# § 52. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

## 52.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вместо терминов «числовая функция точки», «вектор-функция точки» употребляются и равнозначные им: *скалярное поле, векторное* поле. Эта терминология подчеркивает, что значения рассматриваемых функций зависят именно от точек пространства (в которых эти функции определены), а не от их координат, при выборе той или иной системы координат.

Употребляя эту терминологию, можно сказать, например, что всякое скалярное поле $u = u(M)$, определенное и дифференцируемое в некоторой области $G$, порождает векторное поле его градиентов (см. п. 20.6 и п. 50.5, стр. 245): $\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{grad} u$.

**Определение 1.** *Пусть в области* $G$ *) *задано векторное поле* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ *и существует определенная в* $G$ *функция* $u = u(M)$, *такая, что* $\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$. *Тогда функция* $u(M)$ *называется потенциальной функцией, или потенциалом данного векторного поля* **).

Вводя символ набла, $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ (см. п. 20.7), можно написать:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u,$$

где справа стоит «произведение» символического вектора набла на числовую функцию $u$.

Пусть, например, $\boldsymbol{E}(M)$ — напряженность электрического поля, созданного единичным отрицательным зарядом, помещенным в начале координат. Тогда в точке $M(y, x, z)$ вектор $\boldsymbol{E}(M)$ имеет, как это известно из физики, длину $1/r^2$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, и направлен от точки $M$ к началу координат. Отсюда получается, что

$$\boldsymbol{E}(M) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right).$$

Электрический потенциал рассматриваемого поля, т. е. функция $u(M) = 1/r$, является и потенциалом в указанном выше смысле, ибо $\operatorname{grad} u(M) = \boldsymbol{E}(M)$.

Рассмотрим снова векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$, определенное в некоторой области $G$. Зафиксируем систему координат, тогда вектор-функцию $\boldsymbol{a}(M)$ можно рассматривать как функцию трех переменных — координат $x, y, z$ точки $M$: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z)$.

---

*) В этом параграфе для простоты рассматриваются только плоские или трехмерные области $G$.

**) Иногда в приложениях потенциал $u$ определяется формулой $\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad} u$.

Пусть $M_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)\in G$ и задан единичный вектор $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$. Проведем через точку $M_0$ прямую в направлении $\boldsymbol{e}$:

$$x=x_0+t\cos\alpha,\quad y=y_0+t\cos\beta,\quad z=z_0+t\cos\gamma,$$
$$-\infty<t<+\infty.$$

**Определение 2.** *Производная вектор-функции*

$$\boldsymbol{a}(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)$$

*по $t$ при $t=0$ (если она существует) называется производной вектор-функции $\boldsymbol{a}(M)$ по направлению $\boldsymbol{e}$ в точке $M_0$ и обозначается через $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}}$:*

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}(M_0)}{\partial \boldsymbol{e}}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)\big|_{t=0}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции, опуская для простоты обозначения аргумента, получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}}=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}\cos\gamma. \tag{52.1}$$

Полагая $\boldsymbol{e}\nabla=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$ («скалярное произведение» вектора $\boldsymbol{e}$ и символического вектора $\nabla$), перепишем формулу (52.1) в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}}=(\boldsymbol{e}\nabla)\,\boldsymbol{a}.$$

**Определение 3.** *Если $\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$ — произвольный (не обязательно единичный) фиксированный вектор, то вектор*

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\,\boldsymbol{a}=b_x\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}+b_y\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}+b_z\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}$$

*называется градиентом вектора $\boldsymbol{a}$ по вектору $\boldsymbol{b}$.*

Если $\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{b}_0$, где $|\boldsymbol{b}_0|=1$, то «формальными преобразованиями» получим

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\,\boldsymbol{a}=(b\boldsymbol{b}_0\nabla)\,\boldsymbol{a}=b\,(\boldsymbol{b}_0\nabla)\,\boldsymbol{a}=b\,\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{b}_0}.$$

Переходя к координатной записи, легко непосредственно убедиться в справедливости полученной формулы и показать, что с символом $\nabla$ можно обращаться при вычислениях, как с настоящим вектором, не забывая, конечно, при этом, что, кроме этого, $\nabla$ означает также и определенную операцию дифференцирования. Мы не будем здесь останавливаться на обосновании законности таких «формальных преобразований с символом $\nabla$». Любая формула, полученная подобным образом, может быть, конечно, получена и без применения символа $\nabla$ обычными обоснованными рассуждениями в координатах. Следует иметь в виду, однако, что применение символа $\nabla$ часто весьма существенно сокращает выкладки.

Вернемся снова к исходному векторному полю $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$ в области $G$.

**Определение 4.** *Пусть поле* $\boldsymbol{a}(a_x, a_y, a_z)$ *дифференцируемо в некоторой точке. Число* $\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$ *называется дивергенцией поля в этой точке и обозначается через* $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, *т. е.*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{52.2}$$

Символически $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ может быть записана как скалярное произведение символа $\nabla$ и вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\nabla\boldsymbol{a}$$

**Определение 5.** *Вектор с координатами*

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\quad \frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},\quad \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y} \tag{52.3}$$

*называется вихрем, или ротором, векторного поля* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$ *и обозначается* $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

С помощью символа $\nabla$ ротор можно записать в виде следующего векторного произведения:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \tag{52.4}$$

Геометрический и физический смысл $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ будет выяснен в дальнейшем.

Приведем пример формальных преобразований с символом $\nabla$. Если за символом $\nabla$ следует несколько членов, на один из которых он действует как оператор дифференцирования, а на другие нет, то для ясности будем обозначать этот член вертикальной стрелкой. Поясним это на примере.

Пусть $f$ — скалярное, $\boldsymbol{a}$ — векторное поле, тогда

$$\operatorname{rot} f\boldsymbol{a}=\nabla\times f\boldsymbol{a}=\nabla\times f\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}+\nabla\times\overset{\downarrow}{f}\boldsymbol{a}=$$
$$=f(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\nabla f\times\boldsymbol{a})=f\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}f\times\boldsymbol{a}).$$

Введем еще некоторые определения, связанные с векторным полем $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$ в области $G$.

**Определение 6.** *Пусть* $\gamma$ — *замкнутая кусочно-гладкая кривая в области* $G$. *Интеграл*

$$\int\limits_\gamma a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz.$$

*называется циркуляцией векторного поля* $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$ *по кривой* $\gamma$ *и обозначается* $\int\limits_\gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$, где $d\boldsymbol{r}=(dx,\ dy,\ dz)$.

Если $\gamma$ — ориентированная гладкая кривая, $\boldsymbol{t}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ — ее единичный касательный вектор, $s$ — переменная длина дуги, а $\text{пр}_t\,\boldsymbol{a}$ — величина проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на касательную, то

$$\int\limits_\gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int\limits_\gamma \text{пр}_t\,\boldsymbol{a}\,ds.$$

Действительно,

$$\int\limits_\gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int\limits_\gamma a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz=$$
$$=\int\limits_\gamma (a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\,ds=\int\limits_\gamma \boldsymbol{a}\boldsymbol{t}\,ds=\int\limits_\gamma \text{пр}_t\,\boldsymbol{a}\,ds.$$

**Определение 7.** *Поле, циркуляция которого по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, лежащей в области* $G$, *равна нулю, называется потенциальным.*

Напомним, что в п. 47.8 было показано (см. лемму 2), что условие равенства нулю интеграла $\int\limits_\gamma P\,dx+Q\,dy$ по любому замкнутому контуру $\gamma\subset G$ равносильно тому, что $\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования между точками $A$ и $B$. При доказательстве этого утверждения нигде не использовалось, что кривая $\gamma$ лежит в плоской области. Поэтому доказательство леммы 2, приведенное в п. 47.8, сохраняет свою силу и для криволинейных интегралов по пространственным кривым. Таким образом циркуляция $\int\limits_\gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int\limits_\gamma a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz$ *равна нулю по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру* $\gamma\subset G$ *тогда и только тогда, когда интеграл* $\int\limits_{AB} a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz$ *не зависит от пути интегрирования*, т. е. от кривой с началом в точке $A$, концом в точке $B$ и целиком лежащей в области $G$.

Рассмотрим в качестве примера плоское векторное поле, т. е. поле $\boldsymbol{a}=(P,\ Q)$, заданное на плоской области $G: P=P(x,\ y)$, $Q=Q(x,\ y)$. Вихрь этого поля имеет вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Теорема 4 п. 47.8 во вновь введенных терминах может быть перефразирована следующим образом. *Для односвязной плоской области* $G$ *потенциальность поля, существование потенциальной* *функции и условие, что вихрь поля во всех точках равен нулю, эквивалентны.*

**Определение 8.** *Пусть $S$ — некоторая ориентированная поверхность, лежащая в области $G$, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали к поверхности, задающей ее ориентацию, и $S^+$ — поверхность $S$ с указанной ориентацией. Интеграл*

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, dS$$

*называется потоком векторного поля через поверхность $S$ и обозначается*

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S},$$

*где*

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\nu}\, dS \quad \left(\text{или} \iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^+,\ d\boldsymbol{S}^+ = \boldsymbol{\nu}\, d\boldsymbol{S}\right).$$

Очевидно, что $\boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu} = \text{пр}_{\boldsymbol{\nu}}\, \boldsymbol{a}$, поэтому $\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S} \text{пр}_{\boldsymbol{\nu}}\, \boldsymbol{a}\, dS$.

Обычно в потоке $\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, dS$ опускают индекс ориентации и пишут просто $\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, dS$, считая, что в качестве ориентации взята нормаль $\boldsymbol{\nu}$, стоящая в подынтегральном выражении.

В дальнейших пунктах этого параграфа мы изучим некоторые свойства векторных полей, в частности, установим в трехмерном случае необходимые и достаточные условия потенциальности поля. Предварительно мы докажем теоремы об интегралах, тесно связанные с понятиями, введенными в этом пункте.

Упражнения. 1. Доказать следующие формулы:

а) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$;

б) $\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u$,
где $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

г) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}$,
где $\Delta\boldsymbol{a} = (\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z)$, $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$;

д) $\operatorname{div}(f\boldsymbol{a}) = f\operatorname{div}\boldsymbol{a} + \operatorname{grad} f\boldsymbol{a}$;

е) $\operatorname{div}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$.

2. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = (x-2z)\boldsymbol{i} + (x+3y+z)\boldsymbol{i} + (5x+y)\boldsymbol{k}$ через треугольную площадку с вершинами $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ и ориентацией, определяемой нормалью, направленной противоположно началу координат.

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$ через поверхность $S: \{(x, y, z): z = x^2+y^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$, единичная нормаль к которой направлена в сторону, противоположную оси $Oz$.

4. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i} + \sqrt{x^2+y^2-1}\,\boldsymbol{k}$ через противоположную началу координат сторону гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{3}$.

5. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}=(xy-y^2)\,\boldsymbol{i}+(-x^2+xy+2x)\,\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ через противоположную началу координат сторону части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=1$, отсекаемой конусом $z^2=\frac{1}{2}x^2+y^2$.

6. Найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, если

$$\boldsymbol{a}=(6x^2y^2-z^3+yz-5)\,\boldsymbol{i}+(4x^3y+xz+2)\,\boldsymbol{j}+(xy-3xz^2-3)\,\boldsymbol{k}.$$

Пусть $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$, $f$ — дифференцируемая всюду в $R_+$ числовая функция, $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор. Найти:

7. $\operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{r})$.
8. $\operatorname{div}(\boldsymbol{rc})$.
9. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$.
10. $\operatorname{div}(r^2\boldsymbol{c})$.
11. $\operatorname{div}(f(r)\,\boldsymbol{c})$.
12. $\operatorname{div}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})$.

13. Найти $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$, если

$$\boldsymbol{a}=xyz\boldsymbol{i}+(2x+3y-z)\boldsymbol{j}+(x^2+z^2)\boldsymbol{k}.$$

Найти:

14. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})$
15. $\operatorname{rot}((\boldsymbol{cr})\,\boldsymbol{r})$
16. $\operatorname{rot}(f(r)\,\boldsymbol{r})$.
17. $\operatorname{rot}(f(r)\,\boldsymbol{c})$.

18. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ ($c=\text{const}$) по окружности $(x-2)^2+y^2=1$, лежащей в плоскости $Oxy$.

19. Найти циркуляцию векторного поля $a=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$ по замкнутой линии, образуемой дугой астроиды $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$ и отсекаемыми ею отрезками осей координат.

## 52.2. ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ПОНЯТИЙ ГРАДИЕНТА, ДИВЕРГЕНЦИИ И ВИХРЯ

Прежде всего заметим, что при ортогональном преобразовании декартовых координат символический вектор $\nabla$ преобразуется по правилам преобразования обычных векторов. Действительно, пусть задано ортогональное преобразование координат

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z,\\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\\ z' &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z. \end{aligned} \tag{52.5}$$

Для таких преобразований матрица обратного преобразования совпадает с транспонированной матрицей, поэтому

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x'+a_{21}y'+a_{31}z',\\ y &= a_{12}x'+a_{22}y'+a_{32}z',\\ z &= a_{13}x'+a_{23}y'+a_{33}z'. \end{aligned} \tag{52.6}$$

При этом, как хорошо известно, по формулам (52.5) и (52.6) преобразуются как координаты точек, так и координаты векторов.

Используя формулы (52.5) и правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} = a_{11}\frac{\partial}{\partial x'} + a_{21}\frac{\partial}{\partial y'} + a_{31}\frac{\partial}{\partial z'},\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} = a_{12}\frac{\partial}{\partial x'} + a_{22}\frac{\partial}{\partial y'} + a_{32}\frac{\partial}{\partial z'},\\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} = a_{13}\frac{\partial}{\partial x'} + a_{23}\frac{\partial}{\partial y'} + a_{33}\frac{\partial}{\partial z'}.
\end{aligned} \tag{52.7}$$

Соответственно обратные формулы, выражающие производные по переменным $x'$, $y'$, $z'$ через производные по $x$, $y$, $z$ будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'} &= a_{11}\frac{\partial}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial}{\partial z},\\
\frac{\partial}{\partial y'} &= a_{21}\frac{\partial}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial}{\partial y} + a_{23}\frac{\partial}{\partial z},\\
\frac{\partial}{\partial z'} &= a_{31}\frac{\partial}{\partial x} + a_{32}\frac{\partial}{\partial y} + a_{33}\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{52.8}$$

Формулы (52.5) — (52.8) и показывают, что координаты обычных векторов и «координаты» символического вектора $\nabla$ при ортогональных преобразованных декартовых координат преобразуются по одному и тому же правилу. В частности, из (52.8) следует, что градиент функции $u$ в системе координат $x$, $y$, $z$, т. е. вектор с координатами $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ в системе $x'$, $y'$, $z'$ будет иметь координаты $\frac{\partial u}{\partial x'}$, $\frac{\partial u}{\partial y'}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, т. е. являться градиентом и в этой системе координат. Тем самым еще раз доказано (см. п. 20.7), что градиент функции не зависит от выбора декартовой системы координат. Поскольку вектор $\nabla$ преобразуется подобно обычным векторам, то естественно ожидать, что и скалярное произведение $\nabla\boldsymbol{a}$ не зависит от выбора указанной системы координат.

Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ в системе $x$, $y$, $z$ имеет координаты $a_x$, $a_y$, $a_z$, а в системе $x'$, $y'$, $z'$ — координаты $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$. В силу формул (52.7) имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} &= a_{11}\frac{\partial a_x}{\partial x'} + a_{21}\frac{\partial a_x}{\partial y'} + a_{31}\frac{\partial a_x}{\partial z'} +\\
&+ a_{12}\frac{\partial a_y}{\partial x'} + a_{22}\frac{\partial a_y}{\partial y'} + a_{32}\frac{\partial a_y}{\partial z'} + a_{13}\frac{\partial a_z}{\partial x'} + a_{23}\frac{\partial a_z}{\partial y'} + a_{33}\frac{\partial a_z}{\partial z'} =\\
&= \frac{\partial}{\partial x'}(a_{11}a_x + a_{12}a_y + a_{13}a_z) + \frac{\partial}{\partial y'}(a_{21}a_x + a_{22}a_y + a_{23}a_z) +\\
&+ \frac{\partial}{\partial z'}(a_{31}a_x + a_{32}a_y + a_{33}a_z).
\end{aligned} \tag{52.9}$$

Применяя формулы (52.5) к вектору $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, (т. е. заменяя в этих формулах $x$, $y$, $z$ на $a_x$, $a_y$, $a_z$, а $x'$, $y'$, $z'$ на $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$), получим, что выражения в круглых скобках в правой части равенства (52.9) равны последовательно $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$ и, следовательно,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

Это равенство и показывает, что дивергенция векторного поля в каждой точке однозначно определяется самим векторным полем, а не зависит от выбора системы координат, как это могло бы показаться сначала из формулы (52.2).

Векторное произведение обычных векторов в силу своего геометрического смысла не зависит от выбора декартовых систем координат с одинаковой ориентацией (например, векторное произведение двух векторов не изменится, если от одной правой декартовой системы координат (см. п. 50.8) перейти к такой же другой). Поэтому естественно ожидать, что тем же свойством обладает и «символическое векторное произведение» $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}$.

В самом деле, если обозначить единичные координатные векторы системы координат $x'$, $y'$, $z'$ соответственно через $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, то, как известно, единичные координатные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ системы координат $x$, $y$, $z$ выражаются через $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ посредством матрицы, транспонированной к матрице преобразования (52.5), т. е. посредством матрицы преобразования (52.6):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}&=a_{11}\boldsymbol{i}'+a_{21}\boldsymbol{j}'+a_{31}\boldsymbol{k}',\\ \boldsymbol{j}&=a_{12}\boldsymbol{i}'+a_{22}\boldsymbol{j}'+a_{32}\boldsymbol{k}',\\ \boldsymbol{k}&=a_{13}\boldsymbol{i}'+a_{23}\boldsymbol{j}'+a_{33}\boldsymbol{k}'.\end{aligned}\qquad(52.10)$$

Используя формулы (52.6), (52.7) и (52.10), получим:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}\boldsymbol{i}'+a_{21}\boldsymbol{j}'+a_{31}\boldsymbol{k}' & a_{12}\boldsymbol{i}'+a_{22}\boldsymbol{j}'+a_{32}\boldsymbol{k}' & a_{13}\boldsymbol{i}'+a_{23}\boldsymbol{j}'+a_{33}\boldsymbol{k}'\\ a_{11}\frac{\partial}{\partial x'}+a_{21}\frac{\partial}{\partial y'}+a_{31}\frac{\partial}{\partial z'} & a_{12}\frac{\partial}{\partial x'}+a_{22}\frac{\partial}{\partial y'}+a_{32}\frac{\partial}{\partial z'} & a_{13}\frac{\partial}{\partial x'}+a_{23}\frac{\partial}{\partial y'}+a_{33}\frac{\partial}{\partial z'}\\ a_{11}a_{x'}+a_{21}a_{y'}+a_{31}a_{z'} & a_{12}a_{x'}+a_{22}a_{y'}+a_{32}a_{z'} & a_{13}a_{x'}+a_{23}a_{y'}+a_{33}a_{z'}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}'&\boldsymbol{j}'&\boldsymbol{k}'\\ \frac{\partial}{\partial x'}&\frac{\partial}{\partial y'}&\frac{\partial}{\partial z'}\\ a_{x'}&a_{y'}&a_{z'}\end{vmatrix}.\qquad(52.11)$$

Последнее равенство доказывается так же, как для обычных числовых матриц доказывается тот факт, что определитель произведения двух квадратных матриц одного и того же порядка равен произведению их определителей. Для доказательства этого равенства достаточно убедиться, что в обеих его частях стоят одинаковые алгебраические суммы одних и тех же слагаемых.

Определитель ортогонального преобразования равен $+1$ или $-1$, причем если это преобразование сохраняет ориентацию, то $+1$. Поэтому если в рассматриваемом случае выбрать системы координат $x$, $y$, $z$ и $x'$, $y'$, $z'$, ориентированные одинаково, то будем иметь

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$$

и, следовательно, из (52.11) получим

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}' \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ a_{x'} & a_{y'} & a_{z'} \end{vmatrix}.$$

Это равенство и означает, что вихрь векторного поля не зависит от выбора декартовой системы координат, имеющей ту же ориентацию, что и заданная. Заметим, однако, что если от одной системы координат перейти к системе с другой ориентацией, например от правой системы координат — к левой, то каждый вихрь (как и обычное векторное произведение) заменится противоположным вектором. Это следует из формулы (52.11), поскольку определитель ортогонального преобразования, меняющего ориентацию, равен $-1$.

Таким образом, вихрь векторного поля однозначно «с точностью до знака» определяется самим векторным полем, а если ограничиться только одними правыми декартовыми системами координат, то не зависит от их выбора.

## 52.3. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО—ГАУССА. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ

Пусть $G$ — область в пространстве $R^3_{xyz}$. Предположим, что на плоскости $R^2_{xy}$ существует такая квадрируемая область $\Gamma$, что граница области $G$ состоит из двух поверхностей $S_1$ и $S_2$, задаваемых соответственно явными представлениями $z=\varphi(x, y)$ и $z=\psi(x, y)$, где функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывны на замкнутой области $\overline{\Gamma}$, $\varphi(x, y) \leqslant \psi(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Gamma}$, и, быть может, из части $S_0$ цилиндра, основанием которого является граница $\partial\Gamma$ области $\Gamma$ (см. п. 44.1). Предположим также, что $S_0$, $S_1$ и $S_2$ являются кусочно-гладкими поверхностями (рис. 210). В этом случае и вся граница $S$ области $G$ также будет кусочно-гладкой поверхностью и притом ориентируемой, как всякая кусочно-гладкая поверхность, являющаяся границей области. Внешние нормали $\mathbf{v}$ поверхности $S$ на ее гладких частях являются их ориентациями. В силу этих ориентаций гладкие части поверхности $S$ ориентированы согласованно (см. п. 50.11) и, следовательно, порождают ориентацию всей поверхности $S$. Эта ориентация получается, если для каждой гладкой части поверхности выбрать ориентацию ее края, согласованную с внешней нормалью $\mathbf{v}$ на этой части по правилу штопора.

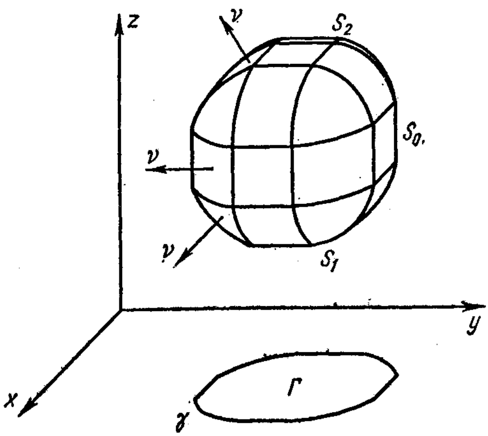



Рис. 210

Обозначим поверхность $S$, соответственно поверхности $S_0$, $S_1$ и $S_2$ с выбранной ориентацией (которую будем называть положительной) через $S^+$, соответственно через $S_0^+$, $S_1^+$ и $S_2^+$. Отметим, что здесь для поверхности $S_1$ положительной ориентацией является ее «нижняя сторона», а для поверхности $S_2$ — ее «верхняя сторона» (см. 51.1).

В рассматриваемом случае выбор нормали $\mathbf{v}$ легко описывается и непосредственно, т. е. без привлечения понятия «внешней» нормали: в точках поверхности $S_1$, в которых нормаль существует, надо выбрать нормаль, образующую тупой угол с осью $Oz$, а в точках поверхности $S_2$ — острый. В точках же поверхности $S_0$ выбор нормали для наших целей, как это будет видно из дальнейшего, безразличен — мы будем брать по поверхности $S$ интегралы вида (51.7), которые по поверхности $S_0$ равны нулю при любом выборе нормалей, так как эти нормали всегда перпендикулярны оси $Oz$.

Будем предполагать, что область $G$ обладает свойствами, аналогичными перечисленным, относительно всех осей координат. Такие области будем называть *элементарными областями* (ср. п. 47.5). Пример элементарной области изображен на рис. 210).

Через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — обозначим направляющие косинусы единичной внешней нормали $\mathbf{v}$ поверхности $S$:

$$\mathbf{v} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

**Теорема 1** (**Остроградский — Гаусс***)). *Пусть в замыкании* $\bar{G}$ *области* $G$ *указанного выше вида заданы функции* $P=P(x,\ y,\ z)$, $Q=Q(x,\ y,\ z)$ и $R=R(x,\ y,\ z)$ *непрерывные на* $\bar{G}$, *вместе со своими частными производными* $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ **). *Тогда*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S^+}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS. \tag{52.12}$$

*Эту формулу, полагая* $\boldsymbol{a}=(P,\ Q,\ R)$, *можно переписать в виде*

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_S \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{dS}^+, \tag{52.13}$$

*т. е. интеграл по области от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую данную область.*

Доказательство. Рассмотрим, например, интеграл

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Использовав обозначения, введенные в начале этого пункта, получим

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_\Gamma\left[\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right]dx\,dy=$$
$$=\iint\limits_\Gamma\{R[x,\ y,\ \psi(x,\ y)]-R[x,\ y,\ \varphi(x,\ y)]\}\,dx\,dy=$$
$$=\iint\limits_{S_2^+}R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy+\iint\limits_{S_1^+}R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy. \tag{52.14}$$

Заметив, далее, что на поверхности $S_0$ имеет место равенство $\cos\gamma=0$, будем иметь (см. (51.7))

$$\iint\limits_{S_0^+}R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy=\iint\limits_{S_0^+}P(x,\ y,\ z)\cos\gamma\,dS=0.$$

Поэтому формулу (52.14) можно переписать в виде

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=$$
$$=\iint\limits_{S_2^+}R\,dx\,dy+\iint\limits_{S_1^+}R\,dx\,dy+\iint\limits_{S_0^+}R\,dx\,dy=\iint\limits_{S^+}R\,dx\,dy. \tag{52.15}$$

---

*) М. В. Остроградский (1801 — 1861) — русский математик; К. Ф. Гаусс (1777 — 1855) — немецкий математик.

**) Непрерывность частных производных на границе понимается как их непрерывная продолжаемость на границу области.

Совершенно аналогично доказываются формулы

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz, \qquad \iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} Q\,dz\,dx, \tag{52.16}$$

Складывая (52.15) и (52.16) в силу определений (51.7) и (51.12) мы и получим формулу (52.12), называемую *формулой Остроградского — Гаусса.* □

Иногда формулу (52.12) бывает удобно использовать в виде

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Справедливость такой записи непосредственно вытекает из определения поверхностного интеграла второго рода: см. (51.7) и (51.12).

Формула Остроградского — Гаусса (52.12) может быть доказана и в случае областей $G$ более общего вида, чем было указано, а именно для таких, для которых существует конечное разбиение на области $G_i$, $i=1, 2, \ldots, i_0$, рассмотренного выше вида. Для этого достаточно написать формулу Остроградского для каждой области $G_i$ и полученные результаты сложить; в результате получается искомая формула для области $G$. Действительно, в левой части равенства в силу аддитивности интеграла получится соответствующий интеграл по области $G$, а в правой части в силу того, что внешние нормали в точках границ областей $G_i$, принадлежащих границам двух таких областей, направлены в разные стороны, поверхностные интегралы по соответствующим частям границ областей $G_i$, в сумме дадут ноль, и останутся только интегралы по частям границ $G_i$, составляющим в совокупности границу области $G$ (ср. п. 47.5). Указанные разбиения области $G$ часто бывает удобно производить плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Заметим, что среди областей такого типа есть и области, граница которых состоит из нескольких «кусков», т. е. может быть представлена как сумма конечного числа кусочно-гладких непересекающихся поверхностей (ср. с соответствующими обобщениями формулы Грина в п. 47.5).

Можно показать, что формула Остроградского — Гаусса справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Однако это довольно громоздко, и мы не будем на этом останавливаться, а ограничимся лишь формулировкой теоремы.

**Теорема 1′ (Остроградский — Гаусс).** *Пусть граница $\partial G$ ограниченной области $G$ состоит из конечного числа кусочно-гладких* *поверхностей, а вектор* $\boldsymbol{a}=(P, Q, R)$ *и частные производные* $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial R}{\partial z}$ *непрерывны на* $\bar{G}$, *тогда*

$$\iiint_G \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial G} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}.$$

В качестве ориентации на гладких частях границы $\partial G$ здесь выбрана внешняя нормаль.

Например, если $G=\{(x, y, z): 0<a<\sqrt{x^2+y^2+z^2}<b\}$ — шаровое кольцо и, следовательно, его граница состоит из двух сфер

$$S_1=\{(x, y, z):\ x^2+y^2+z^2=a^2\} \text{ и } S_2=\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2=b^2\},$$

то на внутренней сфере $S_1$ надо взять нормаль, направленную к центру шара $G$, и на внешней сфере $S_2$ — от центра шара.

Формула Остроградского — Гаусса позволяет найти выражение для объема области через соответствующий поверхностный интеграл. В самом деле, полагая в (52.12) $P(x, y, z)=x$, $Q(x, y, z)=y$, $R(x, y, z)=z$ и заметив, что $\iiint_G dx\, dy\, dz=\mu G$, получим

$$\mu G=\frac{1}{3}\iint_{S^+}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\, dS,$$

или

$$\mu G=\frac{1}{3}\iint_{S^+} x\, dy\, dz+y\, dz\, dx+z\, dx\, dy.$$

Формула Остроградского — Гаусса дает также возможность установить геометрический подход к понятию дивергенции.

**Теорема 2.** *Пусть в трехмерной области* $G$*) *определено непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$. *Пусть* $M_0 \in G$ *и* $D$ — *область с кусочно-гладкой границей* $S$ *такая, что* $M_0 \in D$, $\bar{D} \subset G$ *и для области* $D$ *справедлива формула Остроградского — Гаусса* **).

*Обозначим через* $S^+$ *поверхность* $S$, *ориентированную с помощью выбора внешней нормали, а через* $d(D)$ — *диаметр области* $D$. *Тогда*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0)=\lim_{d(D)\to 0}\frac{\iint_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^+}{\mu D}. \tag{52.17}$$

Доказательство. По формуле (52.13) имеем

$$\iiint_D \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz=\iint_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^+. \tag{52.18}$$

*) Здесь на структуру области $G$ не накладывается никаких ограничений.

**) Такие области $D$ всегда существуют, например к ним относятся все шары достаточно малого радиуса с центром в точке $M_0$ или кубы достаточно малого размера с центром в точке $M_0$.

Но по интегральной теореме о среднем (п. 44.6),

$$\iiint\limits_D \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz = \operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)\, \mu D, \quad M \in D. \tag{52.19}$$

Подставив (59.19) в (52.18), получим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \frac{\iint\limits_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^+}{\mu D}. \tag{52.20}$$

Переходя к пределу в формуле (52.20) при $d(D) \to 0$, в силу непрерывности в точке $M_0$ функции $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$ получим формулу (52.17).

Можно показать, что величины, входящие в правую часть равенства (52.17), не зависят от выбора системы координат (в правую часть входит двойной интеграл от скалярного произведения векторов и объем области), поэтому отсюда еще раз следует, что дивергенция векторного поля не зависит от выбора системы координат.

Из равенства (52.17) следует, что правая часть этого равенства может быть принята за определение дивергенции данного поля.

Точки векторного поля $\boldsymbol{a}$, в которых $\operatorname{div} \boldsymbol{a} \neq 0$, называются «источниками» векторного поля. Интуитивно естественность этого термина объясняется тем обстоятельством, что если точка является «источником», то, как видно из формулы (52.17), для всех достаточно малых по диаметру областей $D$, содержащих точку $M_0$, будем иметь $\iint\limits_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} \neq 0$, т. е. поток через любую достаточно малую поверхность, окружающую источник, не равен нулю.

### 52.4. ФОРМУЛА СТОКСА. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИХРЯ

Пусть $S$ — дважды непрерывно дифференцируемая поверхность без особых точек в пространстве $R^3_{xyz}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, — ее представление, $D$ — плоская ограниченная область, для которой справедлива формула Грина. Допустим, что граница области $D$ состоит из одного простого кусочно-гладкого контура. Обозначим через $\gamma_0$ положительно ориентированный контур, ограничивающий область $D$, и через $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — его представление. Пусть

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$$

— ориентация на поверхности $S$ (см. определение 20 в п. 50.8), $\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. При сделанных предположениях нормаль $\boldsymbol{\nu}$ непрерывна на $\bar{D}$.

Обозначим через $S^+$ поверхность $S$ с выбранной на ней нормалью $\boldsymbol{\nu}$. Пусть $\gamma$ — контур с представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$,

$a \leqslant t \leqslant b$. Будем говорить, что *контур $\gamma$ ограничивает поверхность $S$, а также что поверхность $S$ натянута на контур $\gamma$.*

Пусть, наконец, $G$ — область в пространстве $R^3_{xyz}$ и $S \subset G$. При выполнении этих предположений справедлива следующая теорема.

**Теорема 3 (Стокс*)).** *Пусть функции $P$, $Q$ и $R$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными в области $G$ и пусть $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$. Тогда*

$$\int_\gamma \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}^+, \tag{52.21}$$

*т. е. циркуляция векторного поля по контуру $\gamma$ равна потоку вихря этого поля через поверхность $S$, ограниченную контуром $\gamma$. В координатной форме эта формула имеет вид*

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

*или*

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS. \tag{52.22}$$

Доказательство. Рассмотрим, например, интеграл $\int_\gamma P\,dx$. Заметив, что вдоль кривых $\gamma_0$ и $\gamma$ переменные $u$ и $v$ являются функциями от $t$, и употребив обозначения, введенные в начале этого пункта, получим

$$\int_\gamma P(x, y, z)\,dx =$$

$$= \int_a^b P[x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))]\, x'_t(u(t), v(t))\,dt =$$

$$= \int_{\gamma_0} P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\left[\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial x(u, u)}{\partial v} dv\right].$$

Мы здесь воспользовались формулой

$$x'_t(u(t), v(t)) = \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

---

*) Дж. Стокс (1819—1903) — английский механик и математик.

Применим формулу Грина к получившемуся интегралу $\int\limits_{\gamma_0} P\frac{\partial x}{\partial u}du+P\frac{\partial x}{\partial v}dv$, будем иметь:

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx=\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+P\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}-P\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}\right]du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,\,x)}{\partial(u,\,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\right]du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{S^+}\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\iint\limits_{S^+}\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS. \tag{52.23}$$

Здесь приняты во внимание формулы (51.10) и (51.13). Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{\gamma} Q\,dy=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS, \tag{52.24}$$

$$\int\limits_{\gamma} R\,dz=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS. \tag{52.25}$$

Складывая формулы (52.23), (52.24) и (52.25), мы и получим формулу (52.22), которая называется *формулой Стокса*. □

Чтобы нагляднее представить себе связь выбора нормали $\boldsymbol{\nu}$ на поверхности $S$ с ориентацией ограничивающего ее контура $\gamma$, рассмотрим поверхность $S$, имеющую явное представление $z=f(x,\,y)$, $(x,\,y)\in\overline{\Gamma}$.

Пусть $\gamma_0$ — положительно ориентированный на плоскости $xOy$ контур, являющийся границей $\Gamma$, и $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, — его представление. Как и выше, ориентацию кривой $\gamma$ зададим представлением

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=f[x(t),\,y(t)],\quad a\leqslant t\leqslant b. \tag{52.26}$$

В рассматриваемом случае контур $\gamma_0$ является проекцией кривой $\gamma$. Нормаль же $\boldsymbol{\nu}$, как это было показано, при явном представлении поверхности образует острый угол с осью $Oz$ (см. п. 51.1), поэтому если смотреть на поверхность $S$ с положительного направления оси $Oz$, то контур $\gamma$ будет ориентирован против часовой стрелки, т. е. ориентация кривой $\gamma$ согласована с нормалью $\boldsymbol{\nu}$ «по правилу штопора» (рис. 211). Это равносильно тому, что наблюдатель, обходящий поверхность $S$ по ориентированному контуру $\gamma$ и смотрящий на нее из конца нормали $\nu$, видит поверхность $S$ слева. Такая наглядная интерпретация согласованности ориентации нормали $\nu$ и контура $\gamma$ имеет то преимущество, что она не связана с выбором системы координат и остается справедливой для любой поверхности $S$, рассматриваемой в теореме Стокса, а не только для явно заданной поверхности. Конечно, все подобные рассуждения не являются математическими доказательствами, а служат лишь для наглядного пояснения формулы Стокса.

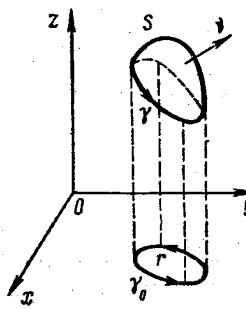


Рис. 211

Следует заметить, что формула Стокса остается справедливой, если в ней взять противоположную ориентацию контура и противоположные нормали $-\nu$; в этом случае обе части равенства (52.21) изменят знак на противоположный (при этом ориентации контура и поверхности остаются согласованными по «правилу штопора»).

Формула Стокса может быть доказана и для ориентируемых кусочно-гладких поверхностей $S=\{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$, а именно таких, для которых поверхности $S_i$, $i=1, 2, \ldots, i_0$, удовлетворяют условиям доказанной теоремы 3. При этом край поверхности $\partial S$ (см. п. 50.11) может состоять из конечного числа замкнутых контуров $\gamma_j$, $j=1, 2, \ldots, j_0$.

Для доказательства этого достаточно написать формулы Стокса для каждой поверхности $S_i$, $i=1, 2, \ldots, i_0$, и сложить их (ср. с обобщениями формулы Грина в п. 47.5 и теоремы Остроградского — Гаусса в п. 52.3).

Отметим также, что в теореме 3 условие дважды непрерывной дифференцируемости поверхности $S$ было наложено только для простоты доказательства (оно в этом случае существенно упрощается). Формула Стокса (52.21) справедлива и при предположении лишь гладкости поверхности $S$ (при сохранении прочих условий теоремы 3). Доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

Из всего сказанного следует, что формула Стокса остается справедливой и для просто ориентированных кусочно-гладких поверхностей $S=\{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ (т. е. без предположения о дважды непрерывной дифференцируемости поверхностей $S_i$).

Сформулируем теорему для этого случая.

**Теорема 3′ (Стокс).** *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{a}$ *непрерывно дифференцируема в области* $G$ *и пусть* $S=\{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — *ориентированная кусочно-гладкая поверхность и* $\partial S$ — *ее край с ориентацией, порожденной заданной ориентацией поверхности* $S$ (см. п. 50.11). *Тогда*

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}.$$

Наглядно согласование ориентаций контуров $\gamma_j$, из которых состоит край $\partial S$ поверхности $S$, с ориентацией этой поверхности и, следовательно, с ориентацией $\mathbf{v}$ поверхностей $S_i$ означает, что наблюдатель, двигающийся по контуру $\gamma_j$, $j=1, 2, \ldots, j_0$, и смотрящий на поверхность $S$ из конца нормали $\mathbf{v}$, видит поверхность $S$ слева.

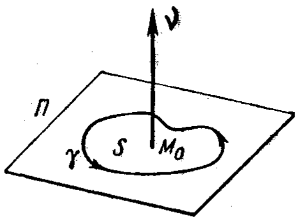


Рис. 212

Теорема Стокса дает возможность установить геометрический подход к понятию вихря векторного поля.

**Теорема 4.** *Пусть в трехмерной области $G$ определено непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$; $M_0$ — фиксированная точка, $M_0 \in G$, $\mathbf{v}$ — произвольный постоянный единичный вектор, $\Pi$ — плоскость, перпендикулярная вектору $\mathbf{v}$ и проходящая через точку $M_0$, $S$ — ограниченная область в плоскости $\Pi$, границей которой является кусочно-гладкий контур $\gamma$, $d(S)$ — диаметр области $S$; пусть контур $\gamma$ согласованно ориентирован с нормалью $\mathbf{v}$* *), $M_0 \in S$ *и* $S \subset G$ **) *(рис. 212). Тогда* ***)

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{d(S)\to 0} \left( \frac{\int_\gamma \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}}{\mu S} \right). \tag{52.27}$$

Доказательство. По формуле Стокса

$$\int_\gamma \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}\, dS,$$

но по интегральной теореме о среднем

$$\iint_S \operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}\, dS = \operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M)\, \mu S, \quad M \in S.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M) = \frac{\int_\gamma \boldsymbol{a}\, dS}{\mu S}. \tag{52.28}$$

Заметим, что при $d(S) \to 0$ и $M \to M_0$. В силу непрерывности в точке $M_0$ функции $\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}(M)$, переходя к пределу в (52.28) при $d(S) \to 0$, получим формулу (52.27). $\square$

Из (52.27) следует, что правая часть его может быть принята за определение проекции вихря данного поля на произвольный, но фиксированный единичный вектор $\mathbf{v}$. Это приводит и к новому

*) Как и в теореме 3 (по «правилу штопора»).

**) Указанные области $S$, очевидно, всегда существуют (почему?).

***) Через $\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a}$ обозначена проекция вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ на вектор $\mathbf{v}$, т. е. $\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{a} = \text{пр}_{\mathbf{v}} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

определению самого вихря, так как достаточно, например, взять три произвольных ортогональных единичных вектора $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, проекциями на которые, как это хорошо известно, однозначно определяется всякий вектор.

Можно показать, что величины, входящие в правую часть равенства (52.27), не зависят от выбора системы координат, однако согласованность ориентаций вектора $\mathbf{v}$ и контура $\gamma$ зависит от ориентации системы координат: при переходе от правой системы координат к левой согласованность ориентаций $\mathbf{v}$ и $\gamma$ по правилу штопора заменяется согласованностью по правилу «антиштопора», т. е. при фиксированной ориентации вектора $\mathbf{v}$ ориентация контура $\gamma$ изменяется на противоположную. Тем самым интеграл $\int\limits_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$ при изменении ориентации системы координат изменяет знак, а потому в силу формулы (52.27) меняет знак и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

Из сказанного следует, что формула Стокса (52.22) справедлива не только в правой, но и в левой системе координат, так как при изменении ориентации системы координат и левая и правая части равенства (52.22) меняют знак: при фиксированной ориентации $\mathbf{v}$ поверхности $S$ в случае изменения ориентации системы координат изменяют знак как $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$, так и контур $\gamma$.

## 52.5. СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В этом пункте ограниченную область, для которой справедлива теорема Остроградского — Гаусса (см. п. 52.3), будем называть *допустимой*. Совокупность поверхностей будем называть *допустимой*, если она является границей допустимой области.

Выше отмечалось (см. п. 52.3), что теорема Остроградского — Гаусса справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Поэтому всякая такая область допустима. Очевидно, справедливо и обратное утверждение: всякая допустимая область имеет границу, состоящую из конечного числа кусочно-гладких поверхностей — иначе нельзя было бы даже говорить о поверхностных интегралах по границе.

Читатель, предпочитающий пользоваться только доказанными фактами, может под допустимыми областями и поверхностями понимать именно те, для которых в настоящем курсе была доказана теорема Остроградского — Гаусса.

**Определение 9.** *Непрерывно дифференцируемое в области $G$ векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z)$ называется соленоидальным в этой области, если его поток через ориентированную границу любой допустимой области $D$, замыкание $\bar{D}$ которой лежит в $G$: $\bar{D} \subset G$, равен нулю:*

$$\iint\limits_{\partial D} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = 0. \qquad (52.29)$$

Граница $\partial D$ допустимой области $D$ имеет две ориентации, порожденные соответственно внутренней и внешней нормалями. Очевидно, если условие (52.29) выполняется при одной ориентации, то оно выполняется и при другой, так как соответствующие интегралы могут отличаться только знаком.

Поясним определение соленоидальности поля на примере. Пусть $G$ — шаровое кольцо: часть пространства, заключенная между двумя сферами $S_r$ и $S_R$ с общим центром $O$ и радиусами $r$ и $R$, $r<R$, и пусть векторное поле $\boldsymbol{a}$ соленоидально в $G$. Тогда его поток будет равен нулю, например, через любую сферу $S$, лежащую в $G$ и ограничивающую шар, также лежащий в $G$ (рис. 213).

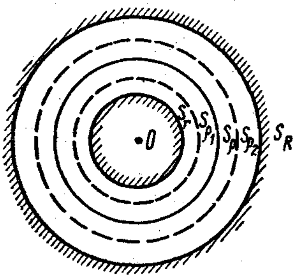


Рис. 213

Однако поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через сферу $S_\rho$ с центром в точке $O$ и радиусом $\rho$, $r<\rho<R$, не обязан быть равным нулю, так как шар, ограниченный этой сферой, не содержится в области $G$.

Вместе с тем сумма потоков векторного поля $\boldsymbol{a}$ будет равна нулю через две сферы $S_{\rho_1}$ и $S_{\rho_2}$ с тем же центром и радиусами $\rho_1$ и $\rho_2$, $r<\rho_1<\rho_2<R$, если одну из них ориентировать, выбрав нормаль, идущую к центру $O$, а другую — от центра. Действительно, указанные сферы ограничивают шаровое кольцо, целиком лежащее в области $G$, а выбранная их ориентация является ориентацией границы, соответствующей внешней или внутренней нормали. Поэтому по определению соленоидальности поля его поток через рассматриваемую ориентированную границу будет равен нулю.

**Теорема 5.** *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в области $G$ векторное поле было соленоидальным в ней, необходимо и достаточно, чтобы его дивергенция равнялась нулю во всех точках области $G$:*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)=0, \quad M \in G.$$

Доказательство необходимости. Пусть $\boldsymbol{a}$ — соленоидальное в области $G$ векторное поле и $M_0 \in G$. Обозначим через $Q_r$ открытый шар радиуса $r>0$ с центром в точке $M_0$, а через $S_r$ ограничивающую его сферу. Поскольку все точки $M \in G$, в том числе и точка $M_0$, являются внутренними для $G$, то существует такое $r_0>0$, что при $r<r_0$ все шары радиуса $r$ вместе с ограничивающими их сферами $S_r$ будут содержаться в $G$.

Заметим, теперь, что предел (52.17), равный значению дивергенции векторного поля $\boldsymbol{a}$ в точке $M_0$, существует для произвольных допустимых областей $D$, $D \subset \bar{D} \subset G$, диаметры которых стремятся к нулю. Поэтому он существует и при специальном выборе $D=Q_r$, $r<r_0$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0)=\lim_{r\to 0}\frac{\iint\limits_{S_r}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}}{\mu Q_r}.$$

В силу определения соленоидальности поля, для всех $r<r_0$ имеет место равенство

$$\iint\limits_{S_r}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}=0,$$

поэтому $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M_0)=0$.

Доказательство достаточности. Пусть $\boldsymbol{a}$ — непрерывно дифференцируемое в области $G$ векторное поле с дивергенцией, равной нулю во всех точках области $G$. Если $D$ — произвольная допустимая область, такая, что $D\subset\bar{D}\subset G$, то в силу теоремы Остроградского — Гаусса

$$\iint\limits_{\partial D}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{D}\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dx\,dy\,dz=0,$$

т. е. поле $\boldsymbol{a}$ соленоидально. □

Типичным примером соленоидального поля является векторное поле, представляющее собой в некоторой области поле роторов дважды непрерывно дифференцируемого в этой области векторного поля.

Действительно, если $\boldsymbol{a}$ — дважды непрерывно дифференцируемое в области $G$ поле, то $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ является соленоидальным в $G$ полем, так как $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$.

Нетрудно провести правдоподобное рассуждение, убеждающее в справедливости этого соотношения. Для этого достаточно перейти к символическому вектору $\nabla$; тогда рассматриваемое равенство примет вид $\nabla(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$.

Смешанное произведение обычных векторов в случае, когда два сомножителя совпадают, равно нулю, ибо в этом случае параллелепипед, натянутый на эти векторы, вырождается в параллелограмм, и, следовательно, его объем равен нулю. Поэтому естественно ожидать, что указанное равенство справедливо и для вектора $\nabla$. Это правдоподобное рассуждение можно превратить в математически обоснованное и, тем самым, имеющее доказательную силу, если доказать, что символический вектор $\nabla$ на самом деле обладает использованными нами свойствами, аналогичными соответствующим свойствам обычных векторов. Это можно сделать простой проверкой, переходя, например, к координатной записи (см. (52.2) и (52.4)).

### 52.6. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В этом пункте поверхность $S$, для которой справедлива теорема Стокса, будем называть допустимой.

**Определение 10.** *Трехмерная область $G$ называется односвязной, если какова бы ни была замкнутая ломаная $\gamma$, лежащая в $G$, существует допустимая поверхность $S$, также лежащая в $G$ и натянутая на ломаную $\gamma$* (см. п. 52.4).

Иногда односвязные области называются также *поверхностно односвязными*.

Если рассматриваемая область $G$ выпуклая, то существует очень простой способ натягивания поверхностей на контур. Искомую поверхность всегда можно взять в этом случае в виде конуса с вершиной в произвольно фиксированной точке $M_0 \in G$, направляющей которого служит заданная кривая $\gamma$. Если

$$\rho = \rho(u), \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,$$

— представление этой кривой и $r_0$ — радиус-вектор точки $M_0$, то искомый конус $S$, натянутый на данный контур, задается представлением

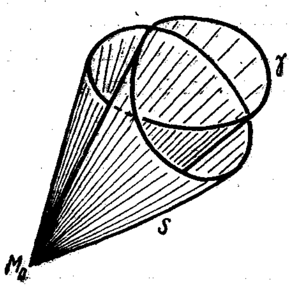



Рис. 214

$$r = r_0 + v[\rho(u) - r_0], \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1. \tag{52.30}$$

Рассматривая $u$ и $v$ как полярные координаты, видим, что «представление» конуса задано на единичном круге, причем единичная окружность $\gamma_0 = \{(u, v) : v = 1\}$ переходит в заданный контур $\gamma$, ее центр — в вершину конуса (рис. 214).

Слово «представление» взято в кавычки, так как понятие представления поверхности было введено выше лишь для случая, когда параметры $u$ и $v$ являлись декартовыми координатами. Конус (52.30) в общем случае будет иметь кратные точки и не будет кусочно-гладкой поверхностью даже в случае, когда $\gamma$ — достаточно гладкая кривая, т. е. если $\gamma$ — достаточное число раз непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек. При этом на конусе (52.30) будут иметься, вообще говоря, особые точки, отличные от вершины. Чтобы устранить это затруднение наиболее простым образом, мы и ограничились при определении односвязной области рассмотрением лишь контуров, являющихся замкнутыми ломаными. В этом случае вершину конуса $M_0$ всегда можно выбрать таким образом, что указанный конус будет кусочно-гладкой поверхностью. Действительно, при любом выборе вершины конуса в случае, когда его направляющей является некоторая ломаная $\gamma$, конус распадается на конечное число треугольников $S_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, правда, быть может, вырожденных, т. е. превратившихся в отрезок или точку. Одной из вершин этих треугольников будет вершина конуса $M_0$, а противоположной стороной — одно из звеньев ломаной $\gamma$. Каждый такой треугольник можно рассматривать как непрерывно дифференцируемую любое число раз поверхность и задавать его представлением, осуществляемым линейными функциями (см. п. 16.5 и (52.30)). Если треугольник вырожденный, то все его точки будут особыми. Однако сколь угодно малым смещением вершины конуса можно добиться того, что она окажется в общем положении со всеми звеньями ломаной $\gamma$, т. е. не будет лежать ни на одной прямой, проходящей через какое-либо звено ломаной $\gamma$. В результате все треугольники $S_i$, $i=1, 2, \ldots, k$, станут невырожденными и, следовательно, могут рассматриваться как гладкие поверхности без особых точек. Сам же конус $S$ окажется, таким образом, кусочно-гладкой поверхностью $S=\{S_i\}_{i=1}^{i=k}$. При этом, поскольку при всех достаточно малых смещениях каждой точки области она остается внутри области, вершину $M_0$ конуса $S$ всегда можно выбрать в области и поэтому в силу ее выпуклости весь конус $S$ будет лежать в этой области. К получившемуся кусочно-гладкому конусу $S$ можно применить теорему Стокса, иначе говоря, этот конус является допустимой в этом пункте поверхностью. Итак, мы доказали, что всякая *выпуклая область односвязна*.

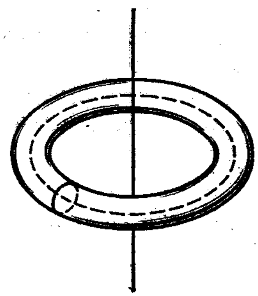


Рис. 215

Примером неодносвязной области является тор, т. е. область, образуемая вращением круга вокруг не пересекающей его оси (рис. 215).

Напомним, что поле называется потенциальным, когда его циркуляция $\int\limits_{\gamma} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ равна нулю по любому замкнутому контуру $\gamma \subset G$, или, что то же, когда интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего в области $G$ точки $A$ и $B$. Подробнее об этом см. п. 52.1. Оказывается, что в односвязной области векторное поле потенциально тогда и только тогда, когда оно безвихревое. Это утверждение содержится в нижеформулируемой и доказываемой теореме 6.

**Теорема 6.** *Пусть в односвязной области $G$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a}=(P, Q, R)$. Тогда эквивалентны следующие три свойства:*

1. *Векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$ является в области $G$ потенциальным.*

2. *Существует потенциальная в $G$ функция $u=u(M)$, т. е. такая функция $u(M)$, что $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad} u$, или, что то же, $du=$*

$= P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. *В этом случае для любых двух точек* $A \in G$ *и* $B \in G$ *и любой кусочно-гладкой кривой* $\overset{\frown}{AB}$, *соединяющей в* $G$ *эти точки,*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A).$$

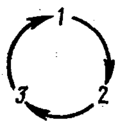
3. *Векторное поле* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ *является безвихревым:* $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$ *в области* $G$, *т. е.*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Подчеркнем, что из теоремы 6 в частности вытекает, что *непрерывно дифференцируемое в односвязной области векторное поле* $\boldsymbol{a}$ *потенциально тогда и только тогда, когда оно является полем градиентов некоторой скалярной функции* $u$:

$$\boldsymbol{a} = \nabla u.$$

Доказательство. Применим схему




Первый шаг: $1 \to 2$. Это утверждение, т. е. существование потенциальной функции, доказывается совершенно аналогично рассмотренному раньше случаю плоской области (см. теорему 3 в п. 47.8) и поэтому не будем приводить его доказательство.

Второй шаг: $2 \to 3$. Утверждение $2 \to 3$ также доказывается аналогично плоскому случаю: оно означает просто-напросто равенство соответствующих вторых смешанных производных потенциальной функции.

Утверждения $1 \to 2$ и $2 \to 3$ справедливы и без предположения односвязности области $G$.

Третий шаг: $3 \to 1$. Пусть $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$ в $G$. Допустим сначала, что $\gamma$ — кусочно дважды непрерывно дифференцируемая замкнутая кривая, лежащая в $G$. Если существует допустимая поверхность $S$, содержащаяся в $G$ и ограниченная контуром $\gamma$, то из теоремы Стокса сразу получаем

$$\int\limits_{\gamma} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{S} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S} = 0.$$

В силу односвязности области $G$ (см. определение 10) это верно, в частности, для любой конечнозвенной ломаной. Поэтому, если $\gamma$ — любая кусочно-гладкая замкнутая кривая, лежащая в $G$, то, выбирая последовательность ломаных $\lambda_n$, вписанных в $\gamma$ со звеньями, стремящимися к нулю при $n \to \infty$, по лемме 3 п. 47.8, получим

$$\int_\gamma \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = 0. \ \square$$

В заключение заметим, что хотя потенциальные и соленоидальные векторные поля не исчерпывают совокупности всех возможных векторных полей, однако, они позволяют описать широкий класс векторных полей. Именно, при достаточно общих предположениях любое векторное поле $\boldsymbol{a}$ представляет собой сумму потенциального и соленоидального векторного поля. Более точно, существуют такие скалярная функция $u$ и векторное поле $\boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{a} = \nabla u + \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$. Поскольку $\operatorname{rot} \nabla u = 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{b} = 0$, то первое слагаемое является потенциальным полем, а второе — соленоидальным.

Это предложение называется теоремой Гельмгольца *) (ее доказательство можно найти в книге: Ф. М. Морс, Г. Фешбах «Методы теоретической физики», т. I, М., 1960).

Упражнения. 20. Доказать, что поток ротора непрерывно дифференцируемого в некоторой области векторного поля через любую сферу, лежащую в указанной области, равен нулю.

21. Доказать, что

$$\iiint_G \operatorname{grad} \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz = \iint_S (\boldsymbol{a} \times \operatorname{grad} \varphi\, d\boldsymbol{S}).$$

Здесь предполагается что для области $G$, ограниченной поверхностью $S$, применима теорема Остроградского — Гаусса.

22. Для векторных полей $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ найти дивергенцию и ротор. Являются ли эти поля потенциальными, соленоидальными? Вычислить поток векторных полей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ через сферу $S_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

23. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$ через сферу $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

24. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — дифференцируемые векторные поля, $u$ — дважды дифференцируемая скалярная функция в области $G \subset R^3$ $\boldsymbol{b} = \operatorname{grad} u$ и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, Доказать, что для того чтобы $\operatorname{div} \boldsymbol{c} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $u$ удовлетворяла в $G$ уравнению $\Delta u = \operatorname{div} \boldsymbol{a}$ (тем самым доказательство теоремы Гельмгольца сводится к решению в области $G$ уравнения вида $\Delta u = f(x, y, z)$).

С помощью теоремы Остроградского — Гаусса вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнутую поверхность $S$, если:

25. $\boldsymbol{a} = (1 + 2x)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 4\}$.

26. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ 3z = x^2 + y^2\}$.

Установить, какие из следующих векторных полей соленоидальны:

27. $\boldsymbol{a} = x(z^2 - y^2)\boldsymbol{i} + y(x^2 - z^2)\boldsymbol{j} + z(y^2 + x^2)\boldsymbol{k}$.

28. $\boldsymbol{a} = (1 + 2xy)\boldsymbol{i} - y^2 z\boldsymbol{j} + (z^2 y - 2yz + 1)\boldsymbol{k}$.

С помощью теоремы Стокса найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}$ по контуру $\gamma$, если

29. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$; $\gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geqslant 0\}$.

30. $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j}$; $\gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 9,\ 3y + 4z = 5\}$.

---

*) Г. Гельмгольц (1821—1894) — немецкий физик и физиолог.