t)$ этой кривой: $F=F(r(t))$. Если $\rho(t)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — какое-либо другое представление той же кривой γ и $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, осуществляющее эквивалентность этих представлений (т. е. $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — допустимое преобразование параметра, см. п. 16.1), то, поскольку значение функции F определяется лишь точкой кривой, будем иметь

$$F(\rho(\tau))=F(r(t)),\quad t=(\tau),\quad \alpha\leqslant\tau\leqslant\beta.$$

Рассматриваемые функции F принимают, вообще говоря, различные значения в точках кривой, соответствующих различным значениям параметра, но совпадающих как точки пространства (см. кратные точки в п. 16.1). Такая точка зрения соответствует физической интерпретации кривой γ, например, как траектории движения материальной точки, а функции F — как некоторой силы, действующей на нее, и зависящей не только от положения точки в пространстве, но и от момента, в котором эта точка находится в данном месте. Кроме того, такой подход дает и определенные математические преимущества, которые будут видны в дальнейшем.

Из сказанного следует, что указанные функции, заданные на кривой, нельзя рассматривать как функции, определенные на некотором множестве пространства R^3 и потому, строго говоря, их нельзя обозначать через $F(x, y, z)$, где x, y, z — декартовы координаты пространственных точек. Однако в рассматриваемых ниже вопросах такое обозначение является традиционным, поэтому мы будем его употреблять. Если всегда помнить, что в этих вопросах речь идет о функциях, определенных на точках кривых, то его использование не приведет к недоразумениям.

Пусть теперь задана спрямляемая ориентированная кривая γ, причем $r(s)=\{x(s),\ y(s),\ z(s);\ 0\leqslant s\leqslant S\}$ — ее представление, где в качестве параметра взята переменная длина дуги s и пусть $A=r(0)$ и $B=r(S)$ — начальная и конечная точки этой кривой. В этом случае будем писать $\gamma=\overset{\frown}{AB}$. Противоположно ориентированную кривую обозначим $\overset{\frown}{BA}$.

Определение 1. *Пусть на точках $r(s)$ кривой γ задана некоторая функция F. Тогда выражение $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds$, определяемое по формуле*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds=\int\limits_{0}^{S} F(x(s),\ y(s),\ z(s))\,ds, \tag{47.1}$$

называется криволинейным интегралом первого рода от функции F по кривой $\overset{\frown}{AB}$.

Этот интеграл обозначается также символами

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F[r(s)]\,ds \text{ и } \int\limits_{\gamma} F[r(s)]\,ds, \text{ или, короче, } \int\limits_{\gamma} F\,ds.$$

Таким образом, хотя определение криволинейного интеграла первого рода и связано с понятием кривой, т. е. с геометрическим образом, оно сводится к обычному интегралу по отрезку, и поэтому на криволинейный интеграл переносятся все свойства обычного интеграла.

Отметим некоторые специфические свойства интеграла (47.1)

1°. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds=S.$

Это очевидно.

2°. *Если функция F непрерывна в точках кривой γ как функция параметра s, т. е. если непрерывна функция $F[r(s)]$, $0\leqslant s\leqslant S$, то интеграл $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ существует.*

В самом деле, согласно определению (47.1), интеграл $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ сводится к интегралу $\int\limits_{0}^{S} F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\,ds$ от непрерывной функции по отрезку, который, как известно, существует.

3°. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой:*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds=\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x,\ y,\ z)\,ds.$$

Действительно, пусть $M=r(s)$ — точка кривой $\overset{\frown}{AB}$ и s — длина дуги $\overset{\frown}{AM}$. Если $\sigma=S-s$, то σ равняется длине дуги $\overset{\frown}{BM}$ (рис. 188).

Функция $r=r(S-\sigma)$, $0\leqslant\sigma\leqslant S$, является представлением кривой $\widehat{BA}$, поэтому, выполнив в интеграле (47.1) замену переменного $s=S-\sigma$ и заметив, что $ds=-d\sigma$, получим

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds=\int\limits_0^S F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\,ds=$$
$$=-\int\limits_S^0 F[x(S-\sigma),\ y(S-\sigma),\ z(S-\sigma)]\,d\sigma=$$
$$=\int\limits_0^S F[x(S-\sigma),\ y(S-\sigma),\ z(S-\sigma)]\,d\sigma=\int\limits_{\widehat{BA}} F(x,\ y,\ z)\,d\sigma.$$

Это свойство криволинейного интеграла первого рода связано с тем, что, согласно определению, длина дуги кривой считается положительной независимо от конца, от которого она отсчитывается.

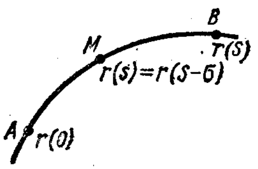

Рис. 188

Прежде чем перейти к следующему свойству, заметим, что $\int\limits_\gamma F\,ds$, как и всякий интеграл, является пределом соответствующих интегральных сумм; специфика этого случая состоит лишь в том, что эти суммы можно описать в геометрических терминах, связанных с кривой γ, по которой ведется интегрирование. Сформулируем это более точно.

4°. *Пусть* $\tau=\{s_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — *разбиение отрезка* $[0,\ S]$, $\xi_i\in[s_{i-1},\ s_i]$, $\Delta s_i=s_i-s_{i-1}$ — *длина дуги кривой* γ *от точки* $r(s_{i-1})$ *до точки* $r(s_i)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ i_0$, *и* $\sigma_\tau=\sum\limits_{i=1}^{i_0}F[r(\xi_i)]\,\Delta s_i$. *Тогда, если функция* $F[r(s)]$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[0,\ S]$, *то*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=\int\limits_\gamma F\,ds. \tag{47.2}$$

Действительно, σ_τ, очевидно, является интегральной суммой Римана интеграла $\int\limits_0^S F[r(s)]\,ds$, и поэтому формула (47.2) непосредственно следует из (47.1).

Формула (47.1) очень удобна для изучения свойства интеграла $\int\limits_\gamma F\,ds$, однако она далеко не всегда удобна для его вычисления, так как нередко бывает очень сложно или даже практически невозможно найти представление данной кривой, где за параметр взята переменная длина дуги. Укажем поэтому формулу для интеграла $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ при любом параметрическом представлении кривой γ.

5°. *Пусть* γ — *гладкая кривая* (см. определение 16 в п. 16.4), $r(t)=\{\varphi(t), \psi(t), \chi(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ — *ее непрерывно дифференцируемое представление*, и следовательно, $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)>0$, $a\leqslant\leqslant t\leqslant b$ *).

Пусть функция F *непрерывна на кривой* γ (*в том смысле, что функция* $F[r(t)]$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$). *Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} F(x, y, z)\,ds=\int\limits_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt. \quad (47.3)$$

В самом деле, при сделанных предположениях кривая γ спрямляема, и переменную длину дуги $s=s(t)$ можно принять за параметр (см. следствие 2 из теоремы 2 в п. 16.5) и потому интеграл $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ имеет смысл. Выполнив замену переменного $s=s(t)$ в правой части равенства (47.1) и вспомнив, что (см. п. 16.5)

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2},$$

получим формулу (47.3).

Из (47.3) следует, что для данной кривой значение интеграла, стоящего в правой части равенства (47.3), не зависит от выбора параметра на кривой, ибо при любом выборе параметра этот интеграл равен интегралу, стоящему в левой части этого равенства.

47.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Ряд математических и прикладных задач приводит к криволинейным интегралам другого типа. Например, если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ является радиус-вектором движущейся материальной точки, а $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$ — сила, действующая на эту точку, то естественно определить работу силы $\boldsymbol{F}$ вдоль траектории Γ рассматриваемой точки как интеграл $\int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r}$ или, если $\boldsymbol{F}=(P, Q, R)$, а $d\boldsymbol{r}=(dx, dy, dz)$, в координатной записи как интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \quad (47.4)$$

Вспоминая, что (см. п. 16.5)

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta, \quad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma, \quad (47.5)$$

*) Напомним, что это условие означает отсутствие особых точек на кривой (см. определение 15 в п. 16.4).

где $t = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор, интеграл (47.4) можно представить формально в виде

$$\int (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

Сформулируем теперь строгое определение интегралов вида (47.4). Пусть $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ — гладкая ориентированная кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая без особых точек. Тогда существует такое ее непрерывно дифференцируемое представление

$$r(t) = \{x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t);\ a \leqslant t \leqslant b\},\ A = r(a),\ B = r(b),$$

что

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) > 0,\ a \leqslant t \leqslant b.$$

Пусть $s = s(t)$ — переменная длина дуги, $0 \leqslant s \leqslant S$, S — длина всей кривой γ, отсчитываемой от конца A, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор к кривой, $\alpha = \alpha(s)$, $\beta = \beta(s)$, $\gamma = \gamma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, и пусть функция F, как и в предыдущем пункте, определена на множестве $\{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ всех точек кривой γ.

Определение 2. *Интеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx$ *определяется по формуле*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\cos\alpha\,ds. \tag{47.6}$$

Аналогично, по определению, полагается

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\cos\beta\,ds,$$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\cos\gamma\,ds. \tag{47.7}$$

Интегралы вида (47.6) *и* (47.7) *называются криволинейными интегралами второго рода от функции F по кривой $\overset{\frown}{AB}$.*

Естественность этих определений видна из формул (47.5).

Отметим некоторые свойства криволинейных интегралов второго рода, ограничиваясь для краткости только случаем интеграла (47.6).

1°. *Если функция F непрерывна на кривой γ, т. е. непрерывна функция $F[r(t)]$, $a \leqslant t \leqslant b$, то интеграл* (47.6) *существует.*

Действительно, при сделанных относительно кривой γ предположениях функция $t = t(s)$, (t — параметр на кривой γ, s — переменная длина дуги) непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, S]$, а поэтому функция $\cos\alpha = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}$ непрерывна на этом отрезке и, следовательно, в силу свойства 2° криволинейных интегралов первого рода (см. п. 47.1) интеграл (47.6) существует. □

В дальнейшем в этом пункте для простоты будем предполагать, что функция F непрерывна на кривой γ. В этом случае все написанные ниже интегралы заведомо существуют.

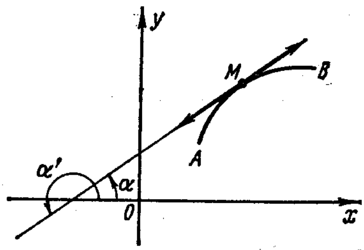

Рис. 189

2°. *Криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой, т. е.*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\,dx.$$

В самом деле, если α — угол, образованный положительным направлением касательной к кривой $\overset{\frown}{AB}$ с осью Ox, а α' — угол, образованный положительным направлением касательной к кривой $\overset{\frown}{BA}$ с осью Ox, то для соответствующих точек будем иметь $\alpha' = \alpha + \pi$ (рис. 189), и, следовательно, $\cos\alpha' = -\cos\alpha$.

Использовав теперь свойство независимости криволинейного интеграла первого рода от ориентации кривой (см. п. 47.1), получим

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\cos\alpha'\,ds = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\cos\alpha\,ds =$$
$$= -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\cos\alpha\,ds = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx.$$

Таким образом, это свойство криволинейного интеграла второго рода вытекает из того факта, что криволинейные интегралы

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\,dx$$

равны соответствующим криволинейным интегралам первого рода, подынтегральные выражения которых отличаются только знаком. □

3°. *Если F — непрерывная на кривой γ функция, то для интеграла* (47.6) *справедлива формула*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,dx = \int\limits_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (47.8)$$

Действительно, согласно определению (47.6),

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\,ds = \int\limits_0^S F[x(s), y(s), z(s)]\cos\alpha(s)\,ds.$$

Выполнив в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, замену переменного $s=s(t)$ и замечая, что (см. (47.5) $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}=\frac{x'_t}{s'_t}$, получим

$$\int_0^S F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\cos\alpha(s)\,ds =$$
$$=\int_a^b F[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\frac{x'_t}{s'_t}\,s'_t\,dt=\int_a^b F[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\,\varphi'_t(t)\,dt. \ \square$$

Отметим, что мы доказали также, что интеграл, стоящий в правой части этой формулы, не зависит от выбора параметра на кривой, сохраняющего ее ориентацию.

В частном случае, когда за параметр t можно взять переменную x, т. е. когда кривая γ обладает представлением $y=y(x)$, $z=z(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, и, следовательно, не имеет кратных точек, функция F является однозначной функцией не только точек кривой, но и соответствующих точек пространства (в этом случае разным точкам кривой соответствуют разные точки пространства и наоборот).

Формула (47.8) принимает в этом случае вид

$$\int_\gamma F(x,\ y,\ z)\,dx=\int_a^b F[x,\ y(x),\ z(x)]\,dx. \tag{47.9}$$

4. *Интеграл* $\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dx$ *является пределом соответствующих интегральных сумм, описываемых в терминах, связанных с кривой* γ, *точнее: пусть* $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — *разбиение отрезка* $[a,\ b]$, δ_τ — *его мелкость*, $\xi_i\in[t_{i-1},\ t_i]$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ i_0$, *и*

$$\tilde\sigma_\tau=\sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i=x(t_i)-x(t_{i-1})$, *тогда*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\tilde\sigma_\tau=\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dx. \tag{47.10}$$

В самом деле, по формуле конечных приращений Лагранжа $\Delta x_i=\varphi'(\eta_i)\,\Delta t_i$, где

$$\eta_i\in[t_{i-1},\ t_i],\ \Delta t_i=t_i-t_{i-1},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ i_0,$$

поэтому

$$\tilde\sigma_\tau=\sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\,\varphi'(\eta_i)\,\Delta t_i.$$

Положим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\,\varphi'(\xi_i)\,\Delta t_i.$$

Сумма σ_τ является интегральной суммой Римана для функции $F[r(t)]\,\varphi(t)$, поэтому

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b F[r(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{47.11}$$

С другой стороны

$$|\tilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau| \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} |F[r(\xi_i)]|\,|\varphi'(\eta_i) - \varphi'(\xi_i)|\,\Delta t_i \leqslant$$
$$\leqslant \omega(\delta_\tau;\ \varphi')\,(b-a) \sup_{a \leqslant t \leqslant a} |F[r(t)]|,$$

где $\omega(\delta;\ \varphi')$ — модуль непрерывности функции φ'. Так как из непрерывности функции $F[r(t)]$ на отрезке $[a, b]$ следует, что $\sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |F[r(t)]| < \infty$, а из непрерывности функции φ' на том же отрезке следует, что $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega(\delta_\tau;\ \varphi') = 0$, то $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (\tilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau) = 0$. Поэтому в силу (47.11) получим

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \tilde{\sigma}_\tau = \int_a^b F[r(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Отсюда, согласно свойству 3, следует формула (47.10). □

Мы остановились только на тех свойствах криволинейных интегралов, которые связаны со спецификой их определения, с кривой, по которой производится интегрирование. Естественно, что, поскольку рассматриваемые интегралы сводятся к обычным интегралам по отрезку, на них переносятся и различные их свойства (линейность относительно интегрируемых функций, интегральная теорема о среднем и т. д.).

47.3. РАСШИРЕНИЕ КЛАССА ДОПУСТИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПАРАМЕТРА КРИВОЙ

Непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая без особых точек определялась нами (см. п. 16.1 и 16.2*) как кривая, имеющая непрерывно дифференцируемые векторные представления $\boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, такие, что $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$. В качестве допустимых преобразований параметра при этом рассматривались такие функции

$$t = t(\tau),\quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta,\quad t(\alpha) = a,\quad t(\beta) = b,$$

которые были непрерывно дифференцируемыми и имели положительную производную на отрезке $[a, b]$. Это требование, однако, часто оказывается слишком обременительным. Например, для дуги γ единичной окружности с центром в начале координат представления

$$y=\sqrt{1-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant 1, \quad \text{и} \quad x=\sin t,\ y=\cos t,\ 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2},$$

оказываются неэквивалентными в этом смысле. Да и само представление $y=\sqrt{1-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, не определяет в нашем смысле непрерывно дифференцируемую кривую, поскольку у него при $x=1$ производная не существует. Поэтому естественно расширить класс допустимых преобразований параметров и допустимых представлений непрерывно дифференцируемых кривых. Это можно сделать следующим образом.

Рассмотрим совокупность векторных представлений $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемых на интервале (a, b). *Допустимым преобразованием параметра* будем называть всякую функцию $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$, $t(\alpha)=a$, $t(\beta)=b$, непрерывную на отрезке $[\alpha, \beta]$, непрерывно дифференцируемую и имеющую положительную производную на интервале (α, β). Как всегда, два представления называются *эквивалентными*, если можно перейти от одного к другому с помощью допустимого преобразования параметра.

Определение 3. *Класс эквивалентных представлений указанного типа задает непрерывно дифференцируемую кривую, если в этом классе существует по крайней мере одно представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, непрерывно дифференцируемое на всем отрезке $[a, b]$.*

Определение 4. *Непрерывно дифференцируемая кривая называется кривой без особых точек, или, короче, гладкой кривой, если при некотором ее представлении $\boldsymbol{r}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$ (а значит, и при всех ее представлениях) выполняется условие $\boldsymbol{r}'(t)\neq 0$, $a<t<b$.*

В смысле этого определения два вышеуказанных представления дуги окружности оказываются эквивалентны и задают гладкую кривую.

Остаются в силе и все данные выше определения криволинейных интегралов и их свойства, естественно, при учете того, что при некоторых представлениях кривых можем получить несобственный интеграл.

Следует подчеркнуть, что расширение класса представлений кривой позволяет производить вычисление криволинейного интеграла при более разнообразных представлениях кривой. Например, интеграл $\int\limits_{\gamma} P(x, y)\,dy$, где γ — рассматриваемая выше дуга единичной окружности, а P — непрерывная на γ функция, можно вычислить, пользуясь обоими указанными представлениями:

$$\int_\gamma P(x, y)\,dy = -\int_0^1 P\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int_\gamma P(x, y)\,dy = -\int_0^{\pi/2} P(\sin t, \cos t)\sin t\,dt.$$

В первом случае здесь может получиться несобственный интеграл.

Вместе с тем при доказательстве теорем можно выбирать «хорошие представления», т. е. непрерывно дифференцируемые вплоть до концов отрезка, а проведенные рассмотрения окажутся справедливыми и для расширенного понятия кривой.

Упражнение 1. Доказать, что при новом определении непрерывно дифференцируемой кривой $\gamma = \{x(t), y(t), z(t)\}$ ее длина выражается формулой $\int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$, где написанный интеграл, вообще говоря, несобственный.

47.4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО КУСОЧНО-ГЛАДКИМ КРИВЫМ

Определение 5. *Если кривая γ кусочно-гладкая, т. е. представима в виде объединения конечного числа гладких кривых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ $\ldots, \gamma_k$, а функция $F(x, y, z)$ по-прежнему определена на точках кривой γ, то, по определению, положим*

$$\int_\gamma F(x, y, z)\,dx = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} F(x, y, z)\,dx.$$

Если γ — кусочно-гладкая кривая и $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — ее кусочно-гладкое представление, то также будем писать

$$\int_\gamma F(x, y, z)\,dx = \int_a^b F[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t)\,dt$$

(здесь производная $x'(t)$ может быть не определена в конечном числе точек отрезка $[a, b]$), понимая интеграл, стоящий в правой части равенства, вообще говоря, в несобственном смысле.

Аналогичные определения имеют место и для интегралов вида (47.7). В дальнейшем придется иметь дело с суммами интегралов вида (47.6) и (47.7), т. е. с интегралами вида (47.4), где P, Q и R — некоторые функции, определенные на точках кривой γ. Согласно определениям (47.6) и (47.7), справедлива формула

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

Замечание 1. Если Γ обозначает конечную совокупность кусочно-гладких ориентированных кривых γ_i, $i=1, 2, \ldots, k$, то, по определению

$$\int_\Gamma F\,ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} F\,ds, \quad \int_\Gamma F\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} F\,dx \text{ и т. д.}$$

Замечание 2. Мы дали определение криволинейных интегралов для кривых, лежащих в трехмерном пространстве R^3. Совершенно аналогично они определяются и для кривых, лежащих в любом n-мерном пространстве R^n, $n=2, 3, 4, \ldots$. Криволинейные интегралы в n-мерном пространстве обладают свойствами, аналогичными рассмотренным выше в трехмерном случае, причем доказательства их также совершенно аналогичны приведенным выше. Поэтому мы не будем останавливаться ни на формулировках, ни на доказательствах соответствующих утверждений.

Упражнения. 2. Доказать, что данные в настоящем пункте определения криволинейных интегралов по кусочно-гладким кривым не зависят от способа разбиения этих кривых на гладкие дуги.

3. Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma \sqrt{x+2y}\,dx + \sqrt{x+y}\,dy$, где Γ — треугольный контур с вершинами $O(0;\ 0)$; $B(2;\ 0)$, $C(2;\ 4)$.

4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, где Γ — дуга астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, ограниченная точками $(a,\ 0)$ и $(0,\ a)$.

47.5. ФОРМУЛА ГРИНА

Определение 6. *Пусть простой замкнутый контур γ является границей ограниченной плоской области G. Если ориентация контура выбрана таким образом, что при обходе контура γ, соответствующем возрастанию параметра, область G остается слева (такой обход обычно называется обходом контура против направления движения часовой стрелки), то эта ориентация называется положительной, в противном же случае (т. е. когда обход контура производится по направлению движения часовой стрелки) — отрицательной* (рис. 190).

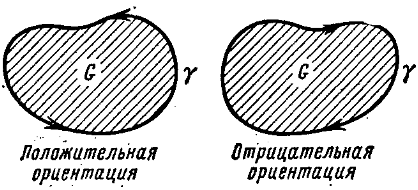

Рис. 190

Положительно ориентированный контур будем обозначать γ^+, а отрицательно ориентированный — через γ^-. Эти понятия определены не строго, не в точных математических терминах. Однако мы не будем давать здесь точных определений, с одной стороны, потому что это нельзя коротко сделать, а с другой стороны, поскольку в дальнейшем во всяком отдельном случае рассматриваемая ориентация всегда будет конкретно указываться. Тем самым наше «общее» определение положительной и отрицательной ориентации простого замкнутого контура послужит лишь для геометрической наглядности рассматриваемых ниже вопросов.

В дальнейшем плоскую область G, замыкание которой может быть представлено одновременно в виде (45.1) и (45.13) (см. рис. 156), будем для кратности называть *элементарной областью*.

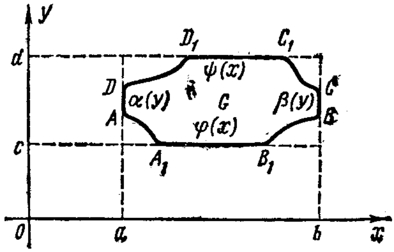

Рис. 191

Теорема 1 (формула Грина [*]). *Пусть G — плоская область и ее граница γ является кусочно-гладким контуром. Пусть область G может быть разбита на конечное число элементарных областей $G_i^{**)}$ с кусочно-гладкими границами γ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть, далее, в замкнутой области $\bar{G}$ заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрерывные на $\bar{G}$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$.* [***]) Тогда справедлива формула

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\gamma^+} P\, dx + Q\, dy. \qquad (47.12)$$

Доказательство. Пусть сначала область G сама элементарна и, следовательно, ее границу можно представить как объединение графиков двух кусочно непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и, быть может, отрезков прямых $x = a$ и $x = b$, а также как объединение двух графиков кусочно непрерывно дифференцируемых функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ и, быть может, отрезков прямых $y = c$ и $y = d$ (рис. 191).

В этом случае, применяя правило сведения двойного интеграла к повторному, теорему Ньютона — Лейбница (п. 29.3) и формулу

---

*) Дж. Грин (1793—1841) — английский математик.

**) Это означает, что $\{G_i\}_{i=1}^{i=k}$ является разбиением замкнутой области $\bar{G}$ (см. п. 44.3).

***) Непрерывность частных производных на $\bar{G}$ понимается как их непрерывность на открытом множестве G и их непрерывная продолжаемость на границу G (см. п. 39.3).

(47.9), имеем

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right] dx =$$

$$= \int_a^b \{P[x, \psi(x)] - P[x, \varphi(x)]\}\,dx = \int_a^b P[x, \psi(x)]\,dx -$$

$$- \int_a^b P[x, \varphi(x)]\,dx = \int_{\overset{\frown}{DC}} P(x, y)\,dx - \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx =$$

$$= - \int_{\overset{\frown}{CD}} P(x, y)\,dx - \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx. \tag{47.13}$$

Замечая, что для отрезков BC и DA

$$\int_{BC} P(x, y)\,dx = \int_{DA} P(x, y)\,dx = 0 \tag{47.14}$$

(это сразу следует, например, из формулы (47.6), ибо здесь $x = \text{const}$ и потому $\cos\alpha = 0$), и, сложив равенства (47.13) и (47.14), получим

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = - \int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx - \int_{\overset{\frown}{BC}} P\,dx - \int_{\overset{\frown}{CD}} P\,dx - \int_{\overset{\frown}{DA}} P\,dx = - \int_{\gamma^+} P\,dx. \tag{47.15}$$

При этом получилась ориентация граничного контура γ, при которой следуют последовательно одна за другой точки A, B, C, D. Эта ориентация является положительной (см. определение 6) и обозначается через γ^+.

Совершенно аналогично, исходя из того, что область G элементарна, выводится формула

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\gamma^+} Q\,dy. \tag{47.16}$$

Сложив (47.15) и (47.16), мы получим формулу Грина (47.12) для рассматриваемого случая.

Рассмотрим общий случай. Пусть область G разбита на области G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, указанного в условиях теоремы вида. В силу доказанного для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\gamma_i^+} P\,dx + Q\,dy.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{G_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\gamma_i^+}P\,dx+Q\,dy. \tag{47.17}$$

В силу аддитивности двойного интеграла по множествам (см. п. 44.6) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{G_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{47.18}$$

В сумме, стоящей в правой части равенства (47.17), криволинейные интегралы берутся дважды по всем внутренним частям границ γ_i, областей G_i, т. е. таким дугам кривых γ_i, которые являются частью границ двух областей G_i, $i=1, 2, \ldots, k$, и, следовательно, не входят в границу области G; при этом ориентации этих дуг кривых γ_i противоположны (рис. 192). В силу

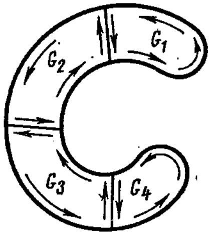

Рис. 192

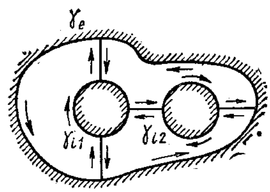

Рис. 193

изменения знака криволинейного интеграла второго рода при изменении ориентации кривой сумма двух криволинейных интегралов по указанным частям кривых γ_i равна нулю. Поэтому в правой сумме формулы (47.17) останутся только интегралы по положительно ориентированным частям границы γ области G, дающие в сумме $\int\limits_{\gamma^+}P\,dx+Q\,dy$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\gamma_i^+}P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\gamma^+}P\,dx+Q\,dy. \tag{47.18'}$$

Из (47.17), (47.18) и (47.18') следует формула (47.12) в общем случае. $\square$

Пусть G — ограниченная область на плоскости R^2 и пусть ее граница состоит из конечного числа простых контуров, которые будем называть *граничными контурами*. Если граничный контур является одновременно и границей неограниченной области, лежащей в $R^2 \setminus \overline{G}$, то будем называть его *внешним*, а если он является одновременно и границей ограниченной области, лежащей в $R^2 \setminus \overline{G}$, то — *внутренним*. Так, на рис. 193 контур γ_e внешний, а контуры γ_{i1} и γ_{i2} внутренние.

Если граница области G состоит из внешнего контура γ_e и внутренних контуров $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{im}$ и если область G может быть разбита на конечное число элементарных относительно обеих координатных осей областей с кусочно-гладкими границами, то справедлива формула

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\gamma_e^+} P\, dx + Q\, dy + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\gamma_{ij}^-} P\, dx + Q\, dy. \quad (47.19)$$

Функции P и Q, как и выше, предполагаются непрерывными вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области $\overline{G}$.

Доказывается эта формула так же, как и (47.12), если только заметить, что в сумме, стоящей в правой части равенства (47.17), останутся криволинейные интегралы по положительно ориентированным частям внешнего контура и по отрицательно ориентированным частям внутренних контуров (см. рис. 193).

Отметим еще, что в формуле (47.19) все контуры (как внешние, так и внутренние) ориентированы таким образом, что при их обходе область интегрирования остается слева.

Определение 7. *Пусть граница ∂G ограниченной плоской области G состоит из конечного числа простых кусочно-гладких контуров. Совокупность этих контуров, ориентированных так, что при обходе по каждому из них область G остается слева (справа), называется положительной (отрицательной) ориентацией границы G и обозначается также ∂G (соответственно $-\partial G$).*

Формулу Грина можно распространить и на еще более широкий класс областей. Для этого заметим, что в силу доказанного формула Грина справедлива для треугольника, а значит, и для любого многоугольника. Поэтому предельным переходом, аппроксимируя границу области конечнозвенными ломаными, можно получить формулу Грина для любой области (и даже просто открытого множества), граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Мы, однако, не будем останавливаться на доказательстве этого факта, а ограничимся лишь его формулировкой. При этом, используя определение 7, мы запишем формулу (47.19) в более компактном виде.

Теорема 1′. *Пусть граница плоской ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Тогда, если функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\overline{G}$, то*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G} P\, dx + Q\, dy,$$

где ∂G — положительно ориентированная граница области G.

Формула Грина является для кратных интегралов аналогом формулы Ньютона—Лейбница для однократных интегралов: и в той и в другой формуле интегралы от производных по области интегрирования выражаются через значения функции на границе указанной области (в случае формулы Грина эти значения еще интегрируются).

Упражнения. С помощью формулы Грина вычислить следующие криволинейные интегралы, где Г — простой замкнутый контур, состоящий из частей кривых, уравнения которых указаны для каждого интеграла (направление обхода контура — положительное

5. $\int\limits_{\Gamma} (x^2y+x-y)\,dx+(y^2+2x)\,dy$; $y=2$, $y=x^2+1$.

6. $\int\limits_{\Gamma} \frac{y}{x}\,dx+2\ln x\,dy$; $2x+y=4$, $x=1$, $y=0$.

7. $\int \frac{dx}{y^2}-\frac{dy}{x}$; $y=x$, $x=2$, $y=1$.

47.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ С ПОМОЩЬЮ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Положив в формуле Грина $Q=x$, $P=0$, получим $\iint\limits_{G} dx\,dy = \int\limits_{\gamma^+} x\,dy$ и, следовательно,

$$\mu G = \int\limits_{\gamma^+} x\,dy. \tag{47.20}$$

Аналогично, положив $P=-y$, $Q=0$, получим

$$\mu G = -\int\limits_{\gamma^+} y\,dx. \tag{47.21}$$

Складывая формулы (47.20) и (47.21), будем иметь

$$\mu G = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma^+} x\,dy-y\,dx. \tag{47.22}$$

Примеры. 1. Найдем с помощью формулы (47.22) площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Используем его параметрическое представление: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Применив формулу (47.22), получим искомую площадь:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma^+} x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}ab\int\limits_{0}^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=\pi ab.$$

Сравнивая этот метод вычисления площади, ограниченной эллипсом, с приведенным раньше (см. пример 4 в п. 32.1), легко убедиться, на сколько здесь меньше объем вычислений.

2. Найдем площадь, ограниченную астроидой (см. в т. 1, рис. 75) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Замечая, что здесь возрастание параметра t соответствует положительной ориентации контура, имеем:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\gamma^+} x\,dy - y\,dx = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

Упражнения. С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

8. $x = t^2$, $y = t^3$, $x = 1$, $y = 0$.

9. $y^2 = 4 - x$, $x = 1$, $y = 1$ (в первой четверти).

47.7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЗНАКА ЯКОБИАНА ОТОБРАЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Пусть F — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение плоской области $G \subset R^2_{uv}$ в плоскость R^2_{xy} с якобианом, всюду в G не равным нулю. Тогда в силу принципа сохранения области множество $G^* = F(G)$ также является областью (см. п. 41.8), а якобиан, в силу его непрерывности, сохраняет знак на G (см. теорему 4 в п. 19.5), т. е. либо всюду на G положителен, либо всюду отрицателен.

Пусть в координатной записи отображение F задается формулами

$$x = x(u, v),$$
$$y = y(u, v). \qquad (47.23)$$

Лемма 1. *Если γ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в G, то ее образ $\gamma^* = F(\gamma)$ при отображении F также будет кусочно-гладкой кривой.*

Доказательство. Пусть сначала γ — гладкая кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек (см. определения 15 и 16 в п. 16.4), и пусть

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

— некоторое ее представление. Тогда на отрезке $[a, b]$ функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемы и $\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0$.

Представлением кривой $\gamma^* = F(\gamma)$ будет являться пара функций

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

которые в силу свойств композиции непрерывно дифференцируемых функций (см. п. 19.3 и 20.3) также будут непрерывно дифференцируемыми. Покажем, что кривая γ^* также не будет иметь особых точек. В самом деле, поскольку

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

то, рассматривая эти равенства как систему линейных уравнений относительно $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, видим, что если в некоторой точке $t\in[a, b]$ выполнялись бы равенства $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0$, то в силу необращения в ноль якобиана

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

указанная система имела бы единственное решение, которым является нулевое решение, т. е. в той же точке t были бы справедливыми равенства $\frac{du}{dt}=\frac{dv}{dt}=0$ и тем самым соответствующая точка кривой γ была бы особой, что, по предположению, невозможно.

Итак, если кривая γ — гладкая, то кривая $\gamma^*=F(\gamma)$ также гладкая. Отсюда сразу следует, что образ кусочно-гладкой кривой при рассматриваемом отображении является также кусочно-гладкой кривой, ибо кусочно-гладкая кривая (см. определение 16 в п. 16.4) представляет собой объединение конечного числа гладких кривых. $\square$

Пусть, теперь, $\Gamma\subset G$, Γ — ограниченная область, и ее граница $\partial\Gamma$ является простым кусочно-гладким контуром γ (такие границы называются *кусочно-гладкими*). Пусть далее, $\Gamma^*=F(\Gamma)$. Тогда в силу принципа сохранения области множество Γ^* — также область, и кроме того, ее граница $\partial\Gamma^*$ есть образ границы $\partial\Gamma$ области Γ (см. лемму 1 в п. 46.1), т. е. $\partial\Gamma^*=F(\partial\Gamma)$. Поэтому граница $\partial\Gamma^*$ также является простым (в силу взаимной однозначности отображения F) кусочно-гладким (согласно лемме 1 этого пункта) контуром γ^*. Следовательно, по контурам $\gamma=\partial\Gamma$ и $\gamma^*=$ $=\partial\Gamma^*$ можно вычислять криволинейные интегралы. Пусть области Γ и Γ^* таковы, что к ним применима формула Грина, например, они удовлетворяют условиям, налагаемым на область в теореме 1 п. 47.5. (На самом деле, как уже отмечалось, при сделанных предположениях формула Грина всегда применима, однако это не было доказано).

Обозначим через γ^+ как обычно, положительно ориентированный контур γ (см. п. 47.5). Пусть

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

— представление контура γ^+ и, следовательно,

$$x = x[u(t), v(t)], \quad y = y[u(t), v(t)], \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{47.24}$$

— некоторое представление контура γ^*.

Будем предполагать еще, что существуют смешанные производные $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$ и что они непрерывны, а следовательно, и равны друг другу во всех точках области G.

Согласно формуле (47.20),

$$\mu\Gamma^* = \varepsilon \int_{\gamma^*} x\,dy, \tag{47.25}$$

где $\varepsilon = +1$, если ориентация контура γ^* положительна, и $\varepsilon = -1$ в противоположном случае. Иначе говоря, $\varepsilon = +1$ (соответственно $\varepsilon = -1$), если положительному обходу данного контура γ соответствует при отображении (47.23) положительный же (соответственно отрицательный) обход контура $\gamma^* = F(\gamma)$.

Преобразовав интеграл (47.25) по формуле (47.8) и использовав представление (47.24) контура γ^*, будем иметь:

$$\mu\Gamma^* = \varepsilon \int_a^b x y_t'\,dt = \varepsilon \int_a^b x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) dt =$$
$$= \varepsilon \int_{\gamma^+} x\frac{\partial y}{\partial u}\,du + x\frac{\partial y}{\partial v}\,dv.$$

К получившемуся интегралу применим формулу Грина (см. теорему 1 в п. 47.5). Положив $P = x\frac{\partial y}{\partial u}$, $Q = x\frac{\partial y}{\partial v}$ и заметив, что в этом случае

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + x\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + x\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$$

(здесь нами используется потребованное выше существование вторых частных производных $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$), получим

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

откуда

$$\mu\Gamma^* = \varepsilon \int_{\gamma^+} P\,du + Q\,dv = \varepsilon \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\,dv = \varepsilon \iint_{\Gamma} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.$$

Левая часть этого равенства больше нуля, значит, правая часть также положительна, и так как якобиан отображения (47.23) не меняет знака, то это возможно лишь в том случае, когда $\varepsilon\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}>0$, т. е. когда число ε имеет тот же знак, что и якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, а в этом случае $\varepsilon\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$. Тем самым знак ε не зависит от выбора контура γ, а определяется знаком якобиана, который один и тот же во всех точках области G.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены сделанные выше предположения, то справедлива формула*

$$\mu\Gamma^*=\iint_{\Gamma}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv. \tag{47.26}$$

Кроме того, если $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}>0$ *на* Γ, *то* $\varepsilon=+1$, *иначе говоря, если якобиан отображения* F *положителен, то положительному обходу всякого контура* $\gamma\subset G$, *являющегося границей ограниченной области* $\Gamma\subset G$, *при отображении* F *соответствует положительный обход контура* $\gamma^*=F(\gamma)$, *являющегося границей ограниченной области* $\Gamma^*=F(\Gamma)$. *Если же якобиан* $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}<0$ *на* Γ, *то* $\varepsilon=-1$, *т. е. положительному обходу всякого контура* γ *указанного типа соответствует при отображении* F *отрицательный обход контура* $\gamma^*=F(\gamma)$.

Таким образом, *геометрический смысл знака якобиана состоит в том, что в случае положительного якобиана ориентация контура при отображении сохраняется, а при отрицательном — меняется.*

С помощью формулы Грина (47.19) формула (47.26) легко обобщается на случай, когда граница области Γ состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых контуров.

Отметим еще, что с помощью формулы (47.26) можно без труда получить более простое доказательство теоремы 1 из п.46.1 о геометрическом смысле модуля якобиана. Действительно, пусть $M_0\in\Gamma$, $d(\Gamma)$ — диаметр области Γ, и область Γ каким-либо образом стягивается к точке M_0 и, следовательно, $d(\Gamma)\to 0$. По теореме о среднем (см. п. 44.6)

$$\mu\Gamma^*=\iint_{\Gamma}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M\mu\Gamma,\quad M\in\Gamma,$$

поэтому

$$\frac{\mu\Gamma^*}{\mu\Gamma}=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M.$$

В силу непрерывности якобиана

$$\lim_{d(\Gamma)\to 0}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0},$$

следовательно

$$\lim_{d(\Gamma)\to 0} \frac{\mu\Gamma^*}{\mu\Gamma} = \left|\frac{\partial(\dot{x}, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}, \qquad (47.27)$$

т. е. мы доказали формулу (46.9) и в некотором смысле даже в более общем виде; так, здесь Γ — не обязательно квадрат (правда, на отображение F мы наложили несколько более сильные условия, потребовав непрерывности смешанных производных $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, dv}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial v\, \partial u}$ и возможности применения формулы Грина для области Γ^*). Нетрудно убедиться и в том, что стремление к пределу в формуле (47.27) происходит равномерно в смысле, указанном в теореме 1 п. 46.1.

Несмотря на простоту вывода формулы (47.27) (достигнутую во многом за счет более сильных предположений), следует отметить, что доказательство теоремы 1, приведенное в п. 46.1, идейно предпочтительнее, так как оно лучше раскрывает сущность вопроса, связанную с тем, что дифференцируемое отображение в малом достаточно хорошо аппроксимируется линейным отображением.

47.8. УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Все кривые (контуры), рассматриваемые в этом пункте, будут всегда предполагаться кусочно-гладкими; для краткости это не будет каждый раз специально оговариваться. Отметим еще, что во всякой области G любые две ее точки всегда можно соединить кусочно-гладкой кривой, например ломаной (см. лемму 5 в п. 41.4), лежащей целиком в G.

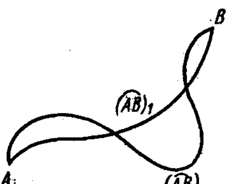

Рис. 194

Пусть задана плоская область G и на ней определены непрерывные функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$. Рассмотрим вопрос о том, при выполнении каких условий криволинейный интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy$ при произвольно фиксированных точках $A \in G$ и $B \in G$ не зависит от выбора кривой $\widehat{AB}$, их соединяющей и лежащей в G.

Лемма 2. *Условие независимости рассматриваемого криволинейного интеграла от указанного пути интегрирования равносильно равенству нулю интеграла по любому замкнутому контуру, лежащему в области G.*

Доказательство. 1. Действительно, пусть для любого замкнутого контура $\gamma \subset G$ имеет место равенство $\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$, и даны две кривые $(\widehat{AB})_1$ и $(\widehat{AB})_2$, соединяющие в G точки A и B (см. рис. 194). Обозначим через $(\widehat{BA})_2$

кривую, получающуюся из $(\overset{\frown}{AB})_2$ заменой на ней ориентации на противоположную. Объединение $(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2$ кривых $(\overset{\frown}{AB})_1$ и $(\overset{\frown}{BA})_2$ является замкнутым контуром, поэтому

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2} P\,dx + Q\,dy = 0; \tag{47.28}$$

но

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{(\overset{\frown}{BA})_2} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_2} P\,dx + Q\,dy. \tag{47.29}$$

Из (47.28) и (47.29) следует, что

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_2} P\,dx + Q\,dy,$$

т. е. криволинейный интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования $\overset{\frown}{AB} \subset G$ при фиксированных $A \in G$ и $B \in G$.

2. Обратно, пусть интеграл $\int P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования в указанном смысле и задан замкнутый контур γ, лежащий в G. Выберем на нем две точки A и $B \neq A$; тогда $\gamma = \overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BA}$ и

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} + \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} - \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} = 0,$$

где $(\overset{\frown}{AB})_1$ обозначает кривую, получающуюся из кривой $\overset{\frown}{BA}$ заменой на ней ориентации на противоположную. $\square$

Сформулируем критерий независимости интеграла от пути интегрирования.

Теорема 3. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в плоской области G. Для того чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ при фиксированных точках $A \in G$ и $B \in G$ не зависел от пути интегрирования $\overset{\frown}{AB} \subset G$, необходимо и достаточно, чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, определенной в области G:*

$$du = P\,dx + Q\,dy \tag{47.30}$$

(это равносильно тому, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $(x, y) \in G$).

При выполнении этого условия для любых двух точек $A = (x_0, y_0) \in G$ и $B = (x_1, y_1) \in G$ и любой кривой $\overset{\frown}{AB}$, соеди-

няющей эти точки в $G : \widehat{AB} \subset G$, *имеет место тождество*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0). \qquad (47.31)$$

Доказательство необходимости условия (47.30). Допустим, что рассматриваемый интеграл не зависит от пути интегрирования, лежащего в области G, а только от его начальной и конечной точек. Пусть $M_0 = (x_0, y_0) \in G$, $M = (x, y) \in G$ и $\widehat{M_0M}$ — некоторая кусочно-гладкая кривая, соединяющая в G точки M_0 и M (такая кривая, даже ломаная, всегда существует, см. лемму 5 в п. 41.4). Положим

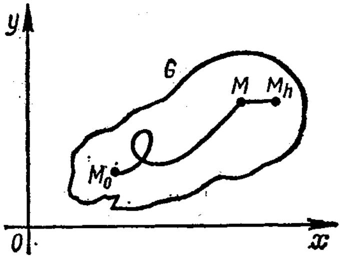

Рис. 195

$$u(M) = u(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy.$$

Функция $u(x, y)$ однозначна, так как значение $u(M) = u(x, y)$ не зависит от выбора кривой, соединяющей в G точки M_0 и M.

Покажем, что

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \text{ и } \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Зафиксируем точку $M = (x, y)$, а точку $M_h = (x+h, y) \in G$, $h \neq 0$, выберем так, чтобы отрезок MM_h, соединяющий M и M_h (который, очевидно, параллелен оси Ox и имеет длину $|h|$), содержался в G (рис. 195). Для всех достаточно малых чисел h такой выбор всегда можно сделать (почему?). Тогда имеем

$$u(x+h, y) - u(x, y) =$$
$$= \int\limits_{\widehat{M_0M}_h} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{MM_h} P\,dx + Q\,dy.$$

Вдоль отрезка MM_h координата y постоянна, поэтому $\int\limits_{MM_h} Q\,dy = 0$ и, следовательно, $u(x+h, y) - u(x, y) = \int\limits_{MM_h} P\,dx = \int\limits_{x}^{x+h} P(t, y)\,dt$. Применив интегральную теорему о среднем, получим

$$u(x+h, y) - u(x, y) = P(x+\theta h, y)\,h, \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда

$$\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} = P(x+\theta h, y), \quad 0 < \theta < 1. \qquad (47.32)$$

Правая часть этого равенства в силу непрерывности функции $P(x, y)$ имеет предел при $h \to 0$, следовательно, и левая часть при $h \to 0$ имеет предел. Перейдя к пределу в (47.32), будем иметь $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$.

Совершенно аналогично доказывается и равенство $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$.

Итак, существование функции $u(x, y)$, для которой имеет место соотношение (47.30), доказано.

Пусть теперь $A \in G$, $B \in G$, $\overset{\frown}{AB}$ — некоторая кривая, соединяющая в G точки A и B, и пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — ее представление и, следовательно, $A = (x(a), y(a))$, $B = (x(b), y(b))$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] dt =$$

$$= \int\limits_a^b u'_t(x(t), y(t))\,dt = u[x(b), y(b)] - u[x(a), y(a)] = u(B) - u(A),$$

т. е. формула (47.31) также доказана.

Доказательство достаточности условия (47.30) для независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования непосредственно следует из формулы (47.31). Действительно, начальная точка любого замкнутого контура γ совпадает с конечной, а поэтому в силу (47.31)

$$\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy = u(A) - u(A) = 0.$$

Согласно лемме 2 это и означает независимость соответствующего криволинейного интеграла от пути интегрирования. $\square$

Заметим, что хотя доказанная теорема и дает необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, эти условия трудно проверяемы.

Если сузить класс рассматриваемых областей, то можно получить существенно более простой и эффективный критерий. Введем следующее определение.

Определение 8. *Плоская область G называется односвязной, если, каков бы ни был простой контур $\gamma \subset G$, ограниченная область Γ, границей которой является γ, содержится в G.*

Образно говоря, односвязность области означает, что область не имеет «дыр». Круг является примером односвязной области, круговое кольцо — неодносвязной (рис. 196).

Прежде чем формулировать другой критерий независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, докажем лемму, которая понадобится при доказательстве этого критерия.

Лемма 3. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области G, γ — гладкая кривая, лежащая в G, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — ее представление, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, λ_τ — ломаная с вершинами в точках $(x(t_i), y(t_i))$, $i = 0, 1, \ldots, i_0$* (см. п.16.5). *Тогда*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} P\,dx + Q\,dy = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy. \tag{47.33}$$

Заметим, что в силу равномерной непрерывности на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$ и $y(t)$ длины звеньев ломаной λ_τ, т. е. длины отрезков с вершинами в точках $(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ и $(x(t_i), y(t_i))$, при $\delta_\tau \to 0$ также стремятся к нулю.

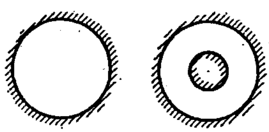

Рис. 196

Доказательство. Кривая γ является компактом; поскольку этот компакт не пересекается с замкнутым множеством $R^2_{xy} \setminus G$, то расстояние между ними больше нуля (см. лемму 7 п. 18.2). Пусть η — какое-либо число, такое, что $\rho(\gamma, R^2_{xy} \setminus G) > \eta > 0$. Обозначим через γ_η совокупность всех точек плоскости, находящихся от γ на расстоянии, не большем, чем η. Множество γ_η ограничено, замкнуто (см. в п. 18.3 лемму 11) и $\gamma_\eta \subset G$.

В силу равномерной непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ на отрезке $[a, b]$ существует такое число $\delta_0 > 0$, что для любых двух точек $t' \in [a, b]$ и $t'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta_0$, выполняется неравенство

$$\rho(M', M'') = \sqrt{[x(t'') - x(t')]^2 + [y(t'') - y(t')]^2} < \eta,$$

где $M' = (x(t'), y(t'))$, $M'' = (x(t''), y(t''))$ (сравнить с леммой 4 в п. 41.4). Все точки отрезка с концами в точках M' и M'', очевидно, также находятся от точки M' на расстоянии, не большем чем η и поэтому лежат во множестве γ_η и, следовательно, в G. Это означает, что если мелкость δ_τ разбиения τ отрезка $[a, b]$ такова, что $\delta_\tau < \delta_0$, то все точки ломаной λ_τ лежат в G и для таких разбиений τ имеет смысл интеграл $\int_{\lambda_\tau} P\,dx + Q\,dy$.

Рассмотрим интегралы $\int_\gamma P\,dx$ и $\int_{\lambda_\tau} P\,dx$. Положим

$$x_i = x(t_i),\ y_i = y(t_i),\ P_i = P(x_i, y_i),\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, i_0,$$

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} P_i\,\Delta x_i.$$

Как известно (см. п. 47.2, свойство 4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_\gamma P\,dx. \tag{47.34}$$

Пусть, далее, $M_i = (x_i, y_i)$ — вершины ломаной λ_τ; тогда

$$\int_{\lambda_\tau} P\,dx = \sum_{i=1}^{i_0} \int_{M_{i-1}M_i} P\,dx. \tag{47.35}$$

С другой стороны, заметим, что (употребляя обозначения из п. 47.2)

$$\int_{M_{i-1}M_i} dx = \int_{M_{i-1}M_i} \cos\alpha\,ds = |M_{i-1}M_i|\cos\alpha = \Delta x_i,$$

поэтому

$$\sigma_\tau = \sum_i P_i\,\Delta x_i = \sum_i \int_{M_{i-1}M_i} P_i\,dx. \tag{47.36}$$

Обозначив через L_τ длину ломаной λ_τ, через S — длину кривой γ, а через $\omega(\delta;\ P)$ — модуль непрерывности функции $P(x, y)$ на компакте γ_η и заметив, что в силу определения кривой: $L_\tau \leqslant S$, из (47.35) и (47.36) получим

$$\left|\int_{\lambda_\tau} P\,dx - \sigma_\tau\right| \leqslant \sum \left|\int_{M_{i-1}M_i} |P - P_i|\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \omega(\delta_\tau;\ P) \sum_i |\Delta x_i| \leqslant \omega(\delta_\tau;\ P) L_\tau \leqslant \omega(\delta_\tau;\ P) S.$$

Отсюда в силу равномерной непрерывности функции $P(x, y)$ на множестве γ_η имеем $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0}\left(\int\limits_{\lambda_\tau} P\,dx - \sigma_\tau\right) = 0$, и, значит, в силу (47.34)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} P\,dx = \int_\gamma P\,dx. \tag{47.37}$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} Q\,dy = \int_\gamma Q\,dy. \tag{47.38}$$

Из (47.37) и (47.38) непосредственно и следует утверждение леммы, т. е. формула (47.33). □

З а м е ч а н и е. Утверждение, аналогичное лемме, справедливо и для криволинейных интегралов в пространстве, причем доказательство пространственного случая проводится по той же схеме, что и для плоского.

Теорема 4. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в плоской* *области G. Для того, чтобы криволинейный интеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$ *при произвольно фиксированных точках* $A\in G$ *и* $B\in G$ *не зависел от пути интегрирования* $\overset{\frown}{AB}\subset G$*, необходимо, а если область G односвязна, — то и достаточно, чтобы во всех точках области G выполнялось равенство* $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство необходимости. Пусть рассматриваемый интеграл не зависит от пути интегрирования, лежащего в области G, а только от его начальной и конечной точек. Тогда согласно теореме 3 существует функция $u=u(x, y)$ такая, что $du=P\,dx+Q\,dy$, т. е. такая, что $\frac{\partial u}{\partial x}=P$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$. Поскольку $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и по условиям теоремы производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, а следовательно, и смешанные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ непрерывны, то (см. п. 21.1) они и равны, т. е. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство достаточности. Пусть теперь область G односвязна и во всех ее точках $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Если γ — кусочно-гладкий простой замкнутый контур, лежащий в G, и D — ограниченная область, границей которой является γ, то, применив формулу Грина (здесь используется односвязность области G), получим

$$\int\limits_{\gamma^+} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

Если кривая γ, лежащая в G, имеет конечное число точек самопересечения, то последовательно для каждой ее «петли» γ_k, $k=1, 2, \ldots, k_0$, являющейся уже простым замкнутым контуром, в силу доказанного имеем $\int\limits_{\gamma_k} P\,dx+Q\,dy=0$, откуда следует, что и для всей кривой γ

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy=0. \tag{47.39}$$

Переходя к рассмотрению общего случая, обратим прежде всего внимание на то, что рассмотренным приемом равенство (47.39) доказывается и для случая, когда γ является замкнутой конечнозвенной ломаной. С геометрической точки зрения отличие состоит лишь в том, что самопересечение конечнозвенной ломаной может состоять не только из конечного числа точек, но и конечного числа отрезков, что лишь незначительно усложняет рассуждение. Возможность применения формулы Грина к конечной области, ограниченной конечнозвенной ломаной, следует из того, что такую область можно разбить на треугольники, которые, очевидно, являются элементарными относительно обеих координатных осей областями. Следовательно, в этом случае выполняются предпосылки теоремы 1 п. 47.3.

Любая же замкнутая кусочно-гладкая кривая γ, лежащая в G, может быть сколь угодно точно аппроксимирована замкнутыми конечнозвенными ломаными, поэтому предельным переходом равенство (47.39) может быть получено и для любой замкнутой кривой из G. Проделаем это.

Пусть γ — кусочно-гладкая замкнутая кривая в области G, заданная некоторым представлением $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и являющаяся объединением гладких кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Впишем в каждую кривую γ_j, $j=1, 2, \ldots, k$, ломаную λ_j. Объединение всех ломаных λ_j, $j=1, 2, \ldots, k$, образует замкнутую ломаную λ, соответствующую некоторому разбиению τ отрезка $[a, b]$. В силу доказанного

$$\int_\lambda P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Но, согласно лемме,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_j} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_j} P\,dx + Q\,dy, \quad j=1, \ldots, k,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_\lambda P\,dx + Q\,dy = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy,$$

поэтому

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0. \quad \square$$

Иногда условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ называют *критерием полного дифференциала в односвязной области*, поскольку согласно теоремам 3 и 4 это условие необходимо и достаточно для того, чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy$ в области G являлось дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, $(x, y) \in G$.

В заключение этого пункта отметим, что требование односвязности рассматриваемой области при доказательстве достаточности условий теоремы 4 для независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования является существенным и его нельзя отбросить. Подтвердим это примером.

Пример. Пусть $P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

Легко проверить, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{47.40}$$

для всех точек плоскости, исключая начало координат (0, 0). Это следует, например, из того, что

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2},\quad x^2+y^2>0. \tag{47.41}$$

Таким образом, в этом случае за область G можно взять всю плоскость с «выколотым» началом координат: $G=R^2\setminus\{(0,\ 0)\}$. Область G, очевидно, не односвязна. В качестве замкнутого контура возьмем единичную окружность $\gamma_0=\{x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$, тогда

$$\int\limits_{\gamma_0} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\gamma_0}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=\int\limits_0^{2\pi} dt=2\pi.$$

Следовательно, в этом случае условия (47.40) выполнены, и существует замкнутый контур γ_0, по которому интеграл не равен нулю. Нетрудно убедиться, что вообще по любой окружности γ_r радиуса r с центром в начале координат

$$\int\limits_{\gamma_r} P\,dx+Q\,dy=2\pi. \tag{47.42}$$

Далее, каков бы ни был простой кусочно-гладкий контур γ, являющийся границей ограниченной области Γ, содержащей начало координат (в этом случае говорят, что контур γ содержит внутри себя начало координат), для него также

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy=2\pi. \tag{47.43}$$

Для доказательства этого возьмем окружность γ_r такого радиуса r, что $\gamma_r\subset\Gamma$; тогда γ и γ_r не пересекаются. Соединив контуры γ и γ_r отрезками λ_1 и λ_2, как показано на рис. 197, — получим два замкнутых контура γ_1 и γ_2, не содержащих внутри себя начала координат и состоящих из дуг γ_r' и γ_r'' окружности γ_r, частей γ' и γ'' контура γ и отрезков λ_1 и λ_2.

В силу условия (47.40) для этих контуров справедливы равенства

$$\int\limits_{\gamma_1} P\,dx+Q\,dy=0,\qquad \int\limits_{\gamma_2} P\,dx+Q\,dy=0.$$

Сложив эти равенства и опустив для краткости подынтегральные выражения, получим (рис. 197):

$$0=\int\limits_{\gamma_1}+\int\limits_{\gamma_2}=\int\limits_{\gamma'^+}+\int\limits_{\lambda_1^+}+\int\limits_{\gamma_r'^-}+\int\limits_{\lambda_2^+}+\int\limits_{\gamma''^+}+\int\limits_{\lambda_2^-}+\int\limits_{\gamma_r''^-}+\int\limits_{\lambda_1^-}=$$

$$=\int\limits_{\gamma'^+}+\int\limits_{\gamma''^+}-\int\limits_{\gamma_r'^+}-\int\limits_{\gamma_r''^+}=\int\limits_{\gamma^+}-\int\limits_{\gamma_r^+}.$$

Отсюда в силу (47.42) и следует (47.43). Более того, это равенство выполняется и в случае, если контур γ, обходя «один раз» вокруг начала координат, образует конечное число «петель», не охватывающих начало координат (рис. 198), ибо интеграл по этим петлям равен нулю.

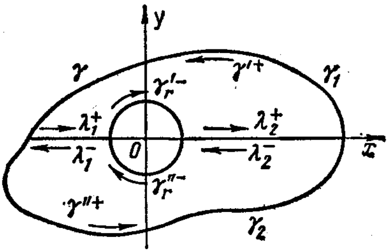

Рис. 197

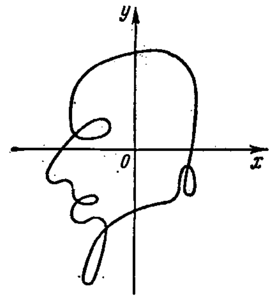

Рис. 198

Если M_0 — фиксированная точка рассматриваемой области G, $M_0 \in G$, $M \in G$, $\overset{\frown}{M_0M}$ — какая-либо кривая, соединяющая в G точки M_0 и M, то $u(M) = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} P\,dx + Q\,dy$ будет уже многозначной функцией, значения которой определяются выбором различных путей, соединяющих точки M_0 и M. Если γ_0 — какая-либо фиксированная кривая, соединяющая M_0 и M, то все значения функции u в точке M задаются формулой

$$u(M) = \int\limits_{\gamma_0} P\,dx + Q\,dy + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

— каждый обход вокруг начала координат изменяет значение функции $u(M)$ на величину $\pm 2\pi$ в зависимости от направления обхода.

В данном случае в этом легко убедиться и непосредственно: из формулы (47.41) следует, что

$$\int\limits_{\gamma_0} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\gamma_0} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)_0,$$

где $\left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)_0$ — некоторое фиксированное значение $\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$; поэтому

$$u(M) = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}.$$

Вдумчивый читатель заметил, что многие рассуждения, проведенные в этом примере, не зависят от конкретного вида функций P и Q и являются справедливыми всегда, когда мы имеем дело с одной изолированной «особой точкой», т. е. точкой, в которой нарушается условие (47.40). Конечно, при однократном «обходе» такой особой точки будет получаться не 2π, а, вообще говоря, какое-то другое число.

Результат, аналогичный теореме 4, имеет место и когда γ — пространственная кривая (см. п. 52.6).

Упражнения 10. Доказать формулу

$$\iint\limits_G v\,\Delta u\,dx\,dy = -\iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy + \int\limits_{\gamma^+} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds,$$

где G — плоская область, для которой справедлива формула Грина, γ — ограничивающий ее контур, ν — единичная внешняя нормаль к контуру γ, а Δ — оператор Лапласа (см. п. 41.10).

11. Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma 2(x+y^2)\,dx + (4xy+\cos y)\,dy$, где Γ — произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки $(1, 0)$ и (ξ, η).

12. Пусть Γ — произвольный простой замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий область, содержащую начало координат. Вычислить интеграл

$$\int\limits_\Gamma \frac{e^x}{x^2+y^2}\left[(x\sin y - y\cos y)\,dx + (x\cos y + y\sin y)\,dy\right]$$

при положительном направлении обхода контура Γ.

§ 48. НЕСОБСТВЕННЫЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

48.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как и ранее для однократных интегралов, введем понятие несобственного кратного интеграла, т. е. кратного интеграла от функций, которые либо неограничены, либо определены на неограниченной области. Определение кратного несобственного интеграла сформулируем в таком виде, что оно будет охватывать оба указанных случая (ср. с п. 33.1).

Определение 1. *Пусть G — открытое множество (ограниченное или неограниченное) в n-мерном пространстве R^n. Последовательность открытых множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$, будем называть последовательностью, монотонно исчерпывающей открытое множество G, если:*

1) $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$, $k=1, 2, \ldots$;

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = G$.

Здесь $\overline{G}$, как всегда, означает замыкание (см. п. 18.2) множества G.

Определение 2. *Пусть на открытом множестве G задана функция f (ограниченная или неограниченная), интегрируемая по Риману на любом измеримом по Жордану открытом множестве D,*