§ 51. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этом и следующих параграфах будут рассматриваться только поверхности, задаваемые параметрическими представлениями, и притом только гладкие (см. определение 16 в § 50) и кусочно-гладкие (см. определение 23 в § 50).

51.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть задана гладкая поверхность S, причем

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)= \\ =\{x=x(u, v),\ y=y(u, v),\ z=z(u, v);\ (u, v)\in\bar{D}\} \tag{51.1}$$

— ее представление, точнее, непрерывно дифференцируемое представление без особых точек, D — квадрируемая плоская область и, как обычно, E, G и F — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S. Пусть, далее, на множестве точек $r(u, v)$ поверхности S задана функция Φ, т. е. функция $\Phi(r(u, v))= \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Иногда функцию Φ будем обозначать также через $\Phi(x, y, z)$ (ср. п. 47.1).

Определение 1. *Интеграл* $\iint\limits_S \Phi(x, y, z)\,dS$ *определяется равенством* (*см.* (50.24))

$$\iint\limits_S \Phi(x, y, z)\,dS= \\ =\iint\limits_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{51.2}$$

Он называется *поверхностным интегралом первого рода.*

При определенных ограничениях, налагаемых на функцию Φ, интеграл (51.2) существует. Так, например, он существует для всякой непрерывной на гладкой поверхности $S=\{r(u, v), (u, v)\in \bar{D}\}$ функции Φ, т. е. для непрерывной на замкнутой квадрируемой области $\bar{D}$ функции $\Phi(r(u, v))$. В самом деле, в этом случае согласно определению 1 интеграл

$$\iint\limits_S \Phi(x, y, z)\,dS$$

сводится к интегралу от непрерывной на $\bar{D}$ функции, который, как известно (см. п. 44.4), существует. Более общие условия существования поверхностного интеграла первого рода могут быть получены из соответствующих условий существования кратных интегралов (см. п. 44.4), примененных к интегралу, стоящему в правой части равенства (51.2).

Пусть для простоты функция Φ непрерывна на гладкой поверхности S и пусть $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)=(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1))$ — другое представление этой поверхности, которое задано на замыкании $\bar{D}_1$ квадрируемой области $\bar{D}_1$ и для которого преобразование (50.14) параметров u, v в u_1, v_1 взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо на $\bar{D}$ и имеет на $\bar{D}$ не равный нулю якобиан. Если E_1, F_1 и G_1 суть коэффициенты первой квадратичной формы, соответствующие этому представлению, то

$$\iint_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv =$$
$$= \iint_{D_1} \Phi(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1)) \sqrt{E_1G_1-F_1^2}\, du_1\, dv_1. \quad (51.3)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, выполнить замену переменных (50.14) и воспользоваться формулой (50.19). Таким образом, поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора представления поверхности. Поверхностные интегралы первого рода встречаются в различных вопросах математики и ее приложений. Например, площадь поверхности (см. п. 50.7) выражается с помощью поверхностного интеграла первого рода: если функция $\Phi(x, y, z)$ тождественно равна единице на поверхности S, то формула (51.2) превращается в формулу для площади μS поверхности S (см. (50.23)):

$$\mu S = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv = \iint_S dS.$$

Если $\Phi(x, y, z)$ — плотность некоторой массы, распределенной по поверхности S, то интеграл (51.2) дает величину массы всей поверхности.

Пусть теперь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — как обычно, единичные координатные векторы,

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \boldsymbol{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \boldsymbol{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \boldsymbol{k} \quad (51.4)$$

и

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n}/|\boldsymbol{n}|, \quad (51.5)$$

причем, согласно нашим предположениям, нормаль $\boldsymbol{\nu}$ непрерывно продолжаема на границу области D.

Поверхность S, на которой выбрана единичная нормаль $\boldsymbol{\nu}$, обозначим через S^+, а ту же поверхность, на которой выбрана нормаль $-\boldsymbol{\nu}$, — через S^- (очевидно, $\boldsymbol{\nu}$ и $-\boldsymbol{\nu}$ суть две ориентации поверхности S). Подчеркнем, что S^+ и S^- определяются самой поверхностью «с точностью до ориентации» и зависят от выбора представления поверхности.

Определение 2. *Поверхностные интегралы*

$$\iint_{S^+} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy \quad \text{и} \quad \iint_{S^-} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy, \quad (51.6)$$

называемые поверхностными интегралами второго рода (при заданном представлении поверхности), определяются согласно формулам

$$\iint\limits_{S^+} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S} \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{k}})\,dS,$$
$$\iint\limits_{S^-} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S} \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{-\mathbf{v}, \mathbf{k}})\,dS, \qquad (51.7)$$

где $(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{k}})$ *и* $(\widehat{-\mathbf{v}, \mathbf{k}})$ — *углы между векторами* $\mathbf{v}$, $\mathbf{k}$ *и, соответственно, между* $-\mathbf{v}$, $\mathbf{k}$.

За основу этого определения взято интуитивное соображение о том, что элемент площади dS данной поверхности (см. (50.24)), помноженный на косинус угла, который он «составляет» с плоскостью xOy, приближенно равен элементу площади $dx\,dy$ этой плоскости (рис. 209), как было бы, если бы речь шла о площадях плоской фигуры и ее проекции.

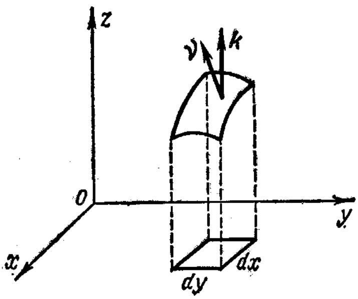

Рис. 209

Интегралы (51.6) будем обозначать общим символом

$$\iint\limits_{S} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy. \qquad (51.8)$$

Так как $(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{k}}) + (\widehat{-\mathbf{v}, \mathbf{k}}) = \pi$ и, следовательно, $\cos(\widehat{-\mathbf{v}, \mathbf{k}}) = -\cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{k}})$, то из (51.7) получим

$$\iint\limits_{S^-} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = -\iint\limits_{S^+} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy. \qquad (51.9)$$

Аналогично поверхностным интегралам первого рода, поверхностные интегралы второго рода заведомо существуют, если функция Φ непрерывна на поверхности S. Поскольку поверхностные интегралы первого рода не зависят от выбора представления поверхности, то поверхностные интегралы второго рода (51.6) не зависят от выбора представления ориентированной поверхности (иначе говоря, не зависят от выбора представления поверхности, сохраняющего ее заданную ориентацию), но, конечно (51.8), при данной поверхности S и данной функции Φ зависят, вообще говоря, от выбора непрерывной нормали $\mathbf{v}$ на поверхности, т. е. от выбора ориентации поверхности (см. 51.9)).

Выведем формулы, удобные для вычисления поверхностных интегралов второго рода. Предварительно заметим, что из (51.4), (51.5) и (50.22) следует, что

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{k}}) = \mathbf{v}\mathbf{k} = \frac{\mathbf{n}\mathbf{k}}{|\mathbf{n}|} = \frac{(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\mathbf{k}}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

поэтому

$$\iint_S \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = \iint_S \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{k}})\,dS =$$
$$= \iint_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\cos(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{k}})\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv =$$
$$= \iint_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.$$

Таким образом, опуская у функций обозначения аргументов, имеем

$$\iint_{S^+} \Phi\,dx\,dy = \iint_D \Phi\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv \tag{51.10}$$

и, согласно (51.9),

$$\iint_{S^-} \Phi\,dx\,dy = -\iint_D \Phi\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv = \iint_D \Phi\frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)}\,du\,dv. \tag{51.11}$$

Иногда интеграл $\iint_{S^+} \Phi\,dx\,dy$ обозначается через $\iint_S \Phi\,dx\,dy$; в этом случае интеграл $\iint_{S^-} \Phi\,dx\,dy$ записывается в виде $\iint_S \Phi\,dy\,dx$.

Таким образом,

$$\iint_S \Phi\,dx\,dy = \iint_D \Phi\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv,$$
$$\iint_S \Phi\,dy\,dx = \iint_D \Phi\frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.$$

Если поверхность S задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$, то формула (51.2) принимает вид (см. (50.25))

$$\iint_S \Phi(x, y, z)\,dS = \iint_D \Phi(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy,$$

а формулы (51.10) и (51.11) — вид:

$$\iint_{S^+} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = \iint_D \Phi(x, y, f(x, y))\,dx\,dy,$$
$$\iint_{S^-} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = -\iint_D \Phi(x, y, f(x, y))\,dx\,dy.$$

Здесь S^+ называется «верхней стороной поверхности S» (она соответствует положительной ориентации $\mathbf{v}$ поверхности S при заданном ее представлении $z=f(x, y)$, а S^- — «*нижней стороной поверхности* S» (она соответствует отрицательной ориентации $-\mathbf{v}$). Эти названия объясняются тем обстоятельством, что в случае явного задания поверхности

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix}=-f_x\boldsymbol{i}-f_y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{v}=\left(-\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right),$$

поэтому

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{k}})=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}>0.$$

Отсюда видно, что угол между векторами $\mathbf{v}$ и k — острый, т. е. вектор $\mathbf{v}$ направлен «вверх» от рассматриваемой поверхности (см. рис. 209).

Подобно определению (51.7) определяются и другие поверхностные интегралы второго рода:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{S^+} \Phi(x, y, z)\,dy\,dz=\iint\limits_{S} \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{i}})\,dS,\\
&\iint\limits_{S^-} \Phi(x, y, z)\,dy\,dz=\iint\limits_{S} \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{-\mathbf{v}, \boldsymbol{i}})\,dS,\\
&\iint\limits_{S^+} \Phi(x, y, z)\,dz\,dx=\iint\limits_{S} \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{\mathbf{v}, \boldsymbol{j}})\,dS,\\
&\iint\limits_{S^-} \Phi(x, y, z)\,dz\,dx=\iint\limits_{S} \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{-\mathbf{v}, \boldsymbol{j}})\,dS.
\end{aligned} \tag{51.12}$$

Для этих интегралов аналогично проделанному выше получаем

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{S^-} \Phi\,dy\,dz=-\iint\limits_{S^+} \Phi\,dy\,dz,\\
&\iint\limits_{S^-} \Phi\,dz\,dx=-\iint\limits_{S^+} \Phi\,dz\,dx,\\
&\iint\limits_{S^+} \Phi\,dy\,dz=\iint\limits_{D} \Phi\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\,du\,dv,\\
&\iint\limits_{S^+} \Phi\,dz\,dx=\iint\limits_{D} \Phi\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.
\end{aligned} \tag{51.13}$$

Различные задачи, приводящие к понятию поверхностного интеграла второго рода, будут рассмотрены в § 52.

51.2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ КАК ПРЕДЕЛЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ

Поверхностные интегралы могут быть получены также и как пределы соответствующих интегральных сумм. Пусть S — гладкая поверхность и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in \bar{D}$, — ее представление, D — квадрируемая область. Будем для простоты предполагать, что у области D существуют сколь угодно мелкие разбиения, элементы которых — кварируемые области. Только такие разбиения и будут рассматриваться в настоящем пункте. Возьмем какое-либо из указанных разбиений $\tau=\{D_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ области D. Обозначим через S_i, $i=1, \ldots, i_0$, поверхность, задаваемую представлением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in \bar{D}_i$. Очевидно, что все S_i также гладкие поверхности (система $\tau_S=\{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ называется *разбиением поверхности* S). Пусть функция $\Phi(r(u, v))=\Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ непрерывна на $\bar{D}$ и $(u_i, v_i)\in \bar{D}_i$, $\Phi_i=\Phi(r(u_i, v_i))$. Обозначим через $\cos_i(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})$ косинус угла между нормалью $\boldsymbol{\nu}$ и ортом $\boldsymbol{k}$ в точке $r(u_i, v_i)$ данной поверхности и положим

$$\sigma_\tau^{(1)}=\sum_{i=1}^{i_0}\Phi_i\mu S_i,$$

$$\sigma_\tau^{(2)}=\sum_{i=1}^{i_0}\Phi_i\cos_i(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})\,\mu S_i;$$

тогда

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau^{(1)}=\iint_S\Phi(x, y, z)\,dS, \tag{51.14}$$

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau^{(2)}=\iint_S\Phi(x, y, z)\,dx\,dy, \tag{51.15}$$

где, как всегда, δ_τ — мелкость разбиения τ. Действительно,

$$\iint_S\Phi(x, y, z)\,dS=\iint_D\Phi(r(u, v))\sqrt{FG-F^2}\,du\,dv=$$
$$=\sum_{i=1}^{i_0}\iint_{D_i}\Phi(r(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv;$$

поскольку $\mu S_i=\iint_{D_i}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, то

$$\sigma_\tau^{(1)}=\sum_{i=1}^{i_0}\Phi_i\iint_{D_i}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=$$
$$=\sum_{i=1}^{i_0}\iint_{D_i}\Phi(r(u_i, v_i))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Обозначив теперь через $\omega(\delta;\ \Phi)$ модуль непрерывности функции Φ на замкнутой области $\bar{D}$, будем иметь

$$\left|\iint\limits_S \Phi(x,\ y,\ z)\,dS-\sigma_\tau^{(1)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{i_0}\iint\limits_{D_i}|\Phi(r(u,\ v))-\Phi(r(u_i,\ v_i))|\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\leqslant$$
$$\leqslant\omega(\delta_\tau,\ \Phi)\sum_{i=1}^{i_0}\mu S_i=\omega(\delta_\tau;\ \Phi)\,\mu S.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $\delta_\tau\to 0$ и заметив, что $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\omega(\delta_\tau;\ \Phi)=0$, получим формулу (51.14).

Аналогично доказывается формула (5.15) (произведение $\Phi\cos(\widehat{\mathbf{v},\ \boldsymbol{k}})$ непрерывно, а значит, и равномерно непрерывно на $\bar{D}$). Подобные утверждения справедливы и для интегралов второго рода других типов (15.12).

Упражнение 1. Доказать формулу (51.15).

51.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО КУСОЧНО-ГЛАДКИМ ПОВЕРХНОСТЯМ

Определим поверхностные интегралы по кусочно-гладким поверхностям.

Определение 3. *Пусть $S=\{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ кусочно-гладкая поверхность (см. определение 23 в п. 50.9) и $\Phi(x,\ y,\ z)$ — функция, определенная на множестве точек поверхности S. Тогда, по определению,*

$$\iint\limits_S \Phi\,dS=\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{S_i}\Phi\,dS_i. \tag{51.16}$$

Определение 4. *Если кусочно-гладкая поверхность $S=\{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ ориентируема и $S^+=\{S_i^+\}_{i=1}^{i=k}$ — одна из соответствующих ей ориентированных поверхностей (обозначения см. в п. 50.11), то, по определению,*

$$\iint\limits_{S^+}\Phi\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{S_i^+}\Phi\,dx\,dy,\quad \iint\limits_{S^+}\Phi\,dy\,dz=\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{S_i^+}\Phi\,dy\,dz,$$
$$\iint\limits_{S^+}\Phi\,dz\,dx=\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{S_i^+}\Phi\,dz\,dx. \tag{51.17}$$

Конечно, это определение содержательно только в том случае, когда интегралы, стоящие в правых частях равенств, существуют. Для этого, прежде всего, представления поверхностей S_i должны быть заданы на квадрируемых областях.

Аналогично в рассматриваемом случае определяются и интегралы по поверхности $S^- = \{S_i^-\}_{i=1}^{i=k}$.

Мы остановились только на тех свойствах поверхностных интегралов, которые связаны со спецификой их определения, с поверхностью, по которой, как говорят, производится интегрирование. Естественно, что, поскольку они сводятся к обычным кратным интегралам, на них переносятся и различные их свойства (линейность, интегральная теорема о среднем и т. п.).

Замечание. Условия, налагаемые на отображения, осуществляющие допустимые преобразования параметров для гладких поверхностей, сформулированные нами выше (см. определения 10 в п. 50.2 и 16 в п. 50.4), часто оказываются слишком жесткими (ср. с подобным обстоятельством для кривых в п. 47.3). Например, при таком подходе представления части шара единичного радиуса с центром в начале координат, лежащей в первом октанте:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \text{где} \quad x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$

и

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = r\sin\psi,$$

где $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$ не эквивалентны. Более того, первое представление не определяет в указанном смысле непрерывно дифференцируемую поверхность, поскольку частные производные функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ не ограничены в области $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$ и не могут быть непрерывно продолжены на ее замыкание $\bar{D}$. Поэтому естественно расширить определение непрерывно дифференцируемой поверхности. Сделаем это следующим образом.

Рассмотрим совокупность представлений $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, непрерывных на $\bar{D}$ и непрерывно дифференцируемых на D. Допустимыми преобразованиями параметров $u = \varphi(u_1, v_1)$, $v = \psi(u_1, v_1)$ $(u_1, v_1) \in \bar{D}_1$, будем называть всякое взаимно однозначное непрерывное отображение замыкания $\bar{D}_1$ плоской области D_1 на $\bar{D}$, переводящее внутренние точки во внутренние, граничные в граничные, непрерывно дифференцируемое и имеющее не равный нулю якобиан в D. Как всегда, два представления называются эквивалентными, если можно перейти от одного к другому с помощью допустимого преобразования параметров.

Мы скажем, что класс эквивалентных представлений указанного типа задает непрерывно дифференцируемую поверхность, если в этом классе существует по крайней мере одно представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, непрерывно дифференцируемое вплоть до границы области D.

Непрерывно дифференцируемая поверхность называется гладкой, если $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ в $\bar{D}$ при некотором ее представлении $\boldsymbol{r} =$

$=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$. Площадь непрерывно дифференцируемой поверхности с представлением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$, определяется как значение интеграла

$$\iint_D |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\, du\, dv,$$

который, быть может, является и несобственным. Чтобы убедиться в его существовании, достаточно выполнить замену переменного с помощью допустимого преобразования, переводящего данное представление в представление, непрерывно дифференцируемое вплоть до границы области.

Аналогичным образом ослабляются требования, налагаемые на допустимые преобразования параметра и в случае ориентированных поверхностей.

При таких определениях остаются в силе все данные выше определения поверхностных интегралов и их свойства, естественно с учетом того, что в этом случае при некоторых представлениях поверхностей мы можем получить несобственные интегралы. Остаются справедливыми и все относящиеся к поверхностным интегралам теоремы, доказываемые в следующем параграфе; мы не будем однако специально останавливаться на этом.

Упражнения. 2. Пусть S — гладкая поверхность в новом расширенном смысле и Φ — функция, непрерывная на S. Доказать, что существуют интегралы

$$\int_S \Phi(x, y, z)\, dx\, dy, \quad \int_S \Phi(x, y, z)\, dz\, dx, \quad \int_S \Phi(x, y, z)\, dy\, dz.$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы первого рода:

3. $\iint_S x^2y^2\, dS$; $S=\{(x, y, z):\ x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geqslant 0\}$.

4. $\iint_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$; $S=\{(x, y, z):\ x^2+y^2=R^2,\ 0\leqslant z\leqslant H\}$.

5. $\iint_S \frac{dS}{r}$; S — часть поверхности параболоида $z=xy$, отсекаемая цилиндром $x^2+y^2=R^2$, а r — расстояние текущей точки поверхности S от оси Oz.

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго рода:

6. $\iint_S z\, dx\, dy$, где S — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

7. $\iint_S yz\, dx\, dy+zx\, dy\, dz+xy\, dz\, dx$, где S — внешняя сторона поверхности, состоящей из части боковой поверхности цилиндра $x^2+y^2=R^2$ и частей плоскостей

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=H,\quad \text{причем}\quad x,\ y,\ z\geqslant 0.$$