§ 53. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

53.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА; ИХ НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ

Пусть Y — некоторое множество действительных чисел, $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — две функции, определенные на Y, $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$ и функция $f(x, y)$ определена на множестве

$$\{(x, y): y \in Y,\ x \in [\varphi(y), \psi(y)]\}. \tag{53.1}$$

Интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx \tag{53.2}$$

называются *интегралами, зависящими от параметра*, а переменная y называется обычно *параметром*.

Часто встречается тот частный случай такого типа интегралов, когда функции φ и ψ постоянны, т. е. интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{53.3}$$

Если Y является множеством всех натуральных чисел $Y = N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, то, полагая $f(x, n) = f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, интеграл (53.3) можно переписать в виде

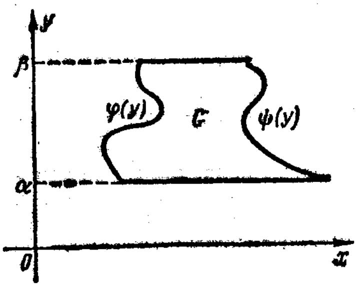

Рис. 216

$$\int_a^b f_n(x)\,dx,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Тем самым получилась числовая последовательность, образованная интегралами от функций некоторой функциональной последовательности.

Мы рассмотрим случай, когда множество Y представляет собой отрезок $[\alpha, \beta]$, функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на этом отрезке и $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$. Пусть графики функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ и, быть может, отрезки прямых $y = \alpha$ и $y = \beta$ образуют границу ограниченной области G (рис. 216). Она, очевидно, квадрируема (см. п. 44.1). В этом случае множество (53.1), на котором определена функция $f(x, y)$, является замыканием $\bar{G}$ указанной области G:

$$\bar{G} = \{(x, y);\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta,\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}. \tag{53.4}$$

В дальнейшем мы изучим свойства функции $\Phi(y)$ (ее непрерывность, правила ее дифференцирования и интегрирования) в зависимости от свойств функций $f(x, y)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$. Некоторые из этих свойств были получены раньше при изучении кратного интеграла. Так, например, лемма, доказанная в п. 45.1, дает условия, при которых интеграл, зависящий от параметра, является непрерывной функцией этого параметра. Сформулируем эту лемму в обозначениях настоящего параграфа в виде теоремы.

Теорема 1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\bar{G}$ области G (см. (53.4)), то функция $\Phi(y)$, задаваемая формулой (53.2) непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$.*

Утверждению этой теоремы можно придать следующий вид:

$$\lim_{y\to y_0}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx = \int_{\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0}\psi(y)} \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx. \tag{53.5}$$

Действительно, из теоремы 1 следует, что предел, стоящий в левой части равенства (53.5), равен $\Phi(y_0)$, а в силу непрерывности функций φ, ψ и f, правая часть равенства также равна

$$\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0)\,dx = \Phi(y_0).$$

В частности, для интеграла (53.3) имеем

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx,$$

т. е. в этом случае возможен предельный переход под знаком интеграла.

В теореме о предельном переходе под знаком интеграла можно ослабить требования, накладываемые на функцию $f(x, y)$, потребовав вместо ее непрерывности по совокупности переменных, лишь непрерывность по одной переменной и равномерное стремление к пределу по другой.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y)$ определена для всех $x \in [a, b]$ $y \in Y$ и непрерывна по x на $[a, b]$ при любом фиксированном $y \in Y$. Тогда если при $y \to y_0$**) *функция $f(x, y)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ стремится к $\varphi(x)$ (см. п. 39.4), то*

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим какую-либо последовательность $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Тогда (см. упражнение 5 в п. 39.4) последовательность $\varphi_n(x) = f(x, y_n)$ будет равномерно на отрезке $[a, b]$ стремиться к функции $\varphi(x)$.

---

*) Здесь y_0 — число или одна из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Отсюда следует (см. п. 36.4), во-первых, что $\varphi(x)$ непрерывна и, следовательно, интегрируема на отрезке $[a, b]$, а во-вторых, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x, y_n)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

и так как это верно для любой указанной последовательности $\{y_n\}$, то теорема доказана.

Перейдем к вопросу об интегрировании интегралов (53.2), зависящих от параметра.

Теорема 3. *Пусть область G элементарна относительно обеих осей координат, т. е.*

$$G = \{(x, y) : \alpha < y < \beta,\quad \varphi(y) < x < \psi(y)\} =$$
$$= \{(x, y) : a < x < b,\quad \varphi_1(x) < y < \psi_1(x)\},$$

где функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функции φ_1 и ψ_1 — на отрезке $[a, b]$. Тогда, если функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\bar{G}$ области G, то

$$\int_\alpha^\beta \Phi(y)\,dy = \int_\alpha^\beta\left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx\right]dy = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x, y)\,dy\right]dx =$$
$$= \iint_G f(x, y)\,dx\,dy. \tag{53.6}$$

Очевидно, теорема 3 является перефразировкой соответствующей теоремы о сведении кратного интеграла к повторному (см. п. 45.1).

53.2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

При изучении дифференциальных свойств интегралов, зависящих от параметра, рассмотрим сначала интегралы вида (53.3).

Теорема 4 (правило Лейбница). *Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в замкнутом прямоугольнике $\Delta = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ \alpha \leq y \leq \beta\}$, то функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и*

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Таким образом, чтобы при сделанных предположениях продифференцировать интеграл, зависящий от параметра, достаточно продифференцировать подынтегральное выражение, оставляя пределы интегрирования неизменными.

Доказательство. Пусть $y \in [\alpha, \beta]$ и $y+\Delta y \in [\alpha, \beta]$; тогда

$$\frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y}\int_a^b [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\,dx, \quad 0<\theta<1.$$

Здесь применена формула конечных приращений Лагранжа.

Обозначив теперь через $\omega\left(\delta; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ модуль непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$, получим

$$\left|\frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx\right| \leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \leqslant \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right)(b-a). \qquad (53.7)$$

В силу равномерной непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на замкнутом прямоугольнике Δ имеем $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$; поэтому из (53.7) получим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx. \ \square$$

Теорема 4 легко обобщается и на случай зависящего от параметра интеграла общего вида (53.2).

Теорема 4′. *Пусть:* 1) *функция* $f(x, y)$ *и ее частная производная* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *непрерывны на замкнутом прямоугольнике*

$$\Delta = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta\},$$

2) $\bar{G} \subset \Delta$ (см. (53.4));

3) *пусть функции* $\varphi(y)$ *и* $\psi(y)$ *имеют непрерывные на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *производные.*

Тогда интеграл (53.2), *зависящий от параметра, также имеет производную на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *причем*

$$\frac{d\Phi}{dy} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx - f[\varphi(y), y]\frac{d\varphi(y)}{dy} + f[\psi(y), y]\frac{d\psi(y)}{dy}. \qquad (53.8)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y)\,dx, \quad a \leqslant u \leqslant b, \quad a \leqslant v \leqslant b, \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta.$$

Нетрудно непосредственно проверить, что частные производные $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$ функции F существуют и непрерывны по совокупности переменных y, u, v. Проверим сначала существование и непрерывность частной производной $\frac{\partial F}{\partial y}$. Ее существование непосредственно следует из теоремы 4, причем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx. \tag{53.9}$$

Докажем ее непрерывность. Пусть $a \leqslant u \leqslant b$, $a \leqslant v \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, $a \leqslant u + \Delta u \leqslant b$, $a \leqslant v + \Delta v \leqslant b$, $\alpha \leqslant y + \Delta y \leqslant \beta$; положив

$$\Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} = \frac{\partial F(y+\Delta y, u+\Delta u, v+\Delta v)}{\partial y} - \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y},$$

получим:

$$\left| \Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} \right| = \left| \int_{u+\Delta u}^{v+\Delta v} \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y}\,dx - \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_u^v \left[\frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right] dx \right| +$$
$$+ \left| \int_{u+\Delta u}^{u} \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y}\,dx \right| + \left| \int_v^{v+\Delta v} \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y}\,dx \right|. \tag{53.10}$$

Поскольку функция $\frac{\partial f}{\partial y}$ определена на прямоугольнике Δ, то в силу вышеуказанного выбора значений аргументов все написанные интегралы имеют смысл и

$$|v - u| \leqslant b - a. \tag{53.11}$$

Далее, из непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на прямоугольнике Δ следует, что она ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех точек $(x, y) \in \Delta$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leqslant M. \tag{53.12}$$

Обозначив, как и выше, через $\omega\left(\delta; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ модуль непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на прямоугольнике Δ и использовав неравенства

(53.11) и (53.12), из (53.10) получим

$$\left|\Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y}\right| \leqslant \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right)\left|\int_u^v dx\right| + M\left|\int_{u+\Delta u}^{u} dx\right| + M\left|\int_v^{v+\Delta v} dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)\,\omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right) + M|\Delta u| + M|\Delta v|.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\sqrt{\Delta y^2+\Delta u^2+\Delta v^2}\to 0} \Delta \dfrac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} = 0$. Это и означает непрерывность частной производной $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ на множестве

$$\{(y, u, v): c \leqslant y \leqslant d,\ a \leqslant u \leqslant b,\ a \leqslant v \leqslant b\}.$$

Непрерывность на этом множестве частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u, y), \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f(v, y) \tag{52.13}$$

очевидна.

Связь между функциями Φ и F устанавливается формулой

$$\Phi(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y)).$$

В силу доказанного выше функцию Φ можно дифференцировать по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy}.$$

Подставляя сюда выражения для частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial v}$$

(см. (53.9) и (53.13)) и полагая $u = \varphi(y)$ и $v = \psi(y)$, получим формулу (53.8). □

§ 54. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

54.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Мы будем рассматривать интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \tag{54.1}$$

где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, переменная y принадлежит некоторому множеству Y и интеграл (54.1) при некоторых (в частности, при всех) значениях y является несобственным.