Пусть $\rho(x, y) \equiv 1$. Поскольку $\iint\limits_G dx\,dy = \mu G$, то

$$x_0 = \frac{1}{\mu G} \iint\limits_G x\,dx\,dy = \frac{1}{\mu G} \int\limits_a^b x\,dx \int\limits_{g(x)}^{f(x)} dy = \frac{1}{\mu G} \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,x\,dx,$$

$$y_0 = \frac{1}{\mu G} \iint\limits_G y\,dx\,dy = \frac{1}{\mu G} \int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{f(x)} y\,dy = \frac{1}{2\mu G} \int\limits_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx;$$

отсюда

$$2\pi y_0 \mu G = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - \pi \int\limits_a^b g^2(x)\,dx.$$

Здесь в правой части равенства стоит объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $G$ вокруг оси $x$-в; — мы пришли ко второй теореме Гульдина.

**Теорема (Гульдин).** *Объем тела вращения плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести этой фигуры.*

Пример. Вычислим с помощью второй теоремы Гульдина объем $\mu Q$ тора $Q$, полученного вращением круга $(x-a)^2 + y^2 \leqslant r^2$, $0 < r \leqslant a$ вокруг оси $Oy$:

$$\mu Q = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2.$$

Упражнения. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями:

3. $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $y \geqslant 1$; $\rho(x, y) = x + y$.
4. $y = 2x$, $y = -2$, $y = 4x - 2$; $\rho(x, y) = 2|x| + |y|$.

Найти статические моменты относительно осей координат однородной плоской фигуры ($\rho = \rho_0 = \text{const}$), ограниченной заданными линиями:

5. $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $x = 0$.
6. $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$.

Найти координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной указанными линиями:

7. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$; $\rho = \rho_0 = \text{const}$.
8. $y^2 = 4x$, $y = 2$, $x = 0$; $\rho(x, y) = x$.
9. $r = \sqrt{2}$, $r = 2\sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $r \geqslant \sqrt{2})$, $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ($r$, $\varphi$ — полярные координаты).
10. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $y = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

## § 50. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### 50.1. ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть в пространстве $R^3$ фиксирована декартова система координат $x$, $y$, $z$. Декартовы координаты в плоскостях, в которых лежат отображаемые области, будем обозначать буквами $u$, $v$, сами эти области — буквой $D$, рассматриваемые их отображения — буквами $f$, $r$, $\rho$ (быть может, с теми или иными индексами).

Как обычно, через $\bar{D}$ будем обозначать замыкание области $D$ (напомним, что $\bar{D}$ называется замкнутой областью), а через $\partial D$ — ее границу (см. п. 18.2). Для образов точек $M=(u, v)\in\bar{D}$ при указанных отображениях будет употребляться как запись вида $f(M)$, так и вида $f(u, v)$.

*Непрерывной поверхностью* $S$ называется всякое множество точек трехмерного пространства $R^3$, заданное как непрерывный образ некоторой замкнутой плоской области $\bar{D}$. Само рассматриваемое непрерывное отображение $r(u, v)$ замкнутой области $\bar{D}$ на множество $S$ называется *представлением поверхности* (или, подробнее, *параметрическим представлением*) и пишется

$$S=\{r(u, v):(u, v)\in\bar{D}\}.$$

Переменные $u$, $v$ называются *координатами*, или *параметрами*, непрерывной поверхности $S$.

Для непрерывной поверхности $S=\{r=r(u, v):(u, v)\in\bar{D}\}$ множество точек пространства $R^3$, заданное как образ границы $\partial D$ области $D$ при отображении $r(u, v)$, называется *краем поверхности* $S$ и обозначается через $\partial S$:

$$\partial S=\{r(u, v):(u, v)\in\partial D\}.$$

По аналогии с определением кривой можно ввести понятие эквивалентных отображений, но на этот раз не отрезков, а отображений замкнутых плоских областей в трехмерное пространство $R^3$, и считать по определению, что два эквивалентных непрерывных отображения задают одну и ту же непрерывную поверхность (см. п. 50.2*). Отображения, осуществляющие эквивалентность двух представлений одной и той же поверхности, называются *допустимыми преобразованиями параметров*.

При заданном представлении $r(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$, некоторой непрерывной поверхности и при фиксированных значениях параметров $u$, $v$ через $r(u, v)$, естественно, обозначается точка этой поверхности, в которую при рассматриваемом представлении отображается точка $(u, v)\in\bar{D}$.

Подчеркнем, что представление непрерывной поверхности не является обязательно взаимно однозначным отображением. Точка непрерывной поверхности $S=\{r(u, v);\ (u, v)\in\bar{D}\}$, в которую при данном отображении $r(u, v)$ отображаются по крайней мере две различные точки замкнутой области $\bar{D}$, называется *кратной точкой*, или *точкой самопересечения* этой поверхности.

Таким образом, если точка $M$ непрерывной поверхности является кратной точкой последней, то при заданном представлении $r(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$, этой поверхности существуют по крайней мере две такие точки $(u_1, v_1)\in\bar{D}$ и $(u_2, v_2)\in\bar{D}$, что $r(u_1, v_1)=r(u_2, v_2)=M$.

Отображение $r(u, v)$ можно задавать в координатном виде:

$$r(u, v)=(x(u, v),\quad y(u, v),\quad z(u, v))$$

и в векторном:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v),$$

где $\boldsymbol{r}(u,\ v)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(u,\ v)\in R^3$.

В дальнейшем будут изучаться прежде всего дифференциальные свойства поверхностей определенных классов, состоящих из «достаточно гладких», т. е. достаточное число раз (непрерывно) дифференцируемых поверхностей. Определим, например, понятие непрерывно дифференцируемой поверхности.

*Непрерывно дифференцируемой поверхностью* называется множество $S$ пространства $R^3$, заданное как непрерывно дифференцируемый образ некоторой замкнутой плоской области.

Само рассматриваемое непрерывно дифференцируемое отображение замкнутой области $\bar{D}$ на множество $S$ называется, как и выше, представлением этой поверхности, причем, по определению, считается, что два непрерывно дифференцируемых отображения замкнутых плоских областей задают одну и ту же непрерывно дифференцируемую поверхность, если они эквивалентны относительно непрерывно дифференцируемых преобразований (см. п. 50.2*).

Аналогичным образом определяются и другие специальные классы непрерывных поверхностей: дважды непрерывно дифференцируемые поверхности и вообще $n$ раз непрерывно дифференцируемые поверхности.

Если за параметры в одном из представлений непрерывной поверхности можно взять какие-либо две координаты пространства $R^3$ (например, если существует замкнутая область $\bar{D}$ на плоскости $xy$ и функция $z=f(x,\ y)$, $(x,\ y)\in\bar{D}$, являющаяся представлением рассматриваемой непрерывной поверхности), то такое представление называется явным.

Очевидно, что если непрерывная поверхность допускает явное представление, то она не имеет кратных точек.

В дальнейшем непрерывную поверхность там, где это не сможет привести к недоразумениям, будем называть просто поверхностью.

Пример. Поверхность, задаваемая представлением

$$x=r\cos\psi\cos\varphi,\quad y=r\cos\psi\sin\varphi,\quad z=r\sin\varphi,$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

является сферой с центром в начале координат и радиусом $r$, у которой весь меридиан $\varphi=0$ состоит из кратных точек.

В следующем пункте будет дано другое, в некотором смысле более детализированное, определение поверхности. Целесообразно, видимо, при первом чтении пропустить следующий пункт и вернуться к нему лишь тогда, когда в этом почувствуется внутренняя необходимость.

## 50.2*. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Для строгого определения поверхности необходимо прежде всего ввести понятие эквивалентных отображений замкнутых плоских областей.

**Определение 1.** *Непрерывное отображение $f$ замыкания $\bar{D}$ некоторой плоской области $D$ в трехмерное пространство $R^3$ называется эквивалентным непрерывному отображению $f_1$ замыкания $\bar{D}_1$ плоской области $D_1$ в то же пространство $R^3$, если существует такое гомеоморфное* (*см. определение* 5 *в* п. 41.4) *отображение $F$ замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, при котором внутренние точки переходят во внутренние, а граничные — в граничные* (*т. е. $D$ отображается на $D_1$, а $\partial D$ на $\partial D_1$*), *и для каждой точки $M \in D$ выполняется равенство*

$$f(M) = f_1[F(M)], \tag{50.1}$$

т. е. $f = f_1 \cdot F$.

В этом случае $F$ называется *отображением, осуществляющим эквивалентность отображений* $f$ и $f_1$. Если $f$ эквивалентно отображению $f_1$, то пишется $f \sim f_1$.

Схематически определение эквивалентных отображений можно изобразить диаграммой, где стрелками изображены рассматриваемые отображения и результат отображений не зависит от выбора пути на диаграмме:

$$\begin{tikzcd} & R^3 & \\ D \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "F"'] & & D_1 \arrow[ul, "f_1"'] \end{tikzcd}$$

Очевидно, что: 1) всякое отображение эквивалентно самому себе: $f \sim f$ (здесь отображением, осуществляющим эквивалентность, является тождественное отображение). Легко убедиться, что

2) $f \sim f_1$, то $f_1 \sim f$,

3) а если $f \sim f_1$ и $f_1 \sim f_2$, то $f \sim f_2$.

Если $f$ и $f_1$ — эквивалентные непрерывные отображения соответственно замкнутых областей $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$, то из (50.1) следует, что образы множеств $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$ при отображениях $f$ и $f_1$ совпадают:

$$f(\bar{D}) = f_1(\bar{D}_1). \tag{50.2}$$

Заметим еще, что условия, наложенные на эквивалентные отображения в определении 1, независимы. Именно, из того, что $F$ является гомеоморфным отображением замкнутой области $D$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, не следует, что оно переводит внутренние точки во внутренние. Например, если $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$ — круг, а $D_1 = \{(u, v) : 0 < u^2 + v^2 < 1\}$ — круг с «выколотым» центром, то тождественное отображение (очевидно, являющееся гомеоморфным) $\bar{D}$ на $\bar{D}_1$ переводит внутреннюю точку $(0, 0)$ области $D$ в граничную точку $(0, 0)$ области $D_1$.

Перейдем теперь к определению поверхности.

**Определение 2.** *Всякое множество всевозможных непрерывных эквивалентных между собой (см. определение 1) отображений $r(u, v)$ замкнутых плоских областей $\bar{D}$ в трехмерное пространство $R^3$ называется параметрически заданной поверхностью $S$ и обозначается*

$$S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}, \tag{50.3}$$

*а каждое из указанных эквивалентных непрерывных отображений $r(u, v)$ называется представлением параметрически заданной поверхности $S$.*

Если $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ — представление параметрически заданной поверхности $S$ и если $\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(u, v)$, то $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, называется *векторным представлением* этой поверхности $S$ и пишется

$$S = \{\boldsymbol{r}(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}\}. \tag{50.4}$$

Если $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, то функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = (u, v)$$

называются *координатным представлением* параметрически заданной поверхности $S$ и пишется

$$S = \{x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v); \quad (u, v) \in \bar{D}\}. \tag{50.5}$$

Очевидно, что параметрически заданная поверхность однозначно определяется каждым из своих представлений. Это позволяет, что часто более удобно, правую часть каждого из равенств (50.3), (50.4) и (50.5) понимать не как совокупность всех представлений определенного типа рассматриваемой поверхности $S$, а как некоторое вполне определенное ее соответствующее представление.

**Определение 3.** *Пусть $r(M)$, $M \in \bar{D}$ и $\rho(M_1)$, $M_1 \in \bar{D}_1$ — два представления некоторой параметрически заданной поверности $S$ и $F$ — отображение $\bar{D}$ на $\bar{D}_1$, осуществляющее их эквивалентность (см. определение 1).*

*Если $M_1 = F(M)$, $M \in \bar{D}$, $M_1 \in \bar{D}_1$ (точка $M$, а поэтому и точка $M_1$ фиксированы), и, следовательно, $r(M) = \rho(M_1) = P \in R^3$, то пары $(P, M)$ и $(P, M_1)$ называются эквивалентными и пишется*

$$(P, M) \sim (P, M).$$

Легко проверить, что

1) $(P, M) \sim (P, M)$;

2) если $(P, M) \sim (P, M_1)$, то $(P, M_1) \sim (P, M)$;

3) если $(P, M) \sim (P, M_1)$, а $(P, M_1) \sim (P, M_2)$, то $(P, M) \sim \sim (P, M_2)$.

Если $(P, M) \sim (P, M_1)$ и $M$ — внутренняя (граничная) точка замкнутой области $\bar{D}$, то, согласно определению 1, $M_1$ также является внутренней (граничной) точкой замкнутой области $\bar{D}_1$.

**Определение 4.** *Пусть $S$ — параметрически заданная поверхность. Всякая совокупность $\{(P, M)\}$, $M \in \bar{D}$, всех эквивалентных между собою пар $(P, M)$ (точка $P \in R^3$ фиксирована) называется точкой данной поверхности $S$, а точка $P$ — ее носителем.*

*Точка $\{(P, M)\}$, $M \in D$, поверхности $S$ называется внутренней (краевой) если каждая точка $M$ является внутренней (граничной) точкой соответствующей замкнутой области $\bar{D}$.*

Каждая точка $\{(P, M)\}$, $M \in \bar{D}$, параметрически заданной поверхности $S = \{r(M), M \in \bar{D}\}$ однозначно определяется каждой парой $(P, M) \in \{(P, M)\}$, и поскольку в этой паре $P = r(M)$, то каждая точка параметрически заданной поверхности $S$ при некотором заданном ее представлении $r(M)$, $M \in \bar{D}$, однозначно определяется точкой $M$, причем точка $P = r(M)$ является носителем рассматриваемой точки поверхности. Поэтому для краткости точки параметрически заданной поверхности будут, как правило, обозначаться не символом $\{(P, M)\}$, а просто $r(M)$, или, что равносильно, $r(u, v)$, где $M = (u, v)$. В силу сказанного это обозначение имеет однозначный смысл.

**Определение 5.** *Совокупность всех носителей всех точек параметрически заданной поверхности $S$ называется носителем этой поверхности.*

В силу условия (50.2) носитель параметрически заданной поверхности (являющийся, очевидно, некоторым множеством точек в пространстве $R^3$) однозначно определяется каждым ее представлением.

**Определение 6.** *Точка $P \in R^3$, являющаяся носителем двух разных точек параметрически заданной поверхности $S$, называется кратной точкой или, что то же, точкой самопересечения носителя параметрически заданной поверхности.*

Возвращаясь к определению поверхности, данному в п. 50.1, видим, что то, что там было названо «*непрерывной поверхностью*», в нашей новой терминологии называется «*носителем параметрически заданной поверхности*». Попытка ввести понятие «точки поверхности» для поверхностей с кратными точками приводит в том или ином виде к определениям 4 и 6. Отметим, что понятие параметрически заданной поверхности с кратными точками очень удобно при рассмотрении ряда вопросов, изучаемых в последующих параграфах.

В дальнейшем, там, где это не сможет привести к недоразумениям, «непрерывная поверхность» (см. п. 50.1), или, что то же, «носитель параметрически заданной поверхности» (см. определение 5), а также «параметрически заданная поверхность» (см. определение 2), будут называться просто поверхностью.

Определим теперь понятие части поверхности.

**Определение 7.** *Пусть $S$ — параметрически заданная поверхность $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, — некоторое ее представление, $D'$ — область, содержащаяся в $D: D' \subset D$. Параметрически заданная поверхность $S'$, определяемая представлением $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}'$, называется частью поверхности $S$.*

Как уже отмечалось (см. п. 50.1), понятие эквивалентных отображений замкнутых плоских областей можно вводить не только для непрерывных отображений, но и для других классов отображений, например для непрерывно дифференцируемых. В применении к параметрически заданным поверхностям это приводит к непрерывно дифференцируемым поверхностям. Их определение базируется на понятии отображений, эквивалентных относительно непрерывно дифференцируемых преобразований.

Определим это понятие. Как и раньше (см. п. 39.3), под функцией, непрерывно дифференцируемой в замыкании некоторой области, будем понимать такую функцию, которая имеет непрерывные в самой области производные, непрерывно продолжаемые на ее границу.

Отображение некоторой замкнутой области называется *непрерывно дифференцируемым*, если каждая координатная функция, задающая это отображение (см. п. 41.4), является непрерывно дифференцируемой функцией на рассматриваемой замкнутой области. При этом продолженные функции в этих случаях обозначаются теми же символами, что и исходные продолжаемые функции.

Если некоторое отображение $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемо на замыкании $\bar{D}$ области $D$, то, согласно сделанному соглашению, это означает, в частности, что якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ этого отображения непрерывно продолжаем с области $D$ на ее замыкание $\bar{D}$ и его продолжение, обозначаемое тем же символом, $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$, также будет называться якобианом.

Прежде всего надо сформулировать, что будет пониматься под эквивалентными непрерывно дифференцируемыми отображениями. Для этого введем понятие регулярных отображений.

**Определение 8.** *Гомеоморфное отображение $F$ замыкания $\bar{D}$ плоской области $D$ на замыкание $\bar{D}_1$ плоской области $D_1$, переводящее внутренние точки во внутренние, а граничные — в граничные, называется регулярным отображением замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, если как само это отображение $F$, так и обратное ему $F^{-1}$ непрерывно дифференцируемы соответственно на замкнутых областях $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$.*

Заметим, что всякое регулярное отображение $F$ замкнутой области $\bar{D}$ имеет во всех точках области $D$ не равный нулю якобиан. Действительно, согласно определению 8, при отображении $F$ образ каждой внутренней точки является внутренней точкой. Поскольку в этих точках прямое и соответственно обратное отображения непрерывно дифференцируемы, то их якобианы не могут обратиться в ноль, ибо их произведение равно единице (см. п. 41.7).

Отсюда следует, что якобиан регулярного отображения $F$ не равен нулю и на замкнутой области $\bar{D}$. Действительно, в силу непрерывной продолжаемости якобианов как прямого, так и обратного отображений соответственно на замыкания $\bar{D}$ и $\overline{F(D)}$ областей $D$ и $F(D)$ произведение этих якобианов равно единице и для всех точек замкнутой области $\bar{D}$.

Мы уже встречались с регулярными отображениями замкнутых плоских областей специального вида, например, в п. 46.1.

**Определение 9.** *Пусть $f$ и $f_1$ суть непрерывные отображения замыканий $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$ плоских областей $D$ и $D_1$ в пространство $R^3$ и пусть эти отображения непрерывно дифференцируемы в замкнутых областях $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$. Отображения $f$ и $f_1$ называются эквивалентными относительно непрерывно дифференцируемых преобразований, если существует такое регулярное отображение $F$ замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, что для каждой точки $M \in \bar{D}$ выполняется условие* (50.1).

Теперь можно определить непрерывно дифференцируемую поверхность.

**Определение 10.** *Всякое множество отображений $r(u, v)$ замкнутых плоских областей $\bar{D}$ в трехмерное пространство $R^3$ непрерывно дифференцируемых и эквивалентных относительно непрерывно дифференцируемых преобразований называется параметрически заданной непрерывно дифференцируемой поверхностью $S$, а каждое из указанных отображений $r(u, v)$ называется представлением этой поверхности и пишется, как и раньше,*

$$S = \{r(u, v);\quad (u, v) \in \bar{D}\}.$$

Подчеркнем, что если поверхность $S = \{r(u, v);\ (u, v) \in D\}$ непрерывно дифференцируема, то это, в частности, означает, что каждое ее векторное представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, имеет частные производные $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$*), непрерывные в области $D$ и непрерывно продолжаемые на ее границу. Поскольку, согласно принятому соглашению, продолженные функции обозначаются

*) Такие понятия, как, например, непрерывность, предел, дифференцируемость естественным образом переносятся и на вектор-функции нескольких переменных. Так, функция $\boldsymbol{r}(u, v)$, определенная на области $G$, называется *непрерывной в точке* $(u_0, v_0) \in G$, если $\lim\limits_{(u, v) \to (u_0, v_0)} \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$. Производная $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ определяется равенством

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial u} = \left.\frac{d\boldsymbol{r}(u, v_0)}{du}\right|_{u=u_0}.$$

теми же символами, что и продолжаемые*), то можно считать, что функции $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ непрерывны на замкнутой области $\bar{D}$.

Подобным образом можно определить и другие классы параметрически заданных поверхностей, например дважды непрерывно дифференцируемые или вообще $n$ раз непрерывно дифференцируемые параметрически заданные поверхности, а также понятие их точки, носителя и их части.

Резюмируя, окончательно можно сказать, что *параметрически заданной поверхностью какого-то класса является некоторая совокупность эквивалентных между собой в определенном смысле отображений* $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, *называемых ее представлениями.*

Понятие эквивалентности определяется в зависимости от выбора класса.

**Определение 11.** *Преобразования параметров, осуществляющие переход от одного представления поверхности к другому, ему эквивалентному, называются допустимыми.*

Таким образом, если $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ и $\rho(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in \in \bar{D}_1$ — два представления одной и той же параметрически заданной поверхности некоторого класса, а отображение

$$u_1 = \varphi(u, v),$$
$$v_1 = \psi(u, v)$$

замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$ является допустимым преобразованием параметров, то для всех точек $(u, v) \in \bar{D}$ выполняется соотношение (см. (50.1))

$$r(u, v) = \rho[\varphi(u, v), \quad \psi(u, v)].$$

Параметрически заданная поверхность при заданном классе допустимых преобразований параметров однозначно определяется каждым своим представлением, поэтому, чтобы задать такую поверхность, достаточно задать лишь одно ее представление.

### 50.3. ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННЫЕ НЕЯВНО

Отметим еще один подход к понятию поверхности. Если $F(x, y, z)$ — непрерывная в некоторой трехмерной области функция, то совокупность точек $(x, y, z)$ таких, что

$$F(x, y, z) = 0, \tag{50.6}$$

называется *поверхностью, заданной неявно.* Не останавливаясь подробно на анализе такого подхода к понятию поверхности, отметим лишь, что в случае если функция $F$ удовлетворяет в неко-

---

*) Точнее, это соглашение было принято (см. п. 39.3) для скалярных функций и, следовательно, для координат векторных функций, поэтому его естественно принять и для самих векторных функций.

торой точке $(x_0, y_0, z_0)$ условиям теоремы о неявных функциях (см. п. 41.1), то часть поверхности (50.6) в некоторой окрестности указанной точки (т. е. пересечение этой окрестности с данной поверхностью) допускает явное представление, и можно сказать, что в этой ситуации поверхность, заданная неявно, локально сводится к поверхности, заданной явным представлением (см. п. 50.1). Только такой случай поверхностей, заданных неявно, встретится в дальнейшем, поэтому не будем специально останавливаться на разъяснении тех или иных понятий для поверхностей, заданных неявно.

В качестве простейшего примера поверхности, заданной неявно, отметим уравнение

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, образуют поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

В дальнейшем будут изучаться в основном лишь непрерывные поверхности, заданные параметрическим представлением и, вообще говоря, с кратными точками. Они будут называться, как это уже отмечалось, просто «поверхностями»; в случаях, когда понятие поверхности будет пониматься в каком-либо другом смысле, это будет специально оговариваться.

## 50.4. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Пусть

$$S=\{\boldsymbol{r}(u, v);\quad (u, v)\in\bar{D}\} \tag{50.7}$$

— непрерывно дифференцируемая поверхность. Рассмотрим некоторое ее векторное представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$. Как и всякое ее векторное представление, оно является непрерывно дифференцируемой вектор-функцией на замкнутой плоской области $\bar{D}$.

Будем для простоты считать, что пересечение каждой прямой $u=u_0$ или $v=v_0$ с замкнутой областью $\bar{D}$ состоит из одного отрезка (быть может, вырождающегося в точку) или пусто. Пусть, например, пересечение $\bar{D}$ с прямой $v=v_0$ не пусто, тогда

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v_0),\quad (u, v_0)\in\bar{D}$$

($v_0$ фиксировано) является представлением некоторой непрерывно дифференцируемой кривой, которая называется *координатной линией* (*u-линией*). Вектор

$$\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}=(x_u, y_u, z_u)$$

является ее касательным вектором. Аналогично определяются другие координатные линии (*v-линии*) с помощью представления

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0, v),\ (u_0, v)\in\bar{D}$$

($u_0$ фиксировано) и касательные к ним векторы

$$\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial r}{\partial v} = (x_v,\ y_v,\ z_v).$$

**Определение 12.** *Точка $r(u, v)$ поверхности* (50.7), *для которой векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не коллинеарны (линейно независимы), называется неособой при данном представлении этой поверхности. В противном случае, т. е. когда векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ коллинеарны в данной точке, она называется особой точкой поверхности при данном ее представлении.*

Если точка поверхности неособая, то в ней, в частности $\boldsymbol{r}_u \neq 0$, $\boldsymbol{r}_v \neq 0$. Очевидно, что точка поверхности является неособой при данном представлении поверхности в том и только в том случае, когда в этой точке $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0}$.

Упражнение 1. Доказать, что если $r(u_0, v_0)$ является внутренней неособой при данном представлении $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, точкой поверхности $S$, т. е. для этой точки $(u_0, v_0) \in D$ и $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, то некоторая часть поверхности $S$, для которой точка $r(u_0, v_0)$ также является внутренней, обладает явным представлением относительной одной из осей координат.

Рассмотрим кривую на поверхности (50.7). Пусть эта кривая задана непрерывно дифференцируемыми функциями

$$u = u(t),\ v = v(t),\ (u(t),\ v(t)) \in D,\ a \leqslant t \leqslant b,$$

т. е. представлением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}[u(t),\ v(t)],\quad (u(t),\ v(t)) \in D,\quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{50.8}$$

причем $u'^2(t) + v'^2(t) > 0$ на $[a, b]$.

Продифференцировав равенство (50.8), получим

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv, \tag{50.9}$$

здесь $du = u'(t)\,dt$, $dv = v'(t)\,dt$. Если точка поверхности, в которой рассматривается равенство (50.9), не особая, то вектор $d\boldsymbol{r}$ является касательным к кривой (50.8). Равенство (50.9) показывает, что в данной точке $r(u_0, v_0)$ поверхности (50.7) касательная к любой кривой (50.8) на этой поверхности, проходящей через точку $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$, лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$.

**Определение 13.** *Плоскость, проходящая через точку $r(u_0, v_0)$ поверхности* (50.7), *в которой лежат все касательные к кривым* (50.8), *проходящим через эту точку, называется касательной плоскостью к поверхности в данной точке (называемой точкой касания).*

Упражнение 2. Доказать, что для любого вектора $\boldsymbol{v}$, лежащего в касательной плоскости к поверхности $S$ в неособой точке, существует проходящая через эту точку кривая на поверхности $S$, для которой вектор $\boldsymbol{v}$ является касательным.

Если данная точка поверхности (50.7) неособая, то в ней всегда существует, и притом единственная, касательная плоскость: именно в силу (50.9) ею является плоскость, проходящая через $r(u_0, v_0)$ параллельно векторам $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$. Отсюда легко написать ее уравнение в векторном виде. Обозначив через $\boldsymbol{r}_0$ радиус-вектор точки касания, а через $\boldsymbol{r}$ — текущий радиус-вектор точек на касательной плоскости, получим (рис. 201):

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=0$$

(в левой части равенства стоит смешанное произведение указанных векторов).

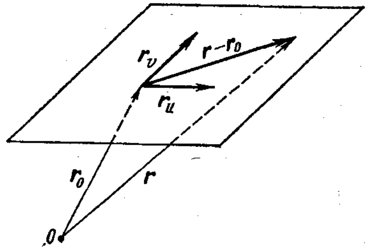

Рис. 201

Если $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$, $\boldsymbol{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{r}_u=(x_u, y_u, z_u)$, $\boldsymbol{r}_v=(x_v, y_v, z_v)$, то уравнение касательной плоскости в координатном виде перепишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}=0.$$

В случае явного задания поверхности

$$z=f(x, y), \quad (x, y)\in\overline{D}, \tag{50.10}$$

будем иметь $u=x$, $v=y$ и поэтому

$$\begin{matrix} x_u=1, & y_u=0, & z_u=f_x, \\ x_v=0, & y_v=1, & z_v=f_y; \end{matrix} \tag{50.11}$$

следовательно, уравнение касательной плоскости в этом случае будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$z-z_0=(x-x_0)f_x+(y-y_0)f_y, \tag{50.12}$$

где через $f_x$ и $f_y$ для краткости обозначены частные производные $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ в точке $(x_0, y_0)$.

Из этой формулы следует, что два определения касательной плоскости для поверхности с явным представлением (50.10), данные в настоящем пункте и ранее в п. 20.5, эквивалентны. В самом деле, оба определения приводят к одному и тому же уравнению (50.12).

**Определение 14.** *Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная этой плоскости, называется нормальной прямой к поверхности в указанной точке.*

Ее уравнение в общем случае в неособой точке поверхности имеет вид

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

В случае явного представления (50.10) эти уравнения принимают вид

$$\frac{x-x_0}{f_x} = \frac{y-y_0}{f_y} = -(z-z_0). \qquad (50.13)$$

**Определение 15.** *Всякий ненулевой вектор, коллинеарный нормальной прямой, проходящей через данную точку поверхности, называется нормалью к этой поверхности в указанной точке.*

Примером нормали в неособой точке поверхности является векторное произведение

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v,$$

вычисленное в рассматриваемой точке.

Согласно данному определению, в каждой неособой (при заданном представлении) точке $r(u, v)$ рассматриваемой поверхности при фиксированных значениях параметров $u$ и $v$ существует, и притом единственная, нормальная прямая. Следует иметь в виду, что если точка $P$ пространства является кратной точкой поверхности, т. е. существует по крайней мере две пары параметров (при заданном представлении) $(u_1, v_1)$ и $(u_2, v_2)$ таких, что $P = r(u_1, v_2) = r(u_2, v_2)$, то может, конечно, случиться, что этим парам параметров будут соответствовать различные нормальные прямые, тем самым в указанной точке $P$ нормальная прямая будет не единственна.

Для поверхности, заданной неявно уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $(x_0, y_0, z_0)$ функция, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, и в этой точке $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$, уравнение касательной плоскости в точке $(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$(x-x_0)F_x + (y-y_0)F_y + (z-z_0)F_z = 0,$$

где $F_x$, $F_y$ и $F_z$ обозначают значения соответствующих частных производных, взятых в точке $(x_0, y_0, z_0)$.

Вспомнив, что вектор с координатами $F_x$, $F_y$, $F_z$, т. е. вектор $\nabla F=(F_x, F_y, F_z)$ называется *градиентом функции* $F$ (см. п. 20.6), видим, что градиент функции в данной точке поверхности $F(x, y, z)=0$ перпендикулярен касательной плоскости в этой точке, т. е. коллинеарен нормальной прямой.

Поэтому уравнение нормальной прямой к поверхности имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}.$$

Все эти формулы сразу следуют из (50.12) и (50.13). Действительно, если, например, $F_z \neq 0$ и $z=f(x, y)$ — функция, определяемая уравнением $F=0$ в окрестности точки $(x_0, y_0, z_0)$, то достаточно заметить, что $f_x=-\frac{F_x}{F_z}$, $f_y=-\frac{F_y}{F_z}$ (см. п. 41.1).

Если функция $F(x, y, z)$ задана и непрерывно дифференцируема в области $G$, то для любой точки поверхности, заданной неявно уравнением $F(x, y, z)=c$ ($c$ — постоянная), получим уравнение касательной плоскости и нормальной прямой того же вида, что и в случае $F=0$, если только в этой точке $F_x^2+F_y^2+F_z^2>0$. Множество точек $(x, y, z)\in G$, для которых $F=c$, называется, как мы знаем, поверхностью уровня функции $F$ (см. п. 19.1).

Таким образом, градиент $\nabla F=(F_x, F_y, F_z)$ в точке $(x_0, y_0, z_0)$ поверхности уровня $F(x, y, z)=c$ направлен по нормальной прямой к этой поверхности в точке $(x_0, y_0, z_0)$. Иначе говоря, градиент функции ортогонален к поверхности уровня (т. е. перпендикулярен касательной плоскости к поверхности уровня в рассматриваемой точке).

Мы доказали существование касательной плоскости в неособой точке у непрерывно дифференцируемой поверхности при фиксированном ее представлении. Возникает вопрос: что будет, если перейти к другому представлению этой поверхности? Прежде всего, останется ли неособая точка неособой, а особая — особой? Оказывается, что да.

Докажем это. Пусть $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$, и $\boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1)\in\bar{D}_1$, суть два представления одной и той же непрерывно дифференцируемой поверхности. Поскольку переход от любого представления непрерывно дифференцируемой поверхности к другому ее представлению осуществляется посредством регулярного отображения, то существует такое регулярное отображение

$$\begin{aligned} u_1&=\varphi(u, v),\\ v_1&=\psi(u, v) \end{aligned} \tag{50.14}$$

замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, что для всех точек $(u, v)\in\bar{D}$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{r}(u, v)=\boldsymbol{\rho}[\varphi(u, v), \psi(u, v)]. \tag{50.15}$$

При этом, как было доказано, якобиан отображения (50.14) не равен нулю нигде в замкнутой области $\bar{D}$:

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in \bar{D}.$$

Продифференцировав тождество (50.15), получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u &= \varphi_u \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_u \boldsymbol{\rho}_{v_1}, \\ \boldsymbol{r}_v &= \varphi_v \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_v \boldsymbol{\rho}_{v_1}. \end{aligned} \tag{50.16}$$

Следовательно, пара векторов $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$, $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ преобразуется в пару векторов $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ с помощью невырожденной матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_u & \psi_v \\ \varphi_u & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Поэтому для данной точки $(u, v)$ векторы $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ будут линейно независимыми тогда и только тогда, когда будут линейно независимыми векторы $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$, $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ в точке $(u_1, v_1)$, получающейся из точки $(u, v)$ с помощью преобразования (50.14), причем в случае их линейной независимости плоскость векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ и плоскость векторов $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$ и $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ совпадают.

Итак, *неособая (особая) при данном представлении точка непрерывно дифференцируемой поверхности будет неособой (особой) и при любом другом представлении этой поверхности, а плоскость, касательная к поверхности в неособой точке при одном представлении поверхности, будет касательной и при другом ее представлении.*

**Определение 16.** *Непрерывно дифференцируемая поверхность, у которой нет особых точек, называется гладкой поверхностью.*

В силу доказанного выше, чтобы проверить, что данная поверхность является гладкой, достаточно убедиться, что у нее имеется одно непрерывно дифференцируемое представление и при этом представлении нет особых точек.

Следует обратить внимание на то, что у гладкой поверхности $S = \{\boldsymbol{r}(u, v),\ (u, v) \in \bar{D}\}$ векторные функции $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не только непрерывны на замыкании области $D$, но согласно определению и неколлинеарны на этом замыкании $\bar{D}$. Иначе говоря, у гладкой поверхности (50.7) всюду на замкнутой области $\bar{D}$ выполняется неравенство

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0.$$

Замечание. Из формул (50.16) следует, что

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (\varphi_u \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_u \boldsymbol{\rho}_{v_1}) \times (\varphi_v \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_v \boldsymbol{\rho}_{v_1}) = \varphi_u \psi_v (\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}) + \\ + \psi_u \varphi_v (\boldsymbol{\rho}_{v_1} \times \boldsymbol{\rho}_{u_1}) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} (\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}).$$

Поскольку при допустимых преобразованиях параметров (50.14) якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ нигде в $\bar{D}$ не обращается в ноль, то из полученной формулы следует, что векторные произведения $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ и $\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}$ в данной точке поверхности могут обращаться в ноль только одновременно. Но было показано, что необходимым и достаточным условием того, что данная точка поверхности при данном представлении поверхности $\boldsymbol{r}(u, v)$ — неособая, является неравенство нулю в этой точке векторного произведения $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$. Тем самым еще раз доказано, что неособая (особая) точка поверхности при одном представлении поверхности будет такой же и при другом ее представлении.

Упражнения. 3. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ в точке $M(3; 5; 7)$.

4. К поверхности $xyz = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x + y + z - a = 0$ ($a = \text{const}$).

5. Доказать, что все касательные плоскости поверхности $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ ($f$ — произвольная дифференцируемая функция) проходят через начало координат.

6. Доказать, что все касательные плоскости, проведенные к поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = au + f(v)$ ($a = \text{const}$, $f$ — произвольная дифференцируемая функция) в любой точке ее координатной линии $v = c$ ($c = \text{const}$), проходят через фиксированную прямую.

## 50.5 ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ

Зафиксируем какое-либо представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ данной гладкой поверхности и рассмотрим касательную к ней плоскость в некоторой ее точке. Как мы видели, векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ образуют в этой плоскости базис. Векторы, лежащие в касательной плоскости, будем обозначать символом $d\boldsymbol{r}$, а их координаты относительно базиса $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — через $du$ и $dv$ [*]. Таким образом

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv.$$

Найдем квадрат длины вектора, лежащего в касательной плоскости, выраженный через координаты естественного базиса $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ (в линейной алгебре это выражение обычно называется *основной метрической формой* рассматриваемого пространства, в данном случае плоскости):

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = (\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv)^2 = \boldsymbol{r}_u^2 du^2 + 2\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v du\,dv + \boldsymbol{r}_v^2 dv^2.$$

Введем обозначения

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2; \tag{50.17}$$

[*] Это обозначение естественно, ибо если вектор в касательной плоскости является касательным к некоторой кривой (50.8) на поверхности, то при соответствующем выборе параметра вектор $d\boldsymbol{r}$ будет являться дифференциалом вектора (50.8) и, следовательно, для него будет выполняться равенство (50.9).

тогда

$$|dr^2| = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{50.18}$$

**Определение 17.** *Квадратичная форма* $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ *называется первой квадратичной формой поверхности* *).

Посмотрим, как она меняется при переходе к другому представлению поверхности (см. формулы (50.14)). Как известно (см. (50.16)), при этом базисы в рассматриваемой плоскости преобразуются с помощью матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, координаты векторов преобразуются с помощью транспонированной матрицы, т. е. матрицы Якоби

$$J = \begin{Vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Если матрицу первой квадратичной формы (50.18) при представлении поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ обозначить через $A$, а при представлении $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)$ — через $A_1$, т. е.

$$A = \begin{Vmatrix} E & F \\ F & G \end{Vmatrix}, \quad E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2,$$

$$A_1 = \begin{Vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{Vmatrix}, \quad E_1 = \rho_{u_1}^2, \quad F_1 = \rho_{u_1}\rho_{v_1}, \quad G_1 = \rho_{v_1}^2,$$

то, как известно из курса линейной алгебры, для первой квадратичной формы поверхности, как и вообще для всякой квадратичной формы,

$$A = J^* A_1 J,$$

где через $J^*$ обозначена матрица, транспонированная с матрицей Якоби $J$.

Отсюда для соответствующих определителей

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2,$$

или

$$EG - F^2 = (E_1G_1 - F_1^2) \left| \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} \right|^2. \tag{50.19}$$

*) То, что рассматриваемая квадратичная форма называется первой, объясняется тем, что существуют другие квадратичные формы, связанные с поверхностью. Их изучение не входит в задачу настоящего курса.

Заметим, что по самому своему определению первая квадратичная форма положительно определенна (действительно, если $du^2+dv^2>0$, т. е. $d\mathbf{r}\not\equiv 0$, то $|d\mathbf{r}|^2>0$), а поэтому ее дискриминант положителен: $EG-F^2>0$. В силу же отсутствия особых точек выполняются неравенства $\mathbf{r}_u\neq 0$, $\mathbf{r}_v\neq 0$, а поэтому из определения коэффициентов $E$ и $G$ (50.17) непосредственно следует, что $E>0$ и $G>0$.

Если известна первая квадратичная форма поверхности, то можно, даже не располагая уравнением поверхности и не зная ее формы, решать целый ряд относящихся к ней задач, например находить длины лежащих на ней кривых и углы между ними, вычислять площадь частей поверхности. Совокупность всех свойств поверхности, которые можно установить, исходя из одной лишь первой квадратичной формы, называется внутренней геометрией поверхности. К рассмотрению подобных задач мы и перейдем.

Упражнения. 7. Какая из следующих квадратичных форм может служить первой квадратичной формой некоторой поверхности: а) $du^2+3du\,dv+dv^2$; б) $du^2+6du\,dv+9dv^2$; в) $du^2-6du\,dv+13dv^2$; г) $du^2+2du\,dv-dv^2$.

8. Найти первую квадратичную форму *геликоида* (винтовой поверхности) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av+f(u)$ ($a=\text{const}$, $f$ — произвольная дифференцируемая функция).

9. Доказать, что первая квадратичная форма поверхности вращения приводима к виду $du^2+G(u)\,dv^2$.

## 50.6. КРИВЫЕ НА ПОВЕРХНОСТИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИХ ДЛИН И УГЛОВ МЕЖДУ НИМИ

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую кривую (50.8), лежащую на данной поверхности (50.7). Предположим, что отсчет длины дуг $s=s(t)$ на ней производится в направлении возрастания параметра, т. е. что $\frac{ds}{dt}>0$. Как известно (см. п. 16.5), $\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$, откуда $ds=|d\mathbf{r}|$, следовательно, см. (50.18),

$$ds^2=|d\mathbf{r}|^2=d\mathbf{r}^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

поэтому

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Таким образом, для длины $L$ кривой (50.8) получаем формулу

$$L=\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Перейдем теперь к вычислению углов между кривыми на поверхности.

**Определение 18.** *Если две кривые пересекаются в некоторой точке, то углом между ними в этой точке называется угол,* *образованный их касательными в указанной точке (если, конечно, эти касательные существуют).*

Пусть две гладкие кривые, лежащие на рассматриваемой поверхности, пересекаются в некоторой точке. Обозначим дифференциалы их представлений в этой точке соответственно через $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$, а коэффициенты разложений по векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — соответственно через $du$, $dv$ и $\delta u$, $\delta v$; тогда

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv,$$
$$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,\delta u + \boldsymbol{r}_v\,\delta v.$$

Поэтому если $\varphi$ — искомый угол между кривыми, т. е. между векторами $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$, то

$$\cos\varphi = \frac{d\boldsymbol{r}\,\delta\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|} = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}.$$

Упражнения. 10. Доказать, что для того, чтобы координатные $u$- и $v$-линии на поверхности были ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы всюду на поверхности выполнялось равенство $F = 0$.

11. На поверхности с первой квадратичной формой $du^2 + dv^2$ найти угол между кривыми $v = 2u$, $v = -2u$.

### 50.7. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть непрерывно дифференцируемое представление $\boldsymbol{r}(u, v)$ рассматриваемой гладкой поверхности $S$ определено на замыкании $\bar{D}$ квадрируемой области $D$. Рассмотрим разбиение $T_k$ плоскости переменных $u$ и $v$ на квадраты некоторого ранга $k$. Поскольку из квадрируемости области следует ее ограниченность, то замкнутая область $\bar{D}$ окажется покрытой конечным числом квадратов ранга $k$. Пронумеруем каким-либо образом все непустые пересечения этих квадратов с замкнутой областью $\bar{D}$ и обозначим их через $E_i$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$. Тогда

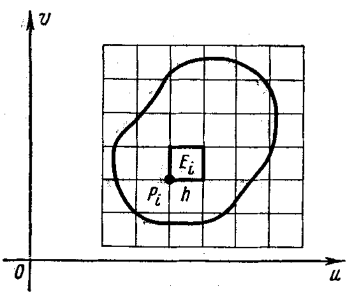


Рис. 202

$$\tau = \{E_i : E_i = Q \cap \bar{D} \neq \varnothing,\ Q \in T_k\}$$

образует разбиение замкнутой области $\bar{D}$ (определение разбиения см. в п. 44.3).

Рассмотрим множества $E_i$, которые представляют собой полные замкнутые квадраты, лежащие в области $D$ (при достаточно малой мелкости разбиения $\tau$ такие непустые множества $E_i$ всегда существуют; почему?). Совокупность всех указанных множеств $E_i$ обозначим через $\tau(\partial D)$ (ср. с п. 44.4).

Возьмем какой-либо квадрат $E_i \in \tau(\partial D)$ (рис. 202). Пусть длина его стороны равна $h$, а $P_i$ — одна из его вершин. Тогда при переходе от вершины $P_i$ к соседним вершинам радиус-вектор $\boldsymbol{r}(u, v)$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $h$, получит приращения, равные по абсолютной величине соответственно числам $|\boldsymbol{r}_u h|$ и $|\boldsymbol{r}_v h|$ ибо

$$\boldsymbol{r}(u+h, v)-\boldsymbol{r}(u, v)=\boldsymbol{r}_u h+o(h),$$
$$\boldsymbol{r}(u, v+h)-\boldsymbol{r}(u, v)=\boldsymbol{r}_v h+o(h).$$

При определении площади поверхности будем образы квадратов $E_i \in \tau(\partial D)$ заменять прямолинейными параллелограммами, построенными на векторах $\boldsymbol{r}_u h$ и $\boldsymbol{r}_v h$ (рис. 203). Найдем площадь такого параллелограмма. Обозначив ее через $\Delta\sigma_i$, получим

$$\Delta\sigma_i=|\boldsymbol{r}_u h\times\boldsymbol{r}_v h|_{P_i}=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|_{P_i}h^2=$$
$$=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|_{P_i}\mu E_i.$$

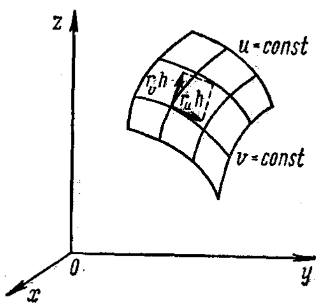

Рис. 203

Функции $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ непрерывны на замкнутой квадрируемой области $\bar{D}$; поэтому

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{E_i\in\tau(\partial D)}\Delta\sigma_i=\iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv, \tag{50.20}$$

где $\delta_\tau$, как всегда, обозначает мелкость разбиения $\tau$. Очевидно, условие, что мелкость разбиения $\delta_\tau$ стремится к нулю, равносильно тому, что ранги $k$ квадрильяжей плоскости, из которых мы исходили, стремятся к бесконечности.

Для доказательства справедливости равенства (50.20) достаточно заметить, что при произвольном выборе точек $P_i\in E_i\in\tau$, $i=1, 2, \ldots$, справедливо равенство

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{E_i\in\tau(\partial D)}\Delta\sigma_i=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{i_0}|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|_{P_i}\mu E_i=\iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv.$$

Действительно, во-первых, предел интегральных сумм интегрируемой функции не зависит от выбора в данном случае точек $P_i\in E_i\in\tau$, а, во-вторых, выбрасывание из интегральных сумм слагаемых, соответствующих множествам $E_i\in\tau$, не входящих в $\tau(\partial D)$, не влияет, как известно (см. п. 44.3), на величину предела интегральных сумм, в нашем случае — на величину предела (50.20).

**Определение 19.** *Предел* (50.20) *называется площадью или мерой* $\mu S$ *поверхности* $S$:

$$\mu S=\lim_{\sigma_\tau\to 0}\sum_{E_i\in\tau(\partial D)}\Delta\sigma_i.$$

Для вычисления площади поверхности из (50.20) непосредственно получается формула

$$\mu S = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv. \tag{50.21}$$

Запишем ее в другом виде, выразив подынтегральное выражение через коэффициенты первой квадратичной формы. Прежде всего заметим, что для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливы формулы

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \widehat{\boldsymbol{ab}},$$
$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \widehat{\boldsymbol{ab}},$$

где $\widehat{\boldsymbol{ab}}$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Возведем в квадрат и сложим эти формулы:

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{ab}|^2 = \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{b}^2.$$

Отсюда следует, что

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = \boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2, \tag{50.22}$$

поэтому формула (50.21) может быть записана также в виде

$$\mu S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \tag{50.23}$$

Иногда для краткости записи выражение $\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ обозначается символом $dS$:

$$dS = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv; \tag{50.24}$$

и называется *элементом площади*. Применяя это обозначение, формулу (50.23) можно переписать в виде

$$\mu S = \iint_D dS.$$

Покажем, что величина площади поверхности не зависит от выбора ее представления (при этом рассматриваются только представления, заданные на замкнутых квадрируемых областях). Перейдем к другому представлению $\rho = \rho(u_1, v_1)$ данной непрерывно дифференцируемой поверхности, которое задано на замыкании $\bar{D}_1$ квадрируемой области $D_1$ и, следовательно, для которого преобразование (50.14) параметров $u$, $v$ в параметры $u_1$, $v_1$ является регулярным отображением $\bar{D}$ на $\bar{D}_1$.

В новой системе координат рассмотрим интеграл

$$\mu S = \iint_{D_1} \sqrt{F_1 G_1 - F_1^2} \, du_1 \, dv_1.$$

Для сравнения его с интегралом (50.23) выполним замену переменных (50.14), что возможно, так как все предпосылки теоремы 2' п. 46.2 в данном случае выполнены. Использовав (50.19), получим

$$\mu S_1 = \iint_{D_1} \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\, du_1\, dv_1 =$$
$$= \iint_{D} \sqrt{E_1G_1 - F_1^2} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv = \iint_{D} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \mu S.$$

Таким образом, действительно, величина площади поверхности не зависит от выбора ее представления.

Найдем выражение для площади поверхности, имеющей явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$. В этом случае $u = x$, $v = y$, $\boldsymbol{r} = (x, y, f(x, y))$ и, следовательно (см. формулы (50.11)),

$$\boldsymbol{r}_u = (1, 0, f_x), \quad \boldsymbol{r}_v = (0, 1, f_y),$$
$$E = \boldsymbol{r}_u^2 = 1 + f_x^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = f_x f_y, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2 = 1 + f_y^2,$$
$$EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2; \tag{50.25}$$
$$\mu S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy.$$

Упражнения. 12. Доказать, что площадь поверхности вращения, определенная в п. 32.4, совпадает с площадью этой поверхности, определенной в настоящем пункте.

13. Найти периметр и внутренние углы криволинейного треугольника, лежащего на поверхности с первой квадратичной формой $du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2$ и ограниченного дугами кривых $u = \frac{1}{2} av^2$, $u = -\frac{1}{2} av^2$, $v = 1$ ($a = \mathrm{const} > 0$).

14. Найти площадь криволинейного четырехугольника, лежащего на *геликоиде* $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = au$ ($a = \mathrm{const}$) и ограниченного дугами кривых $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.

15. На поверхности с первой квадратичной формой $du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2$ расположен криволинейный треугольник, ограниченный дугами кривых $u = av$, $u = -av$, $v = 1$. Найти его площадь.

## 50.8. ОРИЕНТАЦИЯ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В этом параграфе будем предполагать, что в пространстве выбирается всегда правая система координат. Это означает следующее. Пусть $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — единичные орты координатных осей. Если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{k}$ на плоскость $xOy$, то вектор $\boldsymbol{i}$ надо повернуть на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, чтобы он совпал с вектором $\boldsymbol{j}$. В этом случае говорят также, что упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ согласована по «правилу штопора». Аналитически это означает, что в пространстве точек $(x, y, z)$ рассматриваются только такие упорядоченные базисы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, которые получаются из упорядоченного базиса $\boldsymbol{i}=(1;\ 0;\ 0)$, $\boldsymbol{j}=(0;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{k}=(0;\ 0;\ 1)$ с помощью матриц, имеющих положительный определитель (точнее, равный $+1$). Таким образом, если

$$\boldsymbol{e}_m=c_{m1}\boldsymbol{i}+c_{m2}\boldsymbol{j}+c_{m3}\boldsymbol{k},\qquad m=1,\ 2,\ 3,$$

является базисом, задающим правую систему координат, то

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}=+1.$$

Все определения и понятия, связанные с координатами, вводимые ниже в этом параграфе, даются применительно к правым системам координат.

Пусть $S$ — гладкая поверхность (см. определение 16). Тогда всякое ее векторное представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$, $(u,\ v)\in\bar{D}$, непрерывно дифференцируемо и $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$ на замкнутой области $\bar{D}$.

Следовательно, в каждой точке поверхности $S$ определен нормальный единичный вектор

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|},\tag{50.26}$$

являющийся непрерывной функцией на $\bar{D}$. Кратко это обстоятельство выражают, говоря, что на поверхности $S$ существует непрерывная единичная нормаль.

**Определение 20.** *Всякая непрерывная единичная нормаль* $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}(u,\ v)$, $(u,\ v)\in\bar{D}$, *гладкой поверхности* $S=\{r(u,\ v);\ (u,\ v)\in\bar{D}\}$ *называется ориентацией поверхности* $S$.

Очевидно, что если вектор $\boldsymbol{\nu}$ является ориентацией поверхности $S$, то и вектор $-\boldsymbol{\nu}$ также является ориентацией той же поверхности, и легко показать, что других ориентаций нет.

Упражнение 16. Доказать, что поверхность может иметь только две ориентации.

Одна из двух ориентаций $\boldsymbol{\nu}$ или $-\boldsymbol{\nu}$ (произвольно выбранная) называется *положительной*, а другая — *отрицательной*.

Таким образом, понятие положительности и отрицательности ориентации в этом смысле не определяется однозначно самой поверхностью, а зависит от выбора ее представления. Положительная и отрицательная ориентации поверхности называются *противоположными* ориентациями этой поверхности.

Для определенности в дальнейшем для гладкой поверхности, заданной фиксированным векторным представлением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$, $(u,\ v)\in\bar{D}$ за положительную ориентацию будем принимать всегда вектор (50.26).

Подчеркнем, что непрерывность нормали $\boldsymbol{\nu}$ рассматривается относительно переменных $u$, $v$, а не относительно пространственных переменных $x$, $y$ и $z$. Если поверхность имеет кратные точки, то может случиться, что в точке пространства, являющейся носителем разных точек поверхности может оказаться несколько различных нормалей.

Чтобы при регулярном преобразовании параметров $u$, $v$ у поверхности сохранялась ориентация, необходимо дополнительно потребовать, чтобы якобиан этого преобразования был положительным. Действительно, для преобразования параметров

$$u_1 = \varphi(u, v),$$
$$v_1 = \psi(u, v)$$

из формул (50.16), как мы видели (см. замечание в конце п. 50.4) следует, что

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} (\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}),$$

и, следовательно, если якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ положителен, то векторы $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ и $\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}$ направлены в одну и ту же сторону, а если он отрицателен, то в противоположные.

Таким образом, для поверхностей, у которых выбрана ориентация, допустимыми преобразованиями будем считать такие непрерывно дифференцируемые преобразования, у которых якобиан положителен.

Поверхность $S$ с положительной ориентацией будем обозначать через $S^+$, а с отрицательной — через $S^-$.

Подчеркнем, что всякая гладкая параметрическая заданная поверхность всегда ориентируема, т. е. у нее всегда существует ориентация.

**Определение 21.** *Поверхность, у которой фиксирована одна из ее ориентаций, называется ориентированной.*

Данное выше определение ориентации, разумеется, не переносится на негладкие поверхности. Примером поверхности, не дифференцируемой в одной точке, на которой уже нельзя выбрать непрерывную нормаль, является конус:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leqslant a^2. \tag{50.27}$$

В этом случае векторное представление имеет вид:

$$\boldsymbol{r}(x, y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

следовательно,

$$\boldsymbol{r}_x = \left(1;\ 0;\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \boldsymbol{r}_y = \left(0;\ 1;\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right);$$

$$\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ 1\right); \quad |\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y| = \sqrt{2}.$$

Поскольку пределы $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0;\,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ не существуют (почему?), то и единичная нормаль

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y|}=\left(-\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}};\ -\frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

не имеет предела при $(x, y)\to(0, 0)$. Поэтому на конусе (50.27) нельзя выбрать нормаль, непрерывную на $\bar{D}=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant a^2\}$.

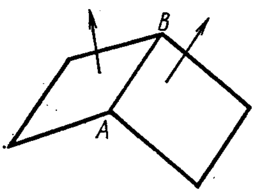

Рис. 204

Простым примером негладкой поверхности $S$, на которой существует целая линия, вдоль которой нормали при любом их выборе терпят разрыв, является часть двугранного угла, изображенная на рис. 204. Указанной линией на этой поверхности является отрезок $AB$.

### 50.9. СКЛЕИВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Данное выше определение параметрически заданной непрерывной поверхности не охватывает все то, что интуитивно входит в понятие поверхности. Так, можно показать, что поверхность шара не является носителем какой-либо непрерывной параметрически заданной поверхности без кратных точек. Считать же, что поверхность шара имеет кратные точки, представляется неоправданным усложнением. Существуют различные пути для преодоления этого неудобства. Мы выберем путь, основанный на склеивании конечного числа поверхностей. Склеивание поверхностей естественным образом возникает при рассмотрении самых простых задач. Например, боковую поверхность цилиндра естественно рассматривать как результат склеивания противоположных сторон прямоугольника, полную поверхность цилиндра как результат склеивания его боковой поверхности и двух оснований, поверхность конуса как результат склеивания его боковой поверхности с основанием и т. д.

Перейдем к точным определениям. Будем говорить, что у поверхности $S=\{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v)\in\bar{D}\}$ ее край (см. п. 50.1) является кривой, если граница $\partial D$ области $D$ является кривой (точнее, носителем кривой):

$$\partial D=\{u(t),\ v(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}.$$

В этом случае край $\partial S$ поверхности $S$ можно также рассматривать как кривую:

$$\partial S=\{r(u(t),\ v(t));\ a\leqslant t\leqslant b\}.$$

Мы определим операцию склеивания поверхностей для поверхностей, края которых являются кривыми.

Пусть заданы поверхности $S_i = \{r_i(u_i, v_i);\ (u_i, v_i) \in \bar{D}_i\}$, края $\partial S_i$ которых суть кривые, т. е. границы $\partial D_i$ областей $D_i$ являются кривыми:

$$u_i = u_i(t_i),\ v_i = v_i(t_i),\ a_i \leqslant t_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Тогда края поверхностей $\partial S_i$ будут представлять собой кривые

$$\gamma_i = \{\boldsymbol{r}_i(u_i(t_i), v_i(t_i));\ a_i \leqslant t_i \leqslant b_i\}.$$

Пусть для некоторых пар $(i, j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $i \neq j$, задано конечное число отрезков $[a_{ij}^k, b_{ij}^k] \subset [a_i, b_i]$, $a_{ij}^k \leqslant b_{ij}^k$, и отрезков $[a_{ji}^k, b_{ji}^k] \subset [a_j, b_j]$, $a_{ji}^k \leqslant b_{ji}^k$, $k = 1, 2, \ldots, n_{ij} = n_{ji}$, причем как отрезки $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$, так и отрезки $[a_{ji}^k, b_{ji}^k]$ попарно не имеют общих внутренних точек, а также гомеоморфизмы $\varphi_{ij}^k : [a_{ij}^k, b_{ij}^k] \to [a_{ji}^k, b_{ji}^k]$, называемые *склеивающими гомеоморфизмами*. При этом для любого $t_i \in [a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ имеет место «склеивание»:

$$\boldsymbol{r}_i(u_i(t_i), v_i(t_i)) = \boldsymbol{r}_j(u_j(\varphi_{ij}^k(t_i)), v_j(\varphi_{ij}^k(t_i))). \qquad (50.28)$$

Обозначим через $\gamma_{ij}^k$ кривую с представлением

$$\boldsymbol{r}_i(u_i(t_i), v_i(t_i)),\ t \in [a_{ij}^k, b_{ij}^k].$$

Кривые $\gamma_{ij}^k$ называются *кривыми склейки* или *кривыми, по которым производится склеивание.*

Очевидно, что в силу (50.28) отображение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_j(u_j(t_j), v_j(t_j)),\ t_j \in [a_{ji}^k, b_{ji}^k]$$

также является представлением кривой $\gamma_{ij}^k$, ибо гомеоморфизмы $\varphi_{ij}^k$ представляют собой допустимое преобразование параметра для кривой $\gamma_{ij}^k$.

Будем предполагать кроме того, что при $j' \neq j$ отрезки

$$[a_{ij}^k, b_{ij}^k] \text{ и } [a_{ij'}^l, b_{ij'}^l],\ k = 1, 2, \ldots, n_{ij},\ l = 1, 2, \ldots n_{ij'},$$

не имеют общих внутренних точек, а следовательно, каждый конец отрезка $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ может принадлежать еще не более чем одному отрезку $[a_{ij'}^l, b_{ij'}^l]$. Это условие означает, что каждая кривая склейки $\gamma_{ij}^k$ является частью только двух кривых $\gamma_i$ и $\gamma_j$, образующих края поверхностей $S_i$ и $S_j$.

Поверхности $S_i$ и $S_j$ называются соседними, если они склеиваются по крайней мере по одной кривой $\gamma_{ij}^k$. Система склеивающих гомеоморфизмов $\varphi_{ij}^k$ называется *связной*, если для любых поверхностей $S_p$ и $S_q$ из рассматриваемой системы в ней существуют такие поверхности $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_r}$, что $S_{i_1} = S_p$, $S_{i_r} = S_q$, и каждая поверхность $S_{i_\nu}$ является соседней с $S_{i_{\nu+1}}$, т. е. склеена с ней по одной или нескольким кривым с помощью соответствующих склеивающих гомеоморфизмов $\varphi_{i_\nu i_{\nu+1}}$, $\nu=1, 2, \ldots r-1$.

**Определение 22.** *Система поверхностей $S_1, S_2, \ldots, S_m$ со связной системой склеивающих гомеоморфизмов $\varphi_{ij}^k$ называется поверхностью, склеенной из поверхностей $S_1, \ldots, S_m$* по кривым $\gamma_{ij}^k$ *и обозначается через $S=\{S_i\}$.*

Это определение, несмотря на свою формальную громоздкость, имеет, очевидно, простой геометрический смысл. Образно говоря, склеенная поверхность $S=\{S_i\}$ представляет собой поверхности $S_1, \ldots, S_m$, у некоторых пар которых $S_i$, $S_j$ отождествлены (склеены) точки, лежащие на кривых $\gamma_{ij}^k$ и отображающиеся друг в друга при гомеоморфизмах $\varphi_{ij}^k$ — в этом и состоит условие склеивания (50.28). Безусловно, как отмечалось, кроме того предполагается, что от каждой поверхности $S_i$ можно через конечное число шагов перейти к любой другой поверхности $S_j$, переходя каждый раз с некоторой поверхности на одну из соседних с ней.

Если $S=\{S_i\}$ — склеенная поверхность, то совокупность всех дуг, являющихся такими частями кривых $\partial S_i$, что никакие точки этих частей, кроме, быть может, концевых, не склеиваются ни с какими точками других кривых $\partial S_i$, называется краем $\partial S$ склеенной поверхности $S$.

Можно показать, что объединяя соответствующим образом указанные части кривых $\partial S_i$, принадлежащие краю $\partial S$ поверхности $S=\{S_i\}$, можно получить конечное число замкнутых кривых (контуров). Иначе говоря, край склеенной поверхности состоит из конечного числа замкнутых контуров.

Примером склеивания поверхностей может служить склеивание в сферу $x^2+y^2+z^2=1$ двух полусфер $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ и $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\leqslant 1$, по их краю, т. е. по окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$. Задавая уравнение этой окружности в параметрическом виде

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=0,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

в качестве склеивающего гомеоморфизма $\varphi:[0, 2\pi]\to[0, 2\pi]$ можно взять тождественное отображение отрезка $[0, 2\pi]$ на себя.

С помощью склеивания гладких поверхностей можно определить понятие кусочно-гладкой поверхности.

**Определение 23.** *Поверхность $S=\{S_i\}$, склеенная из гладких поверхностей $S_1, \ldots, S_m$, называется кусочно-гладкой поверхностью.*

Поверхность кругового цилиндра, поверхность параллелепипеда, дают примеры кусочно-гладких поверхностей. Прямой же круговой конус (50.27) нельзя разбить на конечное число склеенных гладких частей, поэтому он не является кусочно-гладкой поверхностью в смысле определения 23. Можно обобщить операцию склеивания поверхностей таким образом, что при формальном сохранении определения кусочно-гладких поверхностей для такой обобщенной операции склеивания в класс кусочно-гладких поверхностей попадут уже и конические поверхности. Мы не будем на этом останавливаться и предоставим проделать это в случае необходимости самому читателю.

## 50.10. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ И НЕОРИЕНТИРУЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Очередной нашей задачей является определение понятия ориентации для поверхностей, склеенных из параметрически заданных поверхностей.

Определение ориентации с помощью выбора непрерывной единичной нормали на поверхности оказывается в этом случае неудобным даже при отсутствии кратных точек и понимании непрерывности нормали, как ее непрерывной зависимости от точек пространства (а не параметров склеиваемых поверхностей). Это связано с возможным нарушением гладкости поверхности на кривых, по которым происходит склеивание.

Например, часть поверхности двугранного угла, изображенную на рис. 204, можно рассматривать как результат склеивания двух равных прямоугольников. Если стремиться по разным граням к одной и той же точке на ребре этого угла, то пределы соответствующих единичных нормалей получатся разные. Ниже будет дано такое определение ориентируемой поверхности, при котором указанная поверхность будет ориентируемой.

Отметим, что при склеивании поверхностей даже «гладким образом» (т. е. когда для любой кривой, по которой произведено склеивание, в каждой ее точке можно так выбрать единичную нормаль, что она будет пределом соответствующим образом выбранных в окрестности этой точки единичных нормалей двух склеивающихся поверхностей) у склеенных поверхностей могут возникнуть качественно новые особенности: в отличие от параметрически заданных поверхностей в этом случае не всегда на всей поверхности можно выбрать непрерывную единичную нормаль. Примером такой поверхности является так называемый лист Мёбиуса *). Его можно получить, взяв прямоугольную полоску бумаги $ABCD$, один раз перекрутив ее вокруг оси симметрии $MN$, параллельной сторонам $BC$ и $AD$ и склеив ребро $AB$ с $CD$ (рис. 205). Правда, при таком способе образования лист Мёбиуса получается в результате склеивания поверхности самой с собой. Однако нетрудно получить его и склеиванием, описанным в определении 22, двух прямоугольников $ABEF$ и $FECD$ (см. рис. 205).

Одной из характерных особенностей листа Мёбиуса является то, что у него имеется лишь одна «сторона»: его невозможно, как например боковую поверхность цилиндра, покрасить, скажем, с одной стороны красной, а с другой синей краской. Кроме того,

*) А. Ф. Мёбиус (1790—1868) — немецкий математик и астроном.

на листе Мёбиуса нельзя выбрать единичную нормаль, которая являлась бы непрерывной функцией точки пространства.

Все приведенные соображения делают естественным попытаться дать такое определение ориентации поверхности, для которого поверхности, например, типа поверхности параллелепипеда оказались бы ориентированными, а поверхности типа листа Мёбиуса — неориентированными.

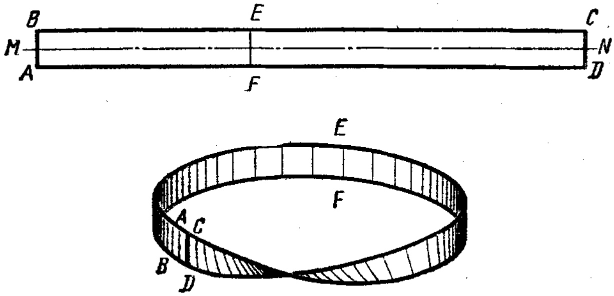


Рис. 205

Обратим внимание на то, что лист Мёбиуса может являться носителем параметрически заданной гладкой поверхности с кратными точками, и эта поверхность, как всякая гладкая параметрически заданная поверхность, будет ориентированной. Это, конечно, не имеет никакого отношения к неориентируемости самого листа Мёбиуса.

### 50.11. ВТОРОЙ ПОДХОД К ПОНЯТИЮ ОРИЕНТАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

Перейдем к описанию другого подхода к понятию ориентации, основанного на склеивании поверхностей, края которых суть кривые. Пусть $S=\{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v)\in \overline{D}\}$ — гладкая поверхность, краем которой является кривая. Положительная ориентация кривой $\partial D=\{u(t),\ v(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ (т. е. ориентация против часовой стрелки на плоскости $u$, $v$ с правой системой координат) в силу отображения $r(u(t),\ v(t))$, $a\leqslant t\leqslant b$, порождает вполне определенную ориентацию края $\partial S$ поверхности $S$. Эта ориентация края $\partial S$ поверхности $S$ называется согласованной с ориентацией

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

(см. определение 20) поверхности $S$.

Естественность этого определения можно пояснить следующим образом. Рассмотрим явно заданную поверхность $S: z=f(x,\ y)$,

$(x, y) \in \bar{D}$. Для нее (см. (50.10), (50.11) и (50.26))

$$\mathbf{v} = \left( -\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_y^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right).$$

Следовательно, $\cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} > 0$, т. е. вектор нормали $\mathbf{v}$ образует с осью $Oz$ острый угол и поэтому согласован с положительной ориентацией края $\partial S$ поверхности $S$ по правилу штопора: ориентация контура $\partial S$ соответствует направлению вращения ручки штопора, а направление нормали $\mathbf{v}$ — движению самого штопора (рис. 206).

Очевидно, что если ориентация $\mathbf{v}$ рассматриваемой гладкой поверхности $S$ согласована с ориентацией ее края $\partial S$, то ориентация $-\mathbf{v}$ согласована с противоположной ориентацией кривой $\partial S$. Таким образом, задание ориентации $\mathbf{v}$ гладкой поверхности равносильно заданию ориентации кривой $\partial S$, являющейся ее краем. Поэтому ориентированный край $\partial S$ гладкой поверхности $S$ будем так же как и непрерывную единичную нормаль $\mathbf{v}$ называть *ориентацией поверхности $S$*.

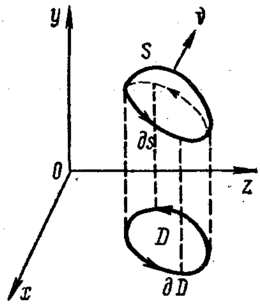

Рис. 206

Для негладкой параметрически заданной поверхности, краем которой является контур, его ориентацию можно принять за исходное определение ориентации самой поверхности. Пусть $S_1$ и $S_2$ — две гладкие поверхности, у которых края суть кривые, и пусть эти две поверхности склеены (в смысле определения 22) по кривым $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, являющимся частями краев поверхностей $S_1$ и $S_2$. Ориентации $\partial S_1$ и $\partial S_2$ поверхностей $S_1$ и $S_2$ называются *согласованными*, если каждая из них порождает на склеивающихся кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ противоположные ориентации.

**Определение 24.** *Поверхность $S$, склеенная из поверхностей $S_1, \ldots, S_m$ называется ориентируемой, если существуют такие ориентации $\partial S_1, \ldots, \partial S_m$ краев поверхностей $S_1, \ldots, S_m$, что для любых двух соседних поверхностей $S_i$ и $S_j$ их ориентации $\partial S_i$ и $\partial S_j$ согласованы.*

Совокупность таких ориентаций, если она существует, называется *ориентацией поверхности $S$*.

Если указанной совокупности ориентаций $\partial S_i$ не существует, то поверхность $S$ называется *неориентируемой*.

Если $\partial S_1, \ldots, \partial S_m$ является ориентацией поверхности $S = \{S_i\}$, то совокупность противоположных ориентаций также является ориентацией поверхности $S$, называемой *противоположной данной*.

Можно показать, что если поверхность $S$ ориентируема, то никаких других ориентаций, кроме двух указанных, у нее нет. Одна из этих двух ориентаций (произвольно какая) обычно называется положительной, а другая — отрицательной.

Аналогично ранее рассмотренному в п. 50.8 случаю ориентируемая поверхность, у которой фиксирована одна из ее ориентаций, называется *ориентированной*. При этом та из ориентированных поверхностей, ориентация которой названа положительной, обозначается через $S^+$, а противоположно ориентированная — через $S^-$.

Край ориентированной склеенной поверхности $S=\{S_i\}$, как край всякой склеенной поверхности, состоит, согласно сказанному выше, из конечного числа замкнутых контуров. Каждый из этих контуров в свою очередь представляет собой объединение конечного числа кривых, каждая из которых является частью одного из контуров $\partial S_i$, а именно такой частью, что все ее точки, кроме быть может концевых, не склеиваются с точками других краев $\partial S_j$. Поэтому заданная согласованная ориентация склеенной ориентируемой поверхности $S=\{S_i\}$ порождает определенные ориентации (т. е. порядки точек) на указанных кривых. Можно показать, что эти ориентации, вместе взятые, составляют ориентации всех контуров, входящих в край $\partial S$ склеенной поверхности $S$. Совокупность этих ориентаций контуров, составляющих край $\partial S$ поверхности $S$, называется *ориентацией* этого *края*, порожденной заданной ориентацией поверхности $S$, или, что то же, согласованной с ней.

Обратим внимание на то, что в определении 24 ориентации поверхности не предполагалось даже дифференцируемости склеиваемых поверхностей $S_1, \ldots, S_m$.

Если поверхность $S$ склеена из гладких поверхностей $S_1, \ldots, S_m$, то для задания ее ориентации можно задать на каждой поверхности $S_1, \ldots, S_m$ непрерывные единичные нормали таким образом, чтобы согласованные с ними ориентации $\partial S_i$ краев поверхностей $S_i$ были согласованы между собой в смысле определения 24, т. е. являлись ориентацией поверхности $S$ (см. рис. 207).

Для того, чтобы при таком задании ориентации узнать, совпадают или нет две ориентации, достаточно проверить это лишь в одной произвольной точке: если в ней нормали совпадают, то они совпадают и всюду, а если они в этой точке не совпадают, т. е. противоположны, то они и всюду противоположны, поскольку, как выше отмечалось, существуют только две ориентации заданной поверхности.

Однако в случае кусочно-гладкой поверхности уже нельзя ввести понятие положительной ориентации, используя заданные представления склеиваемых гладких поверхностей и беря на них единичные нормали по формуле (50.26), так как эти ориентации могут оказаться несогласованными. Поэтому в случае кусочно-гладких поверхностей следует всегда конкретно оговаривать, что именно подразумевается в данном случае под ориентированными поверхностями $S^+$ и $S^-$ заданной поверхности $S$.

Можно показать, что всякая кусочно-гладкая поверхность, являющаяся границей некоторой области трехмерного пространства, ориентируема. При этом одна из ориентаций состоит из единичных нормалей, направленных от поверхности в область — так называемые *внутренние нормали*, а другая состоит из единичных нормалей, направленных от поверхности наружу от области — так называемые *внешние нормали*. Примером такой поверхности является сфера. В качестве ее ориентации можно взять, например, единичные нормали, направленные по радиусу от точки сферы к центру (рис. 208).

Рис. 207

Примером неориентируемой поверхности (в смысле определения 24) является лист Мёбиуса.

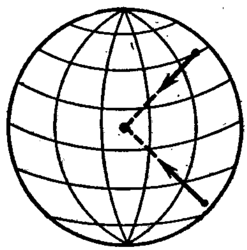

Рис. 208.

Иногда ориентируемые кусочно-гладкие поверхности называют также *двусторонними поверхностями*: они имеют две «стороны», соответствующие двум выборам единичных нормалей, задающим две ее ориентации. Соответственно неориентируемые поверхности называются *односторонними*. Оправдание этого термина было пояснено в п. 50.10 на примере листа Мёбиуса.

Мы не будем останавливаться на математизации всех описанных наглядных соображений и доказательстве высказанных утверждений. Это потребовало бы методов, изучение которых выходит за рамки настоящего курса. Упомянутые выше без доказательства общие утверждения по существу не используются в дальнейшем изложении. В каждом же конкретном случае, о котором будет идти речь, можно будет всегда непосредственно указать, какая именно ориентация рассматривается в данном случае.

Упражнения. 17. Доказать, что прямой круговой цилиндр является кусочно-гладкой поверхностью без края.

18. Пусть заданы вектор $\boldsymbol{\tau}$ и кривая $\gamma=\{\rho(u),\ a\leqslant u\leqslant b\}$. *Цилиндрической поверхностью* $S$ с образующей $\gamma$ и направляющей, параллельной вектору $\boldsymbol{\tau}$, называется поверхность, заданная представлением вида

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)\overset{\text{def}}{=}\rho(u)+v\boldsymbol{\tau},\quad a\leqslant u\leqslant b,\quad c\leqslant v\leqslant d.$$

Доказать, что если кривая $\gamma$ — кусочно-гладкая, то и поверхность $S$ кусочно-гладкая.