множестве B_k справедливо неравенство $s_{\tau^*} \geq \int f\,dG_k + k$. Отсюда, очевидно, следует, что

$$\int f\,dB_k \geq \int |f|\,dG_k + k. \qquad (48.16)$$

Заметим, что $f \geq -|f|$ и, следовательно,

$$\int f\,dG_k \geq -\int |f|\,dG_k. \qquad (48.17)$$

Сложив неравенства (48.16) и (48.17) получим:

$$\int f\,dB_k + \int f\,dG_k \geq k. \qquad (48.18)$$

Пусть $D_k = B_k \cup G_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно D_k — открытое измеримое множество и

$$G_k \subset D_k \subset G_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (48.19)$$

В силу того, что множества B_k и G_k не пересекаются (так как не пересекаются множества A_k и G_k) из (48.18) имеем $\int f\,dD_k \geq \geq k$, откуда

$$\lim_{k \to \infty} \int f\,dD_k = +\infty. \qquad (48.20)$$

Из включения (48.19) следует, что множества D_k, $k = 1, 2, \ldots$, образуют последовательность измеримых открытых множеств, монотонно исчерпывающую открытое множество G, ибо таковой являлась заданная последовательность G_k, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому равенство (48.20) означает, что интеграл $\int f\,dG$ расходится. □

Итак, для кратных интегралов сходимость несобственного интеграла $\int f\,dG$ эквивалентна его абсолютной сходимости.

Упражнение 2. Заменив в определении кратного несобственного интеграла всюду открытые множества областями (в частности, рассматривая только монотонно исчерпывающие данную область последовательности, состоящие только из измеримых областей), показать, что и при таком «более узком» определении кратного несобственного интеграла сохраняется теорема 3.

§ 49. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

49.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ

Пусть E — измеримое множество в R^n. Как известно (см. п. 44.6).

$$\mu E = \int dE. \qquad (49.1)$$

Таким образом, с помощью n-кратного интеграла можно вычислять меру измеримых множеств в n-мерном пространстве (площадь —

в двумерном, объем — в трехмерном). Если n-кратный интеграл (49.1) можно свести к повторному (см. § 45), то вычисление меры измеримого множества E n-мерного пространства сведется к вычислению $(n-1)$-кратного интеграла.

Пусть, например, D — открытое измеримое множество в $(n-1)$-мерном пространстве $R^{n-1}_{x_1, \ldots, x_{n-1}}$, $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — неотрицательная функция, определенная и непрерывная на замыкании $\bar{D}$ множества D, а

$$G = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D, \quad 0 < x_n < f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

(таким образом, G является n-мерным аналогом криволинейной плоской трапеции, рассмотренной нами в п. 32.1). Тогда

$$\mu G = \int dG = \int dD \int\limits_0^{f(x_1, \ldots, x_{n-1})} dx_n = \int f(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dD,$$

т. е.

$$\mu G = \overbrace{\int \ldots \int}^{n-1 \text{ раз}}_{D} f(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Меру произвольных (необязательно измеримых по Жордану) в частности неограниченных, открытых множеств пространства R^n, $n \geqslant 2$, если ее понимать в смысле определения п. 31.1 и 31.2, т. е. как нижнюю меру Жордана, можно вычислить с помощью несобственных интегралов. Действительно пусть G — произвольное открытое множество в R^n и G_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — последовательность открытых измеримых множеств, монотонно исчерпывающих множество G (см. п. 48.1). Тогда, как известно (см. п. 31.2), $\lim\limits_{k \to \infty} \mu G_k = \mu G$. Но в силу (49.1) $\mu G_k = \int dG_k$, а поэтому $\mu G = \lim\limits_{k \to \infty} \int dG_k$.

По определению же кратного несобственного интеграла, $\lim\limits_{k \to \infty} \int dG_k = \int dG$. Таким образом $\mu G = \int f\, dG$, где интеграл в правой части понимается, вообще говоря (а именно, если G не является измеримой областью), как несобственный.

Остается лишь показать, что для любого открытого множества G всегда существует последовательность измеримых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots,$ монотонно исчерпывающая заданное множество G. Докажем это.

Рассмотрим последовательность T_k, $k = 1, \ldots,$ разбиений пространства R^n на кубы (см. п. 44.1) и обозначим через Q_k n-мерный открытый куб, определяемый следующим образом:

$$Q_k = \{(x_1, \ldots, x_n) : |x_i| < k, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Число кубов данного ранга k (см. п. 44.1), содержащихся в Q_k, а следовательно, и подавно в пересечении $G \cap Q_k$, конечно. Обозначим эти замкнутые кубы $P_1, \ldots, P_{j_k}$:

$$P_j \in T_k; \quad P_j \subset G \cap Q_k, \quad j=1, 2, \ldots, j_k.$$

Через G_k обозначим множество внутренних точек множества $\bigcup\limits_{j=1}^{j_k} P_j$. Например, в случае, изображенном на рис. 200, множество G_k состоит из внутренних точек двух квадратов P_1 и P_2 и интервала, получающегося отбрасыванием вершин этих квадратов из их общего ребра.

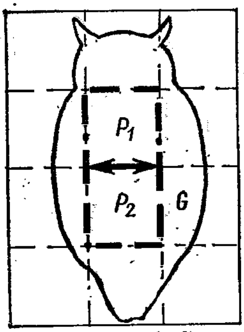

Рис. 200

Множества G_k, $k=1, 2, \ldots$, и являются открытыми измеримыми множествами, образующими последовательность, монотонно исчерпывающую данное открытое множество G.

Напомним, что для вычисления объемов тел часто оказывается удобным метод сечений: см. формулу (45.23).

Упражнение 1. Доказать, что построенная последовательность множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$, действительно образует последовательность измеримых множеств, монотонно исчерпывающих данное множество G.

49.2. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С помощью кратных интегралов можно вычислить различные физические величины: массу и заряд тела, центр тяжести, момент инерции, поток жидкости, потенциал тела и т. п.

Найдем в качестве примера центр тяжести плоской фигуры. Пусть в некоторой квадрируемой области G распределена некоторая масса, вообще говоря, с переменной поверхностной плотностью $\rho(x, y)$, т. е. на замыкании $\bar{G}$ области G задана некоторая неотрицательная и непрерывная функция $\rho(x, y)$. Область G с распределенной в ней массой будем называть *фигурой* S, а величину

$$M = \iint\limits_G \rho(x, y)\, dx\, dy \tag{49.2}$$

— ее *массой*. Если $\rho(x, y)$ — не тождественный ноль, то $M > 0$.

Определим и найдем центр тяжести фигуры S. Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{G_i\}$, $i=1, 2, \ldots, k$, области G (см. п. 44.3). Множество G_i с распределенной в нем массой плотности $\rho(x, y)$, $(x, y) \in G_i$, назовем фигурой S_i. Выберем по некоторой точке $(\xi_i, \eta_i) \in \bar{G}_i$. Величину $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i)\, \mu G_i$ назовем приближенным значением массы фигуры S_i (естественность такого названия следует из формулы (49.2)). Величины же $m_i\xi_i$ и $m_i\eta_i$ назовем приближенными значениями статических моментов фигуры S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, соответственно относительно координатных осей Oy и Ox (естественность этого названия следует из того, что статическими моментами материальной точки массы m с координатами (x, y) относительно осей Ox и Oy называются величины my и mx, см. п. 32.6). Наконец, величины

$$\begin{aligned} S_x(\tau) &= \sum_{i=1}^{k} \eta_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i)\,\mu G_i, \\ S_y(\tau) &= \sum_{i=1}^{k} \xi_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i)\,\mu G_i \end{aligned} \tag{49.3}$$

назовем приближенными τ-моментами фигуры S относительно осей Ox и Oy, а их пределы при $\delta_\tau \to 0$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_x(\tau) = S_x, \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} S_y(\tau) = S_y$$

— *статическими моментами фигуры* S относительно осей Ox и Oy. Эти пределы при сделанных предположениях существуют. Действительно, из формул (49.3) видно, что $S_x(\tau)$ и $S_y(\tau)$ являются интегральными суммами Римана для функций $y\rho(x, y)$ и $x\rho(x, y)$, а потому

$$S_x = \iint_G y\rho(x, y)\,dx\,dy, \quad S_y = \iint_G x\rho(x, y)\,dx\,dy. \tag{49.4}$$

Определение 1. *Точка (x_0, y_0) называется центром тяжести (центром масс, центром инерции) фигуры S, если статические моменты относительно координатных осей материальной точки массы M, равной массе всей фигуры S и находящейся в точке (x_0, y_0) равны соответствующим статическим моментам фигуры S, т. е. если*

$$Mx_0 = S_y, \quad My_0 = S_x.$$

Из формул (49.2) и (49.3) получаем

$$x_0 = \frac{\iint_G x\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \rho(x, y)\,dx\,dy}, \quad y_0 = \frac{\iint_G y\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \rho(x, y)\,dx\,dy}.$$

Упражнение 2. Доказать, что центр тяжести фигуры не зависит от выбора системы координат.

В качестве примера рассмотрим «криволинейную трапецию» G, порожденную графиками непрерывных неотрицательных функций $f(x)$ и $g(x)$, $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$:

$$G = \{(x, y) : a < x < b, \quad g(x) < y < f(x)\}.$$

Пусть $\rho(x, y) \equiv 1$. Поскольку $\iint_G dx\,dy = \mu G$, то

$$x_0 = \frac{1}{\mu G}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{\mu G}\int_a^b x\,dx \int_{g(x)}^{f(x)} dy = \frac{1}{\mu G}\int_a^b [f(x) - g(x)]\,x\,dx,$$

$$y_0 = \frac{1}{\mu G}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{\mu G}\int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} y\,dy = \frac{1}{2\mu G}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx;$$

отсюда

$$2\pi y_0 \mu G = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx - \pi\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Здесь в правой части равенства стоит объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции G вокруг оси x-в; — мы пришли ко второй теореме Гульдина.

Теорема (Гульдин). *Объем тела вращения плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести этой фигуры.*

Пример. Вычислим с помощью второй теоремы Гульдина объем μQ тора Q, полученного вращением круга $(x-a)^2 + y^2 \leqslant r^2$, $0 < r \leqslant a$ вокруг оси Oy:

$$\mu Q = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2.$$

Упражнения. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями:

3. $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $y \geqslant 1$; $\rho(x, y) = x + y$.
4. $y = 2x$, $y = -2$, $y = 4x - 2$; $\rho(x, y) = 2|x| + |y|$.

Найти статические моменты относительно осей координат однородной плоской фигуры ($\rho = \rho_0 = \text{const}$), ограниченной заданными линиями:

5. $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $x = 0$.
6. $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$.

Найти координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной указанными линиями:

7. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$; $\rho = \rho_0 = \text{const}$.
8. $y^2 = 4x$, $y = 2$, $x = 0$; $\rho(x, y) = x$.
9. $r = \sqrt{2}$, $r = 2\sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $r \geqslant \sqrt{2})$, $\rho = \rho_0 = \text{const}$ (r, φ — полярные координаты).
10. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $y = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

§ 50. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

50.1. ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть в пространстве R^3 фиксирована декартова система координат x, y, z. Декартовы координаты в плоскостях, в которых лежат отображаемые области, будем обозначать буквами u, v, сами эти области — буквой D, рассматриваемые их отображения — буквами f, r, ρ (быть может, с теми или иными индексами).