дело с одной изолированной «особой точкой», т. е. точкой, в которой нарушается условие (47.40). Конечно, при однократном «обходе» такой особой точки будет получаться не 2π, а, вообще говоря, какое-то другое число.

Результат, аналогичный теореме 4, имеет место и когда γ — пространственная кривая (см. п. 52.6).

Упражнения 10. Доказать формулу

$$\iint_G v\,\Delta u\,dx\,dy = -\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy + \int_{\gamma^+} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds,$$

где G — плоская область, для которой справедлива формула Грина, γ — ограничивающий ее контур, ν — единичная внешняя нормаль к контуру γ, а Δ — оператор Лапласа (см. п. 41.10).

11. Вычислить интеграл $\int_\Gamma 2(x+y^2)\,dx + (4xy+\cos y)\,dy$, где Γ — произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки (1, 0) и (ξ, η).

12. Пусть Γ — произвольный простой замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий область, содержащую начало координат. Вычислить интеграл

$$\int_\Gamma \frac{e^x}{x^2+y^2}\left[(x\sin y - y\cos y)\,dx + (x\cos y + y\sin y)\,dy\right]$$

при положительном направлении обхода контура Γ.

§ 48. НЕСОБСТВЕННЫЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

48.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как и ранее для однократных интегралов, введем понятие несобственного кратного интеграла, т. е. кратного интеграла от функций, которые либо неограничены, либо определены на неограниченной области. Определение кратного несобственного интеграла сформулируем в таком виде, что оно будет охватывать оба указанных случая (ср. с п. 33.1).

Определение 1. *Пусть G — открытое множество (ограниченное или неограниченное) в n-мерном пространстве R^n. Последовательность открытых множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$, будем называть последовательностью, монотонно исчерпывающей открытое множество G, если:*

1) $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$, $k=1, 2, \ldots$;

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = G$.

Здесь $\overline{G}$, как всегда, означает замыкание (см. п. 18.2) множества G.

Определение 2. *Пусть на открытом множестве G задана функция f (ограниченная или неограниченная), интегрируемая по Риману на любом измеримом по Жордану открытом множестве D,* *таком, что* $\bar{D} \subset G$. *Функция* f *называется интегрируемой в несобственном смысле на открытом множестве* G, *если для любой последовательности открытых измеримых множеств* G_k, $k=1, 2, \ldots$, *монотонно исчерпывающей множество* G, *существует предел* $\lim\limits_{k \to \infty} \int f\, dG_k$, *не зависящий от выбора указанной последовательности* G_k, $k=1, 2, \ldots$.

Этот предел называется несобственным интегралом от функции f *по открытому множеству* G *и обозначается через* $\int f\, dG$, *или более подробно,*

$$\iint\limits_G \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Таким образом,

$$\int f\, dG = \lim_{k \to \infty} \int f\, dG_k. \tag{48.1}$$

Если интеграл $\int f\, dG$ *существует, то говорят также, что он сходится, а в противном случае — что он расходится.*

Следует заметить, что в случае $n=1$ данное определение несобственного интеграла не эквивалентно определению несобственного интеграла от функции одного переменного, данного в § 33. Это связано с тем, что в указанном параграфе мы в качестве множеств G_k брали лишь интервалы, т. е. одномерные открытые измеримые множества весьма специального вида. Поэтому введенное в настоящем параграфе понятие несобственного интеграла (48.1) будем применять только в случае $n \geqslant 2$, сохранив для случая $n=1$ прежнее понятие несобственного интеграла.

Если открытое множество G измеримо по Жордану и функция f интегрируема на G, то несобственный интеграл от функции f совпадает с обычным интегралом Римана, — это следует из полной аддитивности интеграла Римана (см. п. 44.6).

Определение (48.1) позволяет перенести на несобственные интегралы ряд свойств собственных интегралов: аддитивность интеграла по множествам, линейность интеграла, интегрирование неравенств, сведение кратного интеграла к повторному, формулу замены переменного и др.

Например, если $x = F(u)$ — непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение открытого множества $D \subset R_u^n$ на открытое множество $G \subset R_x^n$ и якобиан $J(u)$ этого отображения нигде не обращается в ноль на D, то для любой непрерывной на G функции f справедлива формула замены переменного в интеграле:

$$\int f(x)\, dG = \int f[F(u)]\,|J(u)|\, dD.$$

Доказать это можно точно так же, как доказана теорема 2′ в п. 46.2; следует только вместо полной аддитивности интеграла использовать определение (48.1).

Используя аддитивность несобственного кратного интеграла, определение (48.1) можно переписать в другом эквивалентном виде. Замечая, что для измеримого открытого множества $\Gamma \subset G$ справедливо равенство

$$\int f\,dG - \int f\,d\Gamma = \int f\,d(G \setminus \overline{\Gamma}), \tag{48.2}$$

можно сказать, что интеграл $\int f\,dG$ сходится тогда и только тогда, когда для любой последовательности измеримых открытых множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G, существуют интегралы $\int f d(G \setminus \overline{G}_k)$ и

$$\lim_{k \to \infty} \int f d(G \setminus \overline{G}_k) = 0.$$

Упражнение 1. Доказать формулу (48.2); в частности, показать, что интегралы $\int f\,dG$ и $\int f\,d(G \setminus \overline{\Gamma})$ одновременно сходятся или расходятся.

48.2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. *Пусть функция f неотрицательна на открытом множестве $G \subset R^n$. Тогда, какова бы ни была последовательность $\{G_k\}$ открытых измеримых по Жордану множеств G_k, монотонно исчерпывающих множество G, предел*

$$\lim_{k \to \infty} \int f(x)\,dG, \tag{48.3}$$

конечный или равный $+\infty$, всегда существует.

Если он конечен, то интеграл $\int f(x)\,dG$ существует, и, следовательно, предел (48.3) равен этому интегралу, если же предел (48.3) бесконечен, то интеграл $\int f(x)\,dG$ не существует.

В последнем случае пишут $\int f(x)\,dG = +\infty$. Это оправдывается тем, что в силу сформулированной теоремы для любой другой последовательности $\{D_k\}$ открытых измеримых множеств D_k, монотонно исчерпывающих множеств G, имеем $\lim\limits_{k \to \infty} \int f(x)\,dD_k = +\infty$.

Доказательство. Очевидно, что теорема будет доказана, если показать, что в предположении неотрицательности функции f на открытом множестве G для любой монотонно исчерпывающей область G последовательности измеримых множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$ существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k \to \infty} \int f\,dG_k$$

и этот предел не зависит от выбора указанной последовательности.

Пусть G_k, $k=1, 2, \ldots$, — последовательность измеримых множеств, монотонно исчерпывающая открытое множество G. Тогда, согласно определению такой последовательности, $G_k \subset G_{k+1}$, а так как $f \geqslant 0$, то $\int f\,dG_k \leqslant \int f\,dG_{k+1}$, $k=1, 2, \ldots$ и, следовательно, всегда существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int f\,dG_k = I_1.$$

Пусть теперь D_k, $k=1, 2, \ldots$, — какая-либо другая последовательность измеримых множеств, монотонно исчерпывающая открытое множество G. В силу доказанного выше существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int f\,dD_k = I_2.$$

Покажем, что

$$I_1 = I_2. \tag{48.4}$$

Для любого фиксированного элемента G_k первой последовательности существует номер $k_0 = k_0(k)$ такой, что

$$\overline{G}_k \subset D_{k_0}. \tag{48.5}$$

В самом деле, если бы указанного номера k_0 не нашлось, то для любого натурального $m=1, 2, \ldots$, существовала бы точка $x^{(m)} \in \overline{G}_k \setminus D_m$. Открытое множество G_k, будучи измеримым по Жордану, является ограниченным, поэтому его замыкание $\overline{G}_k$ представляет собой замкнутое ограниченное множество, т. е. компакт. В силу его ограниченности последовательность $\{x^{(m)}\}$ также ограничена и, следовательно, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п. 18.1, теорему 2), из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_\nu)}\}$. Если $x^{(0)} = \lim\limits_{\nu\to+\infty} x^{(m_\nu)}$, то из замкнутости множества $\overline{G}_k$ вытекает, что $x^{(0)} \in \overline{G}_k$ и потому $x_0 \in G$. Но тогда в силу свойства 2 монотонно исчерпывающих последовательностей (см. определение 1) найдется номер m_0 такой, что $D_{m_0} \ni x^{(0)}$. Поскольку D_{m_0} — открытое множество, то оно является окрестностью точки $x^{(0)}$ и, следовательно, содержит почти все точки сходящейся к $x^{(0)}$ последовательности $\{x^{(m_\nu)}\}$. Обозначим через ν_0 какой-либо такой номер, что $m_{\nu_0} \geqslant m_0$ и $x^{(m_{\nu_0})} \in D_{m_0}$. Тогда в силу свойства 1 монотонно исчерпывающих последовательностей $x^{(m_{\nu_0})} \in D_{m_{\nu_0}}$, но поскольку $x^{(m_{\nu_0})} \in \overline{G}_k$, то это противоречит выбору последовательности $\{x^{(m)}\}$. Тем самым существование указанного выше (см. (48.5)) номера k_0 доказано (впрочем, его существование следует также непосредственно из леммы Гейне — Бореля, см. п. 18.3, так как система $\{D_k\}$ образует открытое покрытие компакта $\overline{G}_k$).

Теперь заметим, что в силу условия $f \geqslant 0$ из включения (48.5) вытекает, что $\int f\, dG_k \leqslant \int f\, dD_{k_0}$. Но, очевидно, $\int f\, dD_{k_0} \leqslant I_2$, поэтому при любом $k=1, 2, \ldots$

$$\int f\, dG_k \leqslant I_2$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $I_1 \leqslant I_2$.

Подобным же образом доказывается и неравенство $I_1 \geqslant I_2$. $\square$

Пример. Рассмотрим интеграл $I = \iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$. Положим $G_k = \{(x, y)\colon x^2+y^2<k^2\}$, $k=1, 2, \ldots$. Эта последовательность является последовательностью открытых квадрируемых множеств (в данном случае просто кругов), монотонно исчерпывающей всю плоскость R^2.

Пусть $I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$. Перейдем к полярным координатам:

$$I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-r^2} r\, dr\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^k e^{-r^2} r\, dr = 2\pi \frac{e^{-r^2}}{2}\Bigg|_0^k = \pi(1-e^{-k^2}).$$

Отсюда, согласно определению (48.1),

$$I = \lim_{k\to\infty} I_k = \pi. \tag{48.6}$$

Формула (48.6) позволяет найти величину интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

называемого *интегралом Пуассона* *) и часто встречающегося в приложениях. Действительно, обозначая через D_k квадрат $|x| \leqslant k$, $|y| \leqslant k$, $k=1, 2, \ldots$, и применив к интегралу по D_k от функции $e^{-x^2-y^2}$ формулу сведения кратного интеграла к повторному (см. п. 45.1), получим

$$I = \iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{D_k} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-k}^{k} dx \int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-k}^{k} \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}\, dx\right) e^{-y^2}\, dy =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

*) С. Пуассон (1781—1840) — французский физик и математик.

Поэтому из (48.6) сразу следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть на открытом множестве G выполняются неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $x \in G$. Тогда из сходимости интеграла $\int g(x)\,dG$ следует сходимость интеграла $\int f(x)\,dG$, а из расходимости интеграла $\int f(x)\,dG$ следует расходимость интеграла $\int g(x)\,dG$.*

Эта теорема доказывается аналогично подобной теореме в одномерном случае (см. п. 33.3).

В качестве примеров и эталонов для сравнения с другими интегралами рассмотрим интегралы

$$\int\limits_{x_1^2+\ldots x_n^2 \geqslant 1} \cdots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^\alpha}, \tag{48.7}$$

$$\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_n \leqslant 1} \cdots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^\alpha}. \tag{48.8}$$

Первый интеграл берется по внешности единичного шара; второй — по его внутренности.

Для исследования этих интегралов удобно ввести *сферические координаты* ρ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ в n-мерном пространстве. Они вводятся по формулам

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = \rho \cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots \qquad \cos\varphi_2\cos\varphi_1,\\
x_2 = \rho \cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots \qquad \cos\varphi_2\sin\varphi_1\\
x_3 = \rho \cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots\cos\varphi_3\sin\varphi_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_i = \rho\cos\varphi_{n-1}\ldots\cos\varphi_i\sin\varphi_{i-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n = \rho\sin\varphi_{n-1},
\end{array}\right\} \tag{48.9}$$

где

$$0 \leqslant \rho < +\infty \quad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_i \leqslant \frac{\pi}{2},\ i = 2, 3, \ldots, n-1.$$

С помощью этих формул декартовым координатам $x_1, \ldots, x_n$ точки пространства сопоставляются сферические координаты ρ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, и обратно. При этом следует иметь в виду, что, подобно полярным координатам на плоскости, здесь не существует полного взаимно однозначного соответствия между множествами n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$.

Отметим, что $\rho = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$.

Элементарными, но несколько громоздкими вычислениями, которые не будем здесь приводить, можно показать, что якобиан этого преобразования имеет вид

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = \rho^{n-1}\cos\varphi_2\cos^2\varphi_3\ldots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Положим для краткости

$$\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = \cos\varphi_2\cos^2\varphi_3\ldots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Легко убедиться, что $\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \geqslant 0$ и что

$$c = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\ldots\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Phi(\varphi_2\ldots\varphi_{n-1})\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} > 0.$$

Это сразу следует из свойства 9 кратных интегралов в п. 44.6.

Исследуем теперь сходимость интеграла (48.7). В качестве последовательности открытых измеримых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей внешность единичного шара Q, возьмем последовательность множеств

$$G_k = \left\{x = (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) : 1 + \frac{1}{k} < \rho < k\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$\int\limits_{G_k}\ldots\int \frac{dx_1\ldots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^\alpha} =$$

$$= \int_{1+\frac{1}{k}}^{k}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\ldots\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho^{n-1-\alpha}\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})\,d\rho\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} =$$

$$= c\int_{1+\frac{1}{k}}^{k}\rho^{n-1-\alpha}\,d\rho.$$

Таким образом, вопрос о сходимости интеграла (48.7) свелся к сходимости интеграла $\int_1^\infty \rho^{n-1-\alpha}\,d\rho$, который, как известно (см. п. 33.3), сходится при $n-1-\alpha < -1$, т. е. при $\alpha > n$, и расходится при $\alpha \leqslant n$. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Интеграл* (48.7) *сходится, если α больше размерности пространства, и расходится в противном случае.*

Рассмотрим теперь интеграл (48.8). Положив

$$G_k = \left\{x = (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) : \frac{1}{k} < \rho < 1 - \frac{1}{k}\right\}, \quad k = 3, 4, \ldots,$$

получим

$$\int\limits_{G_k}\cdots\int\frac{dx_1,\ \ldots,\ dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^{\alpha}}=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^{n-1-\alpha}\Phi(\varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{n-1})\,d\rho\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1}=$$

$$=c\int\limits_{\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}}\rho^{n-1-\alpha}\,d\rho.$$

Таким образом, вопрос о сходимости интеграла (48.8) свелся к сходимости интеграла $\int\limits_0^1\rho^{n-1-\alpha}\,d\rho$. Этот интеграл, как известно, сходится, если $n-1-\alpha>-1$, т. е. если $\alpha<n$, и расходится в противном случае. Полученный результат сформулируем снова в виде леммы.

Лемма 2. *Интеграл* (48.8) *сходится, если* α *меньше размерности пространства, и расходится в противном случае.*

Подобно одномерному случаю (см. п. 33.3) с помощью интегралов (48.7) и (48.8) можно сформулировать критерии сходимости несобственных кратных интегралов, однако мы не будем на этом подробно останавливаться.

48.3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ, МЕНЯЮЩИХ ЗНАК

Определение 3. *Несобственный интеграл* $\int f\,dG$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл* $\int|f|\,dG$.

Для изучения абсолютной сходимости интеграла от функции $f(x)$ нам будут полезны функции

$$f_+(x)=\begin{cases}f(x), & \text{если } f(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } f(x)<0,\end{cases}\qquad f_-(x)=\begin{cases}-f(x), & \text{если } f(x)\leqslant 0,\\ 0, & \text{если } f(x)>0.\end{cases}$$

Легко видеть, что

$$f_+=\frac{|f|+f}{2},\quad f_-=\frac{|f|-f}{2},\tag{48.10}$$

$$0\leqslant f_+(x)\leqslant|f(x)|,\quad 0\leqslant f_-(x)\leqslant|f(x)|,\tag{48.11}$$

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x),\quad |f(x)|=f_+(x)+f_-(x).\tag{48.12}$$

Из формул (48.10) следует, что если функция f интегрируема, по Риману, на некоторой измеримой по Жордану области, то и функции f_+ и f_- интегрируемы по Риману на этой области; из первой формулы (48.12) следует обратное утверждение. Поэтому из (48.10) — (48.12) следует, что *интеграл* $\int f\,dG$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы* $\int f_+\,dG$ *и* $\int f_-\,dG$.

Как и в случае несобственных интегралов от функции одного переменного, из абсолютной сходимости кратного интеграла следует его сходимость (при этом, конечно, рассматриваются только такие функции, которые интегрируемы на каждом открытом измеримом множестве, содержащемся вместе со своим замыканием в открытом множестве, по которому производится интегрирование). Это сразу получается на основании формул (48.11), первой формулы (48.12) и из теоремы 2 настоящего параграфа (см. п. 48.2). Однако для кратных несобственных интегралов справедлива и обратная теорема.

Теорема 3. *Если кратный интеграл* $\int f\,dG$ $(n \geqslant 2)$ *сходится, то он и абсолютно сходится.*

Эта неожиданная на первый взгляд теорема связана с отличием определения несобственных интегралов от функции одного и n переменных $(n > 1)$, указанных в начале этого параграфа*).

Доказательство теоремы. Пусть интеграл $\int f\,dG$ абсолютно расходится, т. е. для некоторой (а значит и для всякой, см. теорему 1 в п. 48.2) последовательности открытых измеримых по Жордану множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей открытое множество G, имеем $\lim\limits_{k \to \infty} \int |f|\,dG_k = +\infty$. Без ограничения общности (переходя, если надо, к подпоследовательности) можно предполагать, что

$$\int |f|\,dG_{k+1} > 3\int |f|\,dG_k + 2k, \quad k=1, 2, \ldots. \tag{48.13}$$

Пусть $A_k = G_{k+1} \setminus \overline{G}_k$; тогда A_k — открытое измеримое множество, и так как $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$, то (рис. 199) $G_{k+1} = A_k \cup \overline{G}_k$, и, следовательно,

$$\int |f|\,dG_{k+1} = \int |f|\,dA_k + \int |f|\,dG_k.$$

*) Отметим, однако, что можно было бы и в n-мерном случае получить ту же связь между сходимостью и абсолютной сходимостью интеграла, что и в одномерном случае, если соответствующим образом ввести определение несобственного n-кратного интеграла. Например, в случае интегралов по всему пространству для этого достаточно в определении интеграла в качестве элементов монотонно исчерпывающей последовательности брать только n-мерные шары с центром в начале координат. Впрочем, если применить к одномерному интегралу определение несобственного интеграла, данное в п. 48.1, и понимать одномерный интеграл Римана в смысле § 44, то теорема 3 вместе с ее доказательством будет справедливой и при $n=1$.

Отсюда в силу неравенства (48.13) $\int |f|\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k$. Используя вторую формулу (48.12), получим

$$\int f_+\, dA_k + \int f_-\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k.$$

Пусть для определенности $\int f_+\, dA_k \geqslant \int f_-\, dA_k$; тогда

$$2\int f_+\, dA_k \geqslant \int f_+\, dA_k + \int f_-\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k,$$

и, следовательно,

$$\int f_+\, dA_k > \int |f|\, dG_k + k. \tag{48.14}$$

Нашей целью является получение неравенства подобного типа не для функции f_+, а для функции f. Для этого, казалось бы, можно просто отбросить точки, в которых функция f_+ обращается в ноль; тогда на оставшемся множестве мы имели бы $f = f_+$. Однако получившееся множество может, вообще говоря, оказаться неизмеримым, а поэтому мы будем действовать несколько обходным путем.

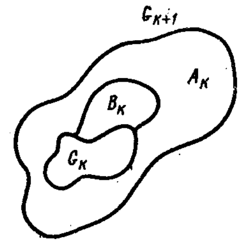

Рис. 199

Из неравенства (48.14) следует, что при любом достаточно мелком разбиении $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества A_k (см. п. 44.3) для любой интегральной суммы Римана имеем

$$\sum_{i=1}^{i_0} f_+(\xi_i)\, \mu E_i > \int |f|\, dG_k + k,$$

$$\xi_i \in E_i, \quad i = 1, 2, \ldots, i_0.$$

Выберем указанное разбиение τ открытого измеримого множества A_k таким, чтобы все элементы E_i этого разбиения также были открытыми измеримыми по Жордану множествами — это всегда возможно (см. п. 44.4). Обозначим через E_i^* те множества $E_i \in \tau$, для которых $f_+(\xi) > 0$ во всех точках $\xi \in \bar{E}_i$; тогда, выбирая $\xi_i \in \bar{E}_i \neq E_i^*$ так, что $f(\xi_i) = 0$, получим

$$\sum_i{}' f_+(\xi_i)\, \mu E_i^* > \int |f|\, dG_k + k, \tag{48.15}$$

где (а также и в дальнейшем) знак «штрих» у суммы означает, что суммирование распространяется только на те индексы i, для которых $E_i = E_i^*$. Положим $B_k = \bigcup_i{}' E_i^*$ (см. рис. 199). Очевидно, что B_k — открытое измеримое множество, лежащее во множестве A_k, а $\tau^* = \{E_i^*\}$ является его разбиением. На замыкании этого множества $f_+ > 0$ и, следовательно, $f_+ = f$. Из неравенства (48.15) следует, что для нижней суммы Дарбу s_{τ^*} функции f на множестве B_k справедливо неравенство $s_{\tau^*} \geqslant \int f\, dG_k + k$. Отсюда, очевидно, следует, что

$$\int f\, dB_k \geqslant \int |f|\, dG_k + k. \tag{48.16}$$

Заметим, что $f \geqslant -|f|$ и, следовательно,

$$\int f\, dG_k \geqslant -\int |f|\, dG_k. \tag{48.17}$$

Сложив неравенства (48.16) и (48.17) получим:

$$\int f\, dB_k + \int f\, dG_k \geqslant k. \tag{48.18}$$

Пусть $D_k = B_k \cup G_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно D_k — открытое измеримое множество и

$$G_k \subset D_k \subset G_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{48.19}$$

В силу того, что множества B_k и G_k не пересекаются (так как не пересекаются множества A_k и G_k) из (48.18) имеем $\int f\, dD_k \geqslant \geqslant k$, откуда

$$\lim_{k \to \infty} \int f\, dD_k = +\infty. \tag{48.20}$$

Из включения (48.19) следует, что множества D_k, $k = 1, 2, \ldots$, образуют последовательность измеримых открытых множеств, монотонно исчерпывающую открытое множество G, ибо таковой являлась заданная последовательность G_k, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому равенство (48.20) означает, что интеграл $\int f\, dG$ расходится. □

Итак, для кратных интегралов сходимость несобственного интеграла $\int f\, dG$ эквивалентна его абсолютной сходимости.

Упражнение 2. Заменив в определении кратного несобственного интеграла всюду открытые множества областями (в частности, рассматривая только монотонно исчерпывающие данную область последовательности, состоящие только из измеримых областей), показать, что и при таком «более узком» определении кратного несобственного интеграла сохраняется теорема 3.

§ 49. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

49.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ

Пусть E — измеримое множество в R^n. Как известно (см. п. 44.6).

$$\mu E = \int dE. \tag{49.1}$$

Таким образом, с помощью n-кратного интеграла можно вычислять меру измеримых множеств в n-мерном пространстве (площадь —