(53.11) и (53.12), из (53.10) получим

$$\left|\Delta\frac{\partial F(y,\ u,\ v)}{\partial y}\right| \leqslant \omega\left(|\Delta y|;\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\left|\int\limits_u^v dx\right| + M\left|\int\limits_{u+\Delta u}^{u} dx\right| + M\left|\int\limits_v^{v+\Delta v} dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant (b-a)\,\omega\left(|\Delta y|;\ \frac{\partial f}{\partial y}\right) + M|\Delta u| + M|\Delta v|.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\sqrt{\Delta y^2+\Delta u^2+\Delta v^2}\to 0}\Delta\dfrac{\partial F(y,\ u,\ v)}{\partial y} = 0$. Это и означает непрерывность частной производной $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ на множестве

$$\{(y,\ u,\ v): c \leqslant y \leqslant d,\ a \leqslant u \leqslant b,\ a \leqslant v \leqslant b\}.$$

Непрерывность на этом множестве частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u,\ y),\quad \frac{\partial F}{\partial v} = f(v,\ y) \qquad (52.13)$$

очевидна.

Связь между функциями Φ и F устанавливается формулой

$$\Phi(y) = F(y,\ \varphi(y),\ \psi(y)).$$

В силу доказанного выше функцию Φ можно дифференцировать по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy}.$$

Подставляя сюда выражения для частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial F}{\partial v}$$

(см. (53.9) и (53.13)) и полагая $u=\varphi(y)$ и $v=\psi(y)$, получим формулу (53.8). □

§ 54. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

54.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Мы будем рассматривать интегралы вида

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx, \qquad (54.1)$$

где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, переменная y принадлежит некоторому множеству Y и интеграл (54.1) при некоторых (в частности, при всех) значениях y является несобственным.

Определение 1. *Если для каждого* $y_0 \in Y$ *интеграл*

$$\Phi(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\,dx$$

сходится, то интеграл (54.1) *называется сходящимся на множестве* Y.

В дальнейшем, если не оговорено что-либо другое, будем рассматривать только случай, когда выполняются условия:

1) $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) при любом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ по переменной x интегрируема, по Риману, на каждом отрезке $[a, \eta]$, где η таково, что $a < \eta < b$.

В этом случае сходимость интеграла (54.1) на множестве Y означает, что при любом $y \in Y$ существует предел

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x, y)\,dx = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

(если $b = +\infty$, то $b - 0 = +\infty$). Поскольку

$$\int_a^b f(x, y)\,dx - \int_a^\eta f(x, y)\,dx = \int_\eta^b f(x, y)\,dx,$$

то из сказанного при каждом фиксированном $y \in Y$ получим

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_\eta^b f(x, y)\,dx = 0.$$

Таким образом, *если интеграл* (54.1) *сходится на множестве* Y, *то при каждом фиксированном* $y \in Y$ *для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta_\varepsilon = \eta_\varepsilon(y) < b$, *что если* $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$, *то*

$$\left| \int_\eta^b f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{54.2}$$

Условия, при которых для несобственных интегралов, зависящих от параметра, справедливы теоремы, аналогичные доказанным в предыдущем параграфе для собственных интегралов основаны на понятии так называемой равномерной сходимости интеграла.

Будем предполагать, как было отмечено, что интеграл (54.1) удовлетворяет вышеуказанным условиям 1) и 2).

Определение 2. *Сходящийся на множестве* Y *интеграл* $\int_a^b f(x, y)\,dx$ *называется равномерно сходящимся на этом множестве, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta_\varepsilon < b$, *что для* *всех* $y \in Y$ *и всех* η *таких, что* $\eta_\varepsilon < \eta < b$, *выполняется неравенство*

$$\left| \int_\eta^b f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Напомним, что в рассматриваемом нами случае b может быть как конечным, т. е. числом, так и бесконечным, т. е. равным $+\infty$. Таким образом, в приведенном виде определение равномерной сходимости годится одновременно как для случая, когда интегрирование производится по конечному отрезку $[a, b]$, а несобственный интеграл возникает за счет неограниченности подынтегральной функции, так и для случая, когда несобственный интеграл получается за счет неограниченности промежутка интегрирования $[a, +\infty)$.

Приведенные определения сходимости и равномерной сходимости интеграла напоминают соответствующие определения для рядов (см. п. 36.1 и 36.3). Между ними действительно имеется связь.

Пусть $\{\eta_n\}$ — некоторая последовательность, такая, что

$$\eta_1 = a, \quad \eta_n \in [a, b), \quad n = 1, 2, \ldots, \text{ и } \lim_{n \to \infty} \eta_n = b.$$

Наряду с интегралом (54.1) рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y)\,dx. \tag{54.3}$$

Пусть

$$S_n(y) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y)\,dx = \int_a^{\eta_n} f(x, y)\,dx$$

— его частичная сумма. Тогда, если интеграл (54.1) сходится (соответственно равномерно сходится) на множестве Y, то, очевидно, сходится (соответственно равномерно сходится) на множестве Y и ряд (54.3); при этом

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^{\eta_n} f(x, y)\,dx = \lim_{n \to \infty} S_n(y),$$

т. е. рассматриваемый интеграл равен сумме ряда (54.3).

Определение равномерной сходимости интеграла можно перефразировать еще следующим образом.

Определение 2'. Сходящийся на множестве Y интеграл (54.1) называется *равномерно сходящимся* на этом множестве, если

$$\lim_{\eta \to b-0} \sup_{y \in Y} \left| \int_\eta^b f(x, y)\,dx \right| = 0. \tag{54.4}$$

Действительно, если интеграл (54.1) равномерно сходится на множестве Y в смысле определения 2, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\eta_\varepsilon<b$, что выполняется неравенство (54.2) при $y\in Y$ и $\eta_\varepsilon\leqslant\eta<b$ и, следовательно,

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_\eta^b f(x,\ y)\,dx\right|\leqslant\varepsilon,\quad \eta_\varepsilon\leqslant\eta<b,$$

откуда и следует (54.4). Обратно, если рассматриваемый интеграл равномерно сходится на множестве Y в смысле определения 2', то из условия (54.4) для любого $\varepsilon>0$ следует существование такого числа η_ε, что при $y\in Y$ и $\eta_\varepsilon\leqslant\eta<b$ выполняется неравенство (54.2). $\square$

Если рассмотреть интеграл

$$F(y,\ \eta)\overset{\text{def}}{=}\int_\eta^b f(x,\ y)\,dx,$$

то, очевидно, что условие (54.4) означает, что этот интеграл равномерно на Y стремится к нулю при $\eta\to b-0$ (здесь в терминологии п. 39.4 параметром является не y, как это было там, а переменная η).

Равномерная сходимость на множестве Y интеграла (54.1) означает также равномерное стремление на множестве Y функции

$$\Phi(y,\ \eta)\overset{\text{def}}{=}\int_a^\eta f(x,\ y)\,dx \tag{54.5}$$

при $\eta\to b-0$ к функции (54.1).

Действительно, последнее означает (см. п. 39.4), что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\eta_\varepsilon<b$, что для каждого η, удовлетворяющего условию $\eta_\varepsilon\leqslant\eta<b$, и всех $y\in Y$ выполняется неравенство

$$|\Phi(y)-\Phi(y,\ \eta)|<\varepsilon.$$

Но

$$\Phi(y)-\Phi(y,\ \eta)=\int_a^b f(x,\ y)\,dx-\int_a^\eta f(x,\ y)\,dx=\int_\eta^b f(x,\ y)\,dx.$$

Поэтому

$$\left|\int_\eta^b f(x,\ y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Таким образом условие $\Phi(y,\ \eta)\underset{Y}{\rightrightarrows}\Phi(y)$ при $\eta\to b-0$ равносильно выполнению условий определения 2, т. е. равномерной сходимости на множестве Y интеграла (54.1).

Пример. Рассмотрим интеграл $\Phi(y)=\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$. В качестве множества Y возьмем полуось $y\geqslant 0$ (при любом $y<0$ этот интеграл расходится). Легко убедиться, что рассматриваемый интеграл сходится на Y. Для любого $\alpha>0$ он сходится равномерно на промежутке $[\alpha, +\infty)$. Действительно, в этом случае легко проверяется, например, выполнение условия (54.4):

$$\lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant\alpha}\left|\int\limits_\eta^{+\infty} ye^{-xy}\,dx\right|=\lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant\alpha} e^{-\eta y}=\lim_{\eta\to+\infty} e^{-\alpha\eta}=0.$$

На всей же полуоси Y равномерной сходимости нет. В самом деле,

$$\lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant 0}\left|\int\limits_\eta^{+\infty} ye^{-xy}\,dx\right|=\lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant 0} e^{-\eta y}=1,$$

т. е. на множестве Y условие (54.4) не выполняется.

Теорема 1 (признак Вейерштрасса). *Если существует неотрицательная функция $\varphi(x)$, определенная на промежутке $[a, b)$ и интегрируемая по Риману на каждом отрезке $[a, \eta]$, где $a<\eta<b$, такая что:*

1) $|f(x, y)|\leqslant\varphi(x)$, *где* $a\leqslant x<b$, $y\in Y$;

2) *интеграл* $\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx$ *сходится,*

то интеграл (54.1) *равномерно сходится на множестве* Y.

Доказательство. Прежде всего, в силу признака сравнения (см. п. 33.3) интеграл (54.1) абсолютно, а значит, и просто сходится при любом $y\in Y$. Далее, в силу сходимости интеграла $\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx$ для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое $\eta_\varepsilon<b$, что если $\eta_\varepsilon\leqslant\eta<b$, то $\int\limits_\eta^b\varphi(x)\,dx<\varepsilon$. Тогда, в силу условия 1 теоремы

$$\left|\int\limits_\eta^b f(x, y)\,dx\right|\leqslant\int\limits_\eta^b|f(x, y)|\,dx\leqslant\int\limits_\eta^b\varphi(x)\,dx<\varepsilon,\quad \eta_\varepsilon\leqslant\eta<b,\quad y\in Y,$$

а это и означает равномерную сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ на множестве Y. $\square$

С помощью признака Вейерштрасса, например, сразу устанавливается, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$ равномерно сходится на всей вещественной оси $-\infty < y < +\infty$. Действительно, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ сходится, и при любых x и y выполняется неравенство $\frac{1}{1+x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$.

Из критерия Коши равномерной сходимости функций по параметру (см. п. 39.4) непосредственно получаются необходимые и достаточные условия (также называемые критерием Коши) для равномерной сходимости интегралов.

Теорема 2 (критерий Коши равномерной сходимости интегралов). Для того чтобы интеграл (54.1) равномерно сходился на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\eta < b$, что для всех η' и η'', удовлетворяющих условиям $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$ и всех $y \in Y$ выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon. \tag{54.6}$$

Действительно, как было отмечено, равномерная сходимость интеграла (54.1) равносильна равномерному стремлению к пределу функции $\Phi(y, \eta)$ (см. (54.5)), а неравенство (54.6) в обозначениях (54.5) можно записать в виде

$$|\Phi(y, \eta'') - \Phi(y, \eta')| < \varepsilon.$$

Поэтому теорема 2 является просто перефразировкой теоремы 4 из п. 39.4 для рассматриваемого здесь случая.

Упражнения. Исследовать сходимость и равномерную сходимость интегралов при всех значениях параметра α, указать области изменения параметра α, на которых имеет место равномерная сходимость интегралов:

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+(x-\alpha)^2}$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\, dx$.
4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x+\alpha\sqrt{x}}$.
5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$.

6. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)^p+b^p}$ при $a \in \mathbf{R}$, $b \geqslant b_0 > 0$ (соответственно, при $b > 0$), $p > 1$.

54.2*. ПРИЗНАК РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ

В этом пункте будет доказан признак равномерной сходимости интегралов, аналогичный соответствующему признаку для равномерной сходимости рядов (см. п. 36.3).

Теорема 3. *Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены при $a \leqslant x < +\infty$ и $y \in Y$ (a — конечно, Y — некоторое числовое множество), причем функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x, а $g(x, y)$ имеет непрерывную по x производную $\frac{\partial g}{\partial x}$. Если*

1) функция $g(x, y)$ при каждом $y \in Y$ монотонна по x и равномерно на множестве Y стремится к нулю при $x \to \infty$;

2) интеграл $\int\limits_a^\eta f(x, y)\,dx$ ограничен как функция переменных $\eta \in [a, +\infty)$ и $y \in Y$ на множестве $[a, +\infty) \times Y$; то интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x, y) f(x, y)\,dx \tag{54.7}$$

равномерно сходится на множестве Y.

Доказательство. Согласно второй теореме о среднем для интегралов (см. п. 30.3*) при любых η' и η'', $a < \eta' < \eta''$, справедливо равенство

$$\int\limits_{\eta'}^{\eta''} g(x, y) f(x, y)\,dx = g(\eta', y)\int\limits_{\eta'}^{\xi} f(x, y)\,dx + g(\eta'', y)\int\limits_{\xi}^{\eta''} f(x, y)\,dx, \tag{54.8}$$

где $\eta' < \xi < \eta''$. В силу условия 2) теоремы существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $(\eta, y) \in [a, +\infty) \times Y$ имеет место неравенство $\left|\int\limits_a^\eta f(x, y)\,dx\right| \leqslant M$. Поэтому

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\xi} f(x, y)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^{\xi} f(x, y)\,dx + \int\limits_a^{\eta'} f(x, y)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^{\xi} f(x, y)\,dx\right| + \left|\int\limits_a^{\eta'} f(x, y)\,dx\right| = 2M, \tag{54.9}$$

аналогично,

$$\left|\int\limits_{\xi}^{\eta''} f(x, y)\,dx\right| \leqslant 2M. \tag{54.10}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерного на множестве Y стремления к нулю функции $g(x, y)$ при $x \to +\infty$, существует такое $\eta_\varepsilon > a$, что для всех $x > \eta_\varepsilon$ и всех $y \in Y$ справедливо неравенство

$$|g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{54.11}$$

С помощью неравенств (54.9), (54.10) и (54.11) из (54.8) следует, что для любых $\eta' > \eta_\varepsilon$ и $\eta'' > \eta_\varepsilon$ имеет место оценка

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} g(x, y) f(x, y)\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant |g(\eta', y)| \left|\int_{\eta'}^{\xi} f(x, y)\, dx\right| + |g(\eta'', y)| \left|\int_{\xi}^{\eta''} f(x, y)\, dx\right| <$$
$$< 2M\frac{\varepsilon}{4M} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Таким образом выполняется условие Коши (см. п. 54.1) равномерной сходимости интеграла (54.7). □

Замечание. Можно было бы интеграл в левой части равенства оценить и не прибегая ко второй теореме о среднем, а поступая аналогично доказательству признака Дирихле в п. 33.6, проинтегрировать его по частям. Это однако удлинило бы доказательство и по существу были бы повторены рассуждения, проведенные при доказательстве второй теоремы о среднем.

Наличие у функции $g(x, y)$ непрерывной производной по x не является существенным и вызвано лишь тем, что вторая теорема о среднем в п. 28.3* была доказана при этом предположении.

Пример. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2}\, dx$ равномерно сходится при $y \geqslant y_0 > 0$. Действительно, функция $g(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{1+x^2}$ убывает при $x \geqslant 1$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, причем, поскольку $g(x)$ не зависит от y, то стремление $g(x)$ к нулю при $x \to +\infty$ происходит равномерно относительно y; кроме того

$$\left|\int_0^{\eta} \sin xy\, dx\right| = \frac{1-\cos\eta y}{y} \leqslant \frac{2}{y_0}.$$

Таким образом, оба условия теоремы 3 выполнены.

Задача 32. Доказать, что если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены при $-\infty < a \leqslant x < +\infty$ и $y \in Y$, причем интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ равномерно сходится на Y, а функция $g(x, y)$ монотонна по x и ограничена на множестве $[a, +\infty) \times Y$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x, y) f(x, y)\, dx$ сходится равномерно на Y.

Упражнения. 7. Пусть функции $f(x)$ и $g(x, y)$ непрерывны по x, функция $g(x, y)$ монотонно и равномерно относительно $y \in Y$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ и имеет непрерывную производную $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$, $x \geqslant a$, $y \in Y$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x, y)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y.

Исследовать на равномерную сходимость интегралы:

8. $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin^p x}{x^q}\,dx$ при $\alpha \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$.

9. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln^p x}{x^q}\,dx$ при $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$.

54.3. СВОЙСТВА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

При изучении свойств несобственных интегралов, зависящих от параметра, очень часто придется иметь дело с перестановкой предельных переходов по различным переменным. Поэтому прежде всего докажем лемму, относящуюся к этому вопросу.

Лемма 1. *Пусть X и Y — два числовых множества; функция $f(x, y)$ определена на их произведении $X \times Y$* (см. п. 41.2): $x \in X$, $y \in Y$; *x_0 и y_0 — числа или какие-то из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$ и существуют пределы*

$$\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y),\quad x \in X, \quad \text{и} \quad \psi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y), \quad y \in Y.$$

Если стремление функции f хотя бы к одному из указанных пределов происходит равномерно, то существуют и равны оба повторных предела:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Доказательство. Пусть, например, функция $f(x, y)$ равномерно на X стремится к $\varphi(x)$ при $y \to y_0$. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(y_0)$, такая, что, каковы бы ни были $y \in \mathring{U}(y_0) \cap Y$*) и $x \in X$, выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{54.12}$$

Если $y_1 \in \mathring{U}(y_0) \cap Y$ и $y_2 \in \mathring{U}(y_0) \cap Y$, то

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant |f(x, y_1) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

*) Через $\mathring{U}$, как всегда, обозначается проколотая окрестность.

Переходя здесь к пределу при $x \to x_0$, получим

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leqslant \varepsilon. \tag{54.13}$$

Согласно критерию Коши для существования предела функции (см. п. 4.11), из (54.13) следует существование конечного предела

$$\lim_{y \to y_0} \psi(y) = A.$$

Итак, доказано существование повторного предела

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = A.$$

Зафиксируем теперь $y_1 \in \overset{\circ}{U}(y_0) \cap Y$. Тогда из (54.12) при $y = y_1$ и из (54.13) при $y_2 \to y_0$ соответственно получим

$$|f(x, y_1) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\psi(y_1) - A| \leqslant \varepsilon. \tag{54.14}$$

Для всех $y \in Y$ существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y)$. Поэтому при фиксированном $y_1 \in \overset{\circ}{U}(y_0) \cap Y$ для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(x_0)$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ будем иметь

$$|f(x, y_1) - \psi(y_1)| < \varepsilon. \tag{54.15}$$

Из неравенств (54.14) и (54.15) для всех $x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ имеем

$$|\varphi(x) - A| \leqslant |\varphi(x) - f(x, y_1)| + |f(x, y_1) - \psi(y_1)| + |\psi(y_1) - A| < 3\varepsilon,$$

что и означает существование повторного предела

$$A = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y). \ \square$$

Теорема 4. *Пусть* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *и функция* $f(x, y)$ *определена для всех* $x \in [a, b)$, $y \in Y$ *и при любом* $y \in Y$ *непрерывна по* x *на* $[a, b)$. *Тогда если при любом* $\eta \in [a, b)$ *функция* $f(x, y)$ *равномерно на отрезке* $[a, \eta]$ *стремится к функции* $\varphi(x)$ *при* $y \to y_0$ *) *и интеграл*

$$\int_a^b f(x, y)\, dx \tag{54.16}$$

равномерно сходится на множестве Y, *то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx. \tag{54.17}$$

---

*) Здесь y_0 — число или одна из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Доказательство. Если $a<\eta<b$, то в силу теоремы 2 п. 53.1 имеем

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^\eta f(x,\ y)\,dx=\int_a^\eta \lim_{y\to y_0} f(x,\ y)\,dx=\int_a^\eta \varphi(x)\,dx. \qquad (54.18)$$

Поэтому, согласно определению несобственного интеграла, равенство (54.17) можно переписать в виде

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x,\ y)\,dx=\lim_{\eta\to b-0}\lim_{y\to y_0}\int_a^\eta f(x,\ y)\,dx. \qquad (54.19)$$

Таким образом, остается доказать возможность перестановки порядка предельных переходов для функции

$$\Phi(y,\ \eta)=\int_a^\eta f(x,\ y)\,dx.$$

Это следует из доказанной выше леммы. В самом деле, согласно (54.18) существует предел $\lim\limits_{y\to y_0}\Phi(y,\ \eta)$. С другой стороны, существует и предел

$$\lim_{\eta\to b-0}\Phi(y,\ \eta)=\lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x,\ y)\,dx=\int_a^b f(x,\ y)\,dx,$$

причем здесь, согласно условию теоремы, стремление к пределу происходит равномерно на множестве Y. Следовательно, справедливость равенства (54.19) непосредственно вытекает из утверждения леммы. $\square$

Теорема 5. *Пусть функция $f(x,\ y)$ определена и непрерывна (как функция двух переменных) на полуоткрытом «прямоугольнике»*

$$\{(x,\ y): a\leqslant x<b,\quad c\leqslant y\leqslant d\},$$
$$-\infty<a<b\leqslant+\infty,\quad -\infty<c<d<+\infty.$$

Тогда, если интеграл $\Phi(y)=\int_a^b f(x,\ y)\,dx$ сходится равномерно на $[c,\ d]$, то он является непрерывной функцией на этом отрезке.

Доказательство. Каково бы ни было $y_0\in[c,\ d]$, функция $f(x,y)$ при $y\to y_0$ равномерно на любом отрезке $[a,\ \eta]$, $a<\eta<b$, стремится к функции $f(x,\ y_0)$ (см. п. 39.4). Поэтому, согласно предыдущей теореме (см. (54.17)),

$$\lim_{y\to y_0}\Phi(y)=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,\ y)\,dx=\int_a^b f(x,\ y_0)\,dx=\Phi(y_0). \quad \square$$

Теорема 6. *Если выполнены предположения теоремы 5, то*

$$\int_c^d \Phi(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{54.20}$$

Доказательство. Если $a < \eta < b$, то по теореме 3, п. 53.1, имеем

$$\int_c^d dy \int_a^\eta f(x, y)\,dx = \int_a^\eta dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{54.21}$$

Функция $\Phi(y, \eta) = \int_a^\eta f(x, y)\,dx$ непрерывна по y и при $\eta \to b-0$ стремится к своему пределу $\Phi(y)$ равномерно на отрезке $[c, d]$. Поэтому, согласно теореме 2, п. 53.1, в левой части равенства (54.21) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\eta \to b-0$:

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_c^d dy \int_a^\eta f(x, y)\,dx = \lim_{\eta \to b-0} \int_c^d \Phi(y, \eta)\,dy = \int_c^d \lim_{\eta \to b-0} \Phi(y, \eta)\,dy =$$

$$= \int_c^d \Phi(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx;$$

при этом полученный предел конечен. Следовательно, при $\eta \to b-0$ существует тот же предел и у правой части равенства (54.21), который в силу определения несобственного интеграла равен

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \ \square$$

Докажем одну теорему о перестановке порядка интегрирования для случая, когда оба интеграла несобственные.

Теорема 7. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на полуоткрытом прямоугольнике*

$$\{(x, y): a \leqslant x < b, \quad c \leqslant y < d\},$$
$$-\infty < a < b \leqslant +\infty, \quad -\infty < c < d \leqslant +\infty.$$

Если интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\,dx \tag{54.22}$$

равномерно сходится на любом отрезке $[c, \eta]$, $c < \eta < d$, а интеграл

$$\int_c^d f(x, y)\,dy \tag{54.23}$$

равномерно сходится на любом отрезке $[a, \xi]$, $a<\xi<b$, *и существует один из двух повторных интегралов*

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)|\, dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)|\, dy,$$

то существуют и равны между собой оба повторных интеграла

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx \quad \text{и} \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad \text{т. е.}$$

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{54.24}$$

Доказательство. Пусть, например, существует интеграл

$$\int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)|\, dy \tag{54.25}$$

и пусть $c<\eta<d$. В силу равномерной сходимости на отрезке $[c, \eta]$ интеграла (54.22), согласно теореме 6 имеем

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\, dy. \tag{54.26}$$

Предел левой части этого равенства при $\eta \to d-0$, очевидно, равен

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Покажем, что предел правой части равенства (54.26) равен

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

т. е. что в этом случае возможен предельный переход при $\eta \to d-0$ под знаком интеграла. Проверим выполнение предпосылок теоремы 4 этого пункта. Функция $\Phi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y)\, dy$ непрерывна по x (см. теорему 1 п. 53.1) и, согласно условию теоремы, на любом отрезке $[a, \xi]$, $a<\xi<b$, при $\eta \to d-0$ равномерно стремится к интегралу (54.23), т. е. к функции $F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$.

Наконец, интеграл

$$\int_a^b \Phi(x, \eta)\, dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\, dy$$

сходится равномерно относительно η, $c<\eta<d$, ибо

$$|\Phi(x, \eta)|\leqslant\int_c^d |f(x, y)|\,dy,$$

а интеграл (54.25), по предположению, сходится.

Следовательно, условия теоремы 4 для правой части равенства (54.26) выполнены, поэтому

$$\lim_{\eta\to d-0}\int_a^b \Phi(x, \eta)\,dx=\int_a^d \lim_{\eta\to d-0}\Phi(x, \eta)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Итак, доказываемое равенство (54.24) получается из (54.26) предельным переходом при $\eta\to d-0$. $\square$

Перейдем теперь к рассмотрению дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 8. *Пусть функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ определены и непрерывны на полуоткрытом прямоугольнике*

$$\Delta=\{a\leqslant x<b,\quad c\leqslant y\leqslant d\},$$
$$-\infty<a<b\leqslant+\infty,\quad -\infty<c<d<+\infty.$$

Если интеграл $\int_a^b f(x, y)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx$ равномерно сходится на отрезке $[c, d]$, то функция $\Phi(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке и

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Доказательство. Представим функцию $\Phi(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$ в виде сходящегося на отрезке $[c, d]$ ряда

$$\Phi(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y)\,dx, \tag{54.27}$$

где η_n, $n=1, 2, \ldots,$ — фиксированная последовательность, такая, что $\eta_n\in[a, b)$, $\eta_1=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=b$, а функцию $\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx$ —

в виде равномерно сходящегося на отрезке $[c, d]$ ряда

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \qquad (54.28)$$

Согласно теореме 4 п. 53.2, каждый член ряда (54.28) является производной по переменной y от соответствующего члена ряда (54.27), а поэтому в силу теоремы о дифференцировании рядов (см. п. 36.4) сумма ряда (54.28) является производной суммы ряда (54.27). □

Как уже отмечалось, все предыдущие формулировки и доказательства относятся к несобственным интегралам, зависящим от параметра, которые удовлетворяют условиям 1) и 2), сформулированным в начале п. 54.1. Совершенно аналогично рассматриваются и более общие случаи, например, когда

1′) $-\infty \leq a < b \leq +\infty$;

2′) при любом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ по переменной x интегрируема, по Риману, на каждом отрезке $[\xi, \eta]$, где $a < \xi < \eta < b$.

Построенная теория интегралов, зависящих от параметра, естественным образом переносится и на случай, когда интеграл зависит от двух или вообще от некоторого конечного числа параметров $y_1, \ldots, y_n$. При этом многие формулировки определений и теорем, а также доказательства формально остаются прежними, если только вкладывать новый смысл в применяемые обозначения. Это относится, например, к определению равномерной сходимости и теореме о предельном переходе под знаком интеграла, следует только считать, что $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $y_0 = (y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ — точки n-мерного евклидова пространства, а $y \to y_0$ понимать в смысле предела в этом пространстве.

54.4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА, К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

До сих пор в нашем распоряжении было два способа вычисления определенных интегралов. Первый из них исходит из определения интеграла как предела интегральных сумм и широко используется в численных методах. С ним мы более подробно ознакомимся в п. 60.4. Второй способ, которым мы уже постоянно пользовались, основан на нахождении первообразной подынтегральной функции и применении формулы Ньютона — Лейбница. Оказывается, что иногда удается получать точные значения определенных интегралов, используя теорию интегралов, зависящих от параметра. При этом ценность этого метода состоит в том, что с его помощью в ряде случаев вычисляются интегралы от функций, первообразные которых не являются элементарными функциями и тем самым обычный способ использования формулы Ньютона — Лейбница оказывается неприменимым.

Пример 1. Пусть требуется вычислить интеграл

$$J=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{54.29}$$

Приведем способы его вычисления, основанные на его замене некоторым интегралом, зависящим от параметра, для которого (54.29) является частным значением.

Рассмотрим функцию $f(x,\ y)=\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$ и интеграл

$$J(y)=\int_0^1 f(x,\ y)\,dx=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{54.30}$$

Очевидно, что интеграл (54.29) получается отсюда при $y=1$. Так как $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}=O(1)$ при $x\to 0$ и $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ при $x\to 1$ и любом фиксированном y, то интеграл (54.30) сходится при любом y.

Из неравенства $\left|\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right|=\left|\dfrac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right|\leq\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и сходимости интеграла $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$ следует, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx \tag{54.31}$$

равномерно сходится на всей вещественной оси и, согласно теореме 8 п. 54.3, равен $J'(y)$.

Выполнив последовательно замены переменного интегрирования $x=\cos\varphi$ и $t=\operatorname{tg}\varphi$, получим

$$J'(y)=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{1+y^2\cos^2\varphi}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+y^2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

Отсюда, согласно определению неопределенного интеграла, вытекает, что

$$J(y)=\int J'(y)\,dy=\frac{\pi}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)+C.$$

Но из (54.30) следует, что $J(0)=0$, поэтому $C=0$ и

$$J(y)=\frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$$

Подставляя сюда $y=1$ получаем значение искомого интеграла (54.29)

$$J=J(1)=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Интеграл (54.29) можно вычислить и используя интегрирование по параметру. Заметив, что $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$, получим для J выражение

$$J=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}. \tag{54.32}$$

Интеграл же $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$ сходится равномерно по y, ибо $\frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится. Поэтому в (54.32) можно переменить порядок интегрирования (см. теорему 6 п. 54.3). Тогда (используя непосредственно найденное выше значение получающегося интеграла по x) находим

$$J=\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Пример 2. Вычислим значение интеграла

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx. \tag{54.33}$$

Можно показать, что соответствующий неопределенный интеграл при $\alpha\neq 0$ не выражается через элементарные функции, и тем самым данный интеграл нельзя вычислить обычным приемом с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

Интеграл (54.33) сходится при всех значениях α. Действительно, если $\alpha=0$, то, очевидно, $I(0)=0$. Если же $\alpha\neq 0$, то, производя замену переменного $t=\alpha x$, получим

$$I(\alpha)=\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt=I(1), & \text{если } \alpha>0 \\ -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt=-I(1) & \text{если } \alpha<0 \end{cases}$$

Интеграл же $I(1)$ сходится (см. п. 33.5), поэтому и интеграл $I(\alpha)$ сходится.

Для того чтобы вычислить интеграл (54.33), рассмотрим более общий интеграл $I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$.

Продифференцировав формально по α под знаком интеграла, получим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha\, dx$, который при любом фиксированном $\beta > 0$ равномерно сходится относительно параметра α, $-\infty < \alpha < +\infty$. Следовательно, при $\beta > 0$ (см. т. 1, п. 26.4)

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

откуда

$$I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\beta\, dt}{t^2 + \beta^2} + C(\beta) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} + C(\beta).$$

Но $I(0, \beta) = 0$, следовательно, $C(\beta) = 0$. Итак,

$$I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}, \quad \beta > 0.$$

Нас, однако, интересует значение интеграла $I(\alpha, \beta)$ при $\beta = 0$. Проще всего попытаться обосновать возможность предельного перехода под знаком интеграла $I(\alpha, \beta)$ при $\beta \to +0$. Зафиксируем число $b \geqslant 0$ и покажем, что интеграл $I(\alpha, \beta)$ при любом фиксированном $\alpha \neq 0$ равномерно сходится по параметру β на отрезке $[0, b]$. Действительно, интегрируя по частям (см. там же, п. 26.4), получим

$$\int\limits_\eta^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{1}{x} e^{-\beta x} \frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} \Bigg|_\eta^{+\infty} + \\ + \int\limits_\eta^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{dx}{x^2}.$$

Выберем η_ε так, чтобы при $\eta \geqslant \eta_\varepsilon$ выполнялись неравенства

$$\left| \frac{1}{\eta} e^{-\eta\beta} \frac{\alpha \cos \alpha\eta + \beta \sin \alpha\eta}{\alpha^2 + \beta^2} \right| \leqslant \frac{|\alpha| + b}{\alpha^2} \frac{1}{\eta} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| \int\limits_\eta^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \sin x}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{dx}{x^2} \right| \leqslant \frac{|\alpha| + b}{\alpha^2} \int\limits_\eta^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $\eta \geqslant \eta_\varepsilon$ получим $\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx\right| < \varepsilon$, что и доказывает равномерную сходимость интеграла $I(\alpha, \beta)$ по параметру β на любом отрезке $[0, b]$. Теперь в силу теоремы 4 п. 54.3

$$I(\alpha) = I(\alpha, 0) = \lim_{\beta \to +0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\beta \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha;$$

итак

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } \alpha > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0, \\ -\pi/2, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Следует обратить внимание на то, что дифференцирование по α в (54.33) привело бы к расходящемуся интегралу $\int\limits_0^{\infty} \cos \alpha x \, dx$. Оно стало возможным, в $I(\alpha, \beta)$, благодаря наличию множителя $e^{-\beta x}$, $\beta > 0$, называемого «множителем сходимости». Вычисление интеграла вида $\int\limits_0^{\infty} f(x)\, dx$ путем перехода к $\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta x} f(x)\, dx$, дифференцирования по β, нахождения полученного интеграла и перехода к пределу при $\beta \to 0$ называется «методом введения множителя сходимости».

Знание значения $I(\alpha)$ позволяет легко находить и значение многих подобных интегралов. Например, легко можно показать (и это мы используем в дальнейшем), что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = |\alpha| \pi. \tag{54.34}$$

Действительно, интегрируя по частям, найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = \alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = 2\alpha \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = |\alpha| \pi.$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

10. $\int\limits_0^{a} \frac{\ln(1 + ax)}{1 + x^2} dx \quad (a > 0).$

11. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx \quad (|a| < 1).$

12. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1 + b^2 x^2)} dx.$

13. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax + \cos bx - 2}{x^2} dx \; (a, \ b \neq 0).$

14. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin^2 bx}{x^2} dx.$

54.5. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим интегралы

$$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{54.35}$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx, \tag{54.36}$$

называемые *эйлеровыми интегралами* соответственно *первого* и *второго рода*. Интеграл (54.35) называется также *бета-функцией*, а (54.36) — *гамма-функцией*.

Выясним прежде всего, для каких значений параметров p, q и s имеют смысл правые части формул (54.35) и (54.36). Рассмотрим сначала интеграл (54.35). Подынтегральная функция имеет, вообще говоря, две особенности: при $x=0$ и при $x=1$, поэтому представим его в виде

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx+\int_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Сравнивая первый интеграл в правой части с интегралом $\int\limits_0^{1/2} x^{p-1}dx$, а второй — с $\int\limits_{1/2}^{1}(1-x)^{q-1}\,dx$, которые сходятся соответственно при $p>0$ и $q>0$ и соответственно расходятся при выполнении неравенств $p\leqslant 0$ и $q\leqslant 0$ (см. п. 33.3), получаем, что областью определения бета-функции (54.35) в плоскости p, q является прямой угол $p>0$, $q>0$.

Далее, интеграл $\mathrm{B}(p,\ q)$ равномерно сходится в каждом прямом угле $p\geqslant p_0$, $q\geqslant q_0$, каковы бы ни были $p_0>0$ и $q_0>0$. Действительно, это следует, согласно признаку Вейерштрасса (см. п. 54.1), из неравенства

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

и доказанной выше сходимости интеграла

$$\mathrm{B}(p_0,\ q_0)=\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\,dx,\quad p_0>0,\ q_0>0.$$

Поскольку всякая точка $(p,\ q)$, $p>0$, $q>0$, принадлежит некоторому углу; $p>p_0$, $q>q_0$, при соответствующем выборе чисел $p_0>0$ и $q_0>0$, то в силу теоремы 5 п. 54.3 функция $\mathrm{B}(p,\ q)$ непрерывна во всей своей области определения.

Для отыскания области определения гамма-функции (54.36) представим ее в виде

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx. \qquad (54.37)$$

Сравнивая первое слагаемое в правой части с интегралом $\int_0^1 x^{s-1}dx$, который сходится при $s>0$ и расходится при $s\leqslant 0$, получим, что $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ сходится и расходится при тех же значениях параметра s. Что же касается второго интеграла в правой части равенства (54.37), то он сходится при всех значениях s. Это, например, следует из справедливости при любом s равенства $x^{s-1}e^{-x}=o(e^{-x/2})$ для $x\to+\infty$ и из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} e^{-x/2}dx=2e^{-\frac{1}{2}}$. Таким образом, интеграл (54.36) сходится для всех $s>0$ и расходится при $s\leqslant 0$.

Покажем теперь, что интеграл (54.36) равномерно сходится на всяком отрезке $[s_1, s_2]$, где $0<s_1<s_2<+\infty$. Действительно, пусть $s_1\leqslant s\leqslant s_2$; тогда если $0\leqslant x\leqslant 1$, то

$$x^{s-1}e^{-x}\leqslant x^{s_1-1}e^{-x},$$

а если $x\geqslant 1$, то

$$x^{s-1}e^{-x}\leqslant x^{s_2-1}e^{-x}$$

и так как интегралы $\int_0^1 x^{s_1-1}e^{-x}dx$ и $\int_1^{+\infty} x^{s_2-1}e^{-x}dx$ сходятся, то из формулы (54.37) в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов (см. п. 54.1) вытекает равномерная сходимость интеграла $\Gamma(s)$ на отрезке $[s_1, s_2]$. Отсюда в силу теоремы 5 п. 54.3 следует, что функция $\Gamma(s)$ непрерывна во всей своей области определения.

Упражнение 15. Доказать, что функции $B(p, q)$ и $\Gamma(s)$ бесконечно дифференцируемы.

Задача 33. Доказать, что $B(p, q)$ и $\Gamma(s)$ являются аналитическими функциями.

Установим некоторые свойства интегралов $\Gamma(s)$ и $B(p, q)$. Прежде всего из формулы (54.36) непосредственно получаем

$$\Gamma(s)>0 \quad (s>0), \qquad (54.38)$$

в частности, гамма-функция не имеет нулей. Далее, проинтегрировав по частям, получим

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} x^s e^{-x}dx=-x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx=s\Gamma(s). \quad (54.39)$$

Таким образом, если $s>n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, то

$$\Gamma(s)=(s-1)(s-2)\ldots(s-n)\Gamma(s-n). \tag{54.40}$$

При любом $s>0$ можно выбрать целое неотрицательное число n так, чтобы $0<s-n\leqslant 1$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, и тогда $\Gamma(s)$ с помощью формулы (54.40) будет выражаться через значение гамма-функции в некоторой точке промежутка $(0,\ 1]$. Иначе говоря, зная значения гамма-функции на промежутке $(0,\ 1]$, можно найти ее значение в любой точке.

Заметим еще, что $\Gamma(1)=1$, и, следовательно, в силу формулы (54.40)

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

Отсюда видно, что гамма-функция $\Gamma(s+1)$ является продолжением функции $s!$, определенной только для целых $s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ на всю полуось $s>-1$ действительных чисел.

Из свойств бета-функции $B(p,\ q)$ докажем следующие.

1. Для любых $p>0$ и $q>0$

$$B(p,\ q)=B(q,\ p). \tag{54.41}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле (54.35) выполнить замену переменного $t=1-x$.

2. Для любых $p>0$ и $q>1$

$$B(p,\ q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,\ q-1). \tag{54.42}$$

Аналогично, в силу симметрии (см. (54.41)), для любых $q>0$ и $p>1$

$$B(p,\ q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,\ q). \tag{54.43}$$

Действительно, проинтегрировав по частям (54.35) и заметив, что $x^p(1-x)^{q-2}=x^{p-1}(1-x)^{q-2}-x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, получим

$$B(p,\ q)=\int_0^1(1-x)^{q-1}d\frac{x^p}{p}=\frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Bigg|_0^1+$$

$$+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx-$$

$$-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{q-1}{p}B(p,\ q-1)-\frac{q-1}{p}B(p,\ q),$$

откуда следует (54.42), а в силу симметрии и (54.43).

3. Для любых $p>0$

$$B(p,\ n)=B(n,\ p)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ (n-1)}{p(p+1)\ \ldots\ (p+n-1)},\quad n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Эта формула получается последовательным применением соотношения (54.42), если только заметить, что $B(p,\ 1)=\int\limits_0^1 x^{p-1}dx=\frac{1}{p}$. Если же и $p=m$ — натуральное число, то $B(m,\ n)=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}$.

Между функциями $B(p,\ q)$ и $\Gamma(s)$ существует связь, которая устанавливается формулой Эйлера

$$B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad p>0,\ q>0. \tag{54.44}$$

Докажем ее, следуя методу Дирихле. Сделаем в формуле (54.36) замену переменного $x=(1+t)\,y$, $t>0$:

$$\frac{\Gamma(s)}{(1+t)^s}=\int\limits_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-(1+t)\,y}\,dy$$

и положим $s=p+q$, $p>0$, $q>0$; тогда

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}=\int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)\,y}\,dy.$$

Помножим обе части этого равенства на t^{p-1} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(p+q)\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt=\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt\int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)\,y}\,dy. \tag{54.45}$$

В интеграле, стоящем в левой части этого равенства, выполним замену переменного $t=\frac{x}{1-x}$:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=B(p,\ q). \tag{54.46}$$

Для вычисления правой части равенства заметим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt\int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)\,y}\,dy=$$

$$=\lim_{\xi\to+0}\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt\int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)\,y}\,dy. \tag{54.47}$$

Действительно, обозначая $\Phi(t, \xi) = \int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy$, из оценки

$$0 \leqslant \Phi(t, 0) - \Phi(t, \xi) \leqslant \int\limits_0^{\xi} y^{p+q-1}e^{-y}\,dy,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t, \xi)\,dt \leqslant \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t, 0)\,dt$$

заключаем, что при $\xi \to +0$ функция $\Phi(t, \xi)$ стремится к $\Phi(t, 0)$ равномерно относительно $t \in (0, +\infty)$ и что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t, \xi)\,dt$ равномерно сходится относительно ξ, ибо сходится интеграл (54.45). Следовательно, в правой части (54.47) можно перейти к пределу под знаком внешнего интеграла. Далее,

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt \int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy =$$
$$= \int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\,dy \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-ty}\,dt, \quad \xi > 0, \ p \geqslant 1, \ q \geqslant 1. \tag{54.48}$$

Перестановка порядка интегрирования здесь возможна в силу того, что, во-первых, интеграл $t^{p-1}\int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy$ равномерно сходится по t на любом отрезке $[0, a]$, что следует из равномерной оценки подынтегральной функции

$$t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y} \leqslant a^{p-1}y^{p+q-1}e^{-y}, \quad 0 \leqslant t \leqslant a,$$

и сходимости интеграла $\int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\,dy$, во-вторых, интеграл

$$y^{p+q-1}e^{-y}\int\limits_0^{\infty} t^{p-1}e^{-ty}\,dt$$

равномерно сходится по y на любом отрезке $[\xi, b]$, $\xi > 0$, что следует из равномерной оценки подынтегральной функции

$$y^{p+q-1}e^{-y}t^{p-1}e^{-ty} \leqslant b^{p+q-1}t^{p-1}e^{-\xi t}$$

и сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-\xi t}\,dt$; в-третьих, интеграл, стоящий в правой части равенства (54.48), существует. Таким образом, законность перестановки порядка интегрирования в (54.48) следует из теоремы 7 п. 54.3 (отметим, что здесь подынтегральная функция неотрицательна).

Выполнив замену переменного $ty = u$, получим

$$\int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\,dy \int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(p) \int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}\,dy. \quad (54.49)$$

Наконец,

$$\lim_{\xi \to +0} \int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}\,dy = \Gamma(q). \quad (54.50)$$

Из (54.45) – (54.50) получаем формулу (54.44) для $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$. Если теперь $p > 0$ и $q > 0$, то, по доказанному,

$$B(p+1,\ q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Применяя соотношения (54.39), (54.42) и (54.43), получим формулу (54.44) в предположении $p > 0$, $q > 0$. □

54.6. КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Мы будем в дальнейшем систематически рассматривать комплекснозначные функции $w(t) = u(t) + iv(t)$ действительного аргумента t (функции $u(t)$ и $v(t)$ принимают действительные значения). Мы уже встречались с понятием предела и непрерывности подобных функций. Производная функции $w(t)$ определяется по формуле

$$w'(t) \overset{\text{def}}{=} u'(t) + iv'(t).$$

Покажем, например, что, согласно этому правилу, $(e^{i\alpha t})' = i\alpha e^{i\alpha t}$. Действительно,

$$(e^{i\alpha t})' = (\cos\alpha t + i\sin\alpha t)' = -\alpha\sin\alpha t + i\alpha\cos\alpha t = i\alpha(\cos\alpha t + i\sin\alpha t) = i\alpha e^{i\alpha t}.$$

Аналогично определяется и интеграл (собственный или несобственный) от функции $w = u + iv$:

$$\int\limits_a^b w(t)\,dt = \int\limits_a^b u(t)\,dt + i\int\limits_a^b v(t)\,dt, \qquad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty.$$

Интеграл $\int\limits_a^b (u(x) + iv(x))\,dx$ называется *несобственным*, если несобственен хотя бы один из интегралов $\int\limits_a^b u(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b v(x)\,dx$. При этом несобственный интеграл $\int\limits_a^b (u(x) + iv(x))\,dx$ называется *сходящимся*, если сходятся как $\int_a^b u(x)\,dx$, так и $\int_a^b v(x)\,dx$. В этом случае

$$\int_a^b (u(x)+iv(x))\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx.$$

При этом функция w называется *абсолютно интегрируемой*, если абсолютно интегрируемы функции u и v.

Очевидно, что ряд свойств интегралов от действительных функций (линейность интеграла, аддитивность его по множествам и т. п.) автоматически переносится и на комплекснозначные функции. Отметим, например, что если $w(x)=u(x)+iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — интегрируемые, по Риману, на отрезке $[a, b]$ действительные функции, то интеграл $\int_a^b w(x)\,dx$ также является пределом интегральных сумм $\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} w(\xi_i)\,\Delta x_i$ ($\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, k$). Отсюда, как и для действительных функций, следует, что в этом случае функция $|w(x)|$ также интегрируема по Риману и что выполняется неравенство

$$\left|\int_a^b w(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |w(x)|\,dx.$$

Предельным переходом справедливость этого неравенства устанавливается и для абсолютно интегрируемых в несобственном смысле комплекснозначных функций.

Вместе с тем в случае функций, принимающих комплексные значения, следует быть осторожным при использовании аналогов теорем, доказанных для действительных функций. Далеко не все утверждения, справедливые для функций действительного аргумента, принимающих только действительные значения, переносятся на комплекснозначные функции. С подобной ситуацией мы уже встречались при изучении вектор-функций (см. п. 15.2 и п. 37.9 *). Например, утверждения, подобные теореме Ролля, а следовательно, и теореме Лагранжа о средних значениях, не имеют места для комплекснозначных функций. Это показывает пример, приведенный в п. 15.2, если его записать в терминах комплексных чисел.

Именно, рассмотрим функцию $f(t)=\cos t + i\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; тогда $f(0)=f(2\pi)=1$, $f'(t)=-\sin t + i\cos t$. Поскольку $|f'(t)| = \sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$, то не существует такой точки $\xi \in [0, 2\pi]$, что $f'(\xi)=0$. Следовательно аналог теоремы Ролля в этом случае не имеет места.

Неверным оказывается и правило Лопиталя, доказательство которого было основано на теоремах о среднем. Подтвердим это примером *).

Пусть $f(t)=t$, $g(t)=t+t^2e^{\frac{i}{t^2}}$, $0<t<1$. Поскольку согласно формуле Эйлера $e^{i/t^2}=\cos\frac{1}{t^2}+i\sin\frac{1}{t^2}$, то

$$|e^{i/t^2}|=\sqrt{\cos^2\frac{1}{t^2}+\sin^2\frac{1}{t^2}}=1.$$

Поэтому $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=\lim\limits_{t\to 0}g(t)=0$ и

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to 0}(1+te^{i/t^2})=1. \tag{54.51}$$

Заметив, что

$$g'(t)=1+\left(2t-\frac{2i}{t}\right)e^{i/t^2},\quad 0<t<1,$$

получим

$$|g'(t)|\geqslant\left|\frac{2i}{t}-2t\right|-1\geqslant\frac{2}{t}-2t-1\geqslant\frac{2}{t}-1=\frac{2-t}{t}.$$

Следовательно $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)}\right|=\frac{1}{|g'(t)|}\leqslant\frac{t}{2-t}$, вследствие чего

$$\lim_{t\to 0}\frac{f'(t)}{g'(t)}=0. \tag{54.52}$$

Сравнивая (54.51) и (54.52) убеждаемся, что в данном случае правило Лопиталя не применимо.

54.7*. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГАММА-ФУНКЦИИ

Покажем, что асимптотическое поведение гамма-функции

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^s\,dx,\quad s>-1, \tag{54.53}$$

при больших значениях независимой переменной s может быть описано довольно простой формулой, содержащей только элементарные функции.

Подынтегральная функция в интеграле (54.53) принимает, как легко видеть, наибольшее значение при $x=s$. Выполним в этом интеграле замену переменной интегрирования, перенеся точку $x=s$ в новое начало координат: $x=s+y$, а затем произведя преобразование подобия с коэффициентом, равным s: $y=st$, т. е.

*) Этот пример заимствован из книги У. Рудина «Основы математического анализа». М., 1966.

положим $x=s(1+t)$. Получим

$$\Gamma(s+1)=e^{-s}s^{s+1}\int_{-1}^{+\infty}[e^{-t}(1+t)]^s\,dt. \tag{54.54}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)\overset{\text{def}}{=}e^{-t}(1+t), \quad -\infty<t<+\infty, \tag{54.55}$$

Поскольку $\varphi'(t)=-te^{-t}$, то при $t>0$ функция φ убывает, при $t<0$ — возрастает, а в точке $t=0$ достигает наибольшего значения $\varphi(0)=1$. Далее, положив

$$h(t)\overset{\text{def}}{=}-t+\ln(1+t), \quad -1<t<-\infty, \tag{54.56}$$

получим

$$\varphi(t)=e^{h(t)}, \quad -1<t<+\infty, \tag{54.57}$$

где при $|t|<1$

$$h(t)=-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots,$$

и поэтому

$$h(t)=-\frac{t^2}{2}+o(t^2), \quad t\to 0. \tag{54.58}$$

Итак, гамма-функция представима в виде (см. (54.54), (54.55) и (54.57))

$$\Gamma(s+1)=e^{-s}s^{s+1}\int_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}\,dt, \tag{54.59}$$

где поведение функции $h(t)$ при $t\to 0$ описывается соотношением (54.58).

Прежде чем переходить к выводу асимптотической формулы для $\Gamma(s+1)$ при $s\to+\infty$, поясним метод ее получения с помощью нестрогих, но правдоподобных рассуждений. График функции $\varphi(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 217. При возрастании параметра s график функции $[\varphi(t)]^s$ будет «прижиматься» к оси переменной t и к единичному отрезку оси ординат. Поэтому ясно, что интеграл

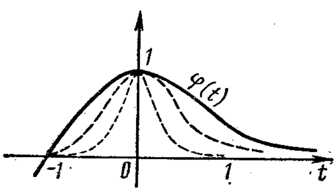

Рис. 217

$$\int_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}\,dt, \tag{54.60}$$

стоящий в правой части формулы (54.59) при больших значениях s будет хорошо приближаться интегралом

$$\int_{-\delta}^{\delta}e^{sh(t)}\,dt, \tag{54.61}$$

где $\delta > 0$ произвольно, но фиксировано, причем с тем большей точностью, чем больше значение параметра s. Иными словами, если s достаточно велико, то как при $-1 < t < -\delta$, так и при $t > \delta$ значения функции $e^{sh(t)}$ столь малы, что каждым из интегралов $\int\limits_{-1}^{-\delta} e^{sh(t)}\,dt$ и $\int\limits_{\delta}^{\infty} e^{sh(t)}\,dt$ можно с высокой точностью пренебречь. Естественно ожидать, что при фиксированном $\delta > 0$ и относительная погрешность приближения интеграла (54.60) с помощью интегралов вида (54.61) может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно большого значения параметра s.

В силу (54.58), взяв достаточно малое $\delta > 0$, можно интеграл (54.61) хорошо приблизить интегралом

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{st^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{2}{s}} \int\limits_{-\delta\sqrt{\frac{s}{2}}}^{\delta\sqrt{\frac{s}{2}}} e^{-u^2}\,du. \tag{54.62}$$

Если $\delta > 0$, то правая часть этого равенства при $s \to +\infty$ стремится к интегралу Пуассона (см. п. 48.2)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}. \tag{54.63}$$

В результате интеграл (54.60) при больших значениях s оказывается в каком-то смысле хорошо приближенным выражением $\sqrt{2\pi/s}$ (см. (54.62) и (54.63)). Поэтому естественно попытаться доказать асимптотическое равенство

$$\int\limits_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}\,dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}}, \quad s \to +\infty.$$

Покажем, что оно действительно имеет место. Зададим произвольно ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. В силу (54.58) существует такое δ, $0 < \delta < 1$, что для всех $t \in [-\delta, \delta]$ выполняется неравенство

$$\left| h(t) + \frac{t^2}{2} \right| < \varepsilon t^2,$$

т. е.

$$-\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) t^2 < h(t) < -\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) t^2.$$

Следовательно (в силу монотонности функции e^x), при всех $s>0$ имеет место неравенство

$$e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}<e^{sh(t)}<e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}.$$

Интегрируя его по отрезку $[-\delta,\ \delta]$, получим

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} e^{sh(t)}\,dt\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}dt. \qquad (54.64)$$

Оценим теперь, насколько интеграл (54.61), стоящий в середине этого неравенства, отличается от интересующего нас интеграла (54.60). Вспоминая, что функция $\varphi(t)=e^{sh(t)}=e^{-t}(1+t)$ (см. (54.55) и (54.57)) возрастает на промежутке $[-1,\ -\delta]$ и убывает на $[\delta,\ +\infty)$, получим для всех $s>1$:

$$0<\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}\,dt-\int_{-\delta}^{\delta} e^{sh(t)}\,dt=$$

$$=\int_{-1}^{-\delta} e^{(s-1)h(t)}e^{h(t)}\,dt+\int_{\delta}^{+\infty} e^{(s-1)h(t)}e^{h(t)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant e^{(s-1)h(-\delta)}\int_{-1}^{-\delta} e^{h(t)}\,dt+e^{(s-1)h(\delta)}\int_{\delta}^{+\infty} e^{h(t)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant[e^{(s-1)h(-\delta)}+e^{(s-1)h(\delta)}]\int_{-1}^{+\infty} e^{h(t)}\,dt\leqslant C_1e^{-\alpha_1 s}, \qquad (54.65)$$

где $\alpha_1=-\max\{h(-\delta),\ h(\delta)\}>0$,

$$C_1=(e^{-h(-\delta)}+e^{-h(\delta)})\int_{-1}^{+\infty} e^{h(t)}\,dt<+\infty.$$

Отметим, что функция $h(t)$ (см. (54.56)) достигает строгого максимума в точке $t=0$, причем $h(0)=0$; поэтому $h(-\delta)<0$ и $h(\delta)<0$.

Подобным образом оцениваются и крайние интегралы в неравенстве (54.64). Выполнив замену переменной интегрирования $u=t\sqrt{\frac{(1+2\varepsilon)s}{2}}$, получим (см. (54.63))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{2}{(1+2\varepsilon)s}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du=\sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}}.$$

Теперь, аналогично (54.65), будем иметь

$$0<\sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}}-\int_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt-\int_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{-\delta}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)t^2}{2}}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt+$$
$$+\int_{\delta}^{+\infty}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)t^2}{2}}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt\leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\left(\int_{-\infty}^{-\delta}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt+\int_{\delta}^{+\infty}e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt\right)=$$
$$=e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{1+2\varepsilon}}\left(\int_{-\infty}^{-\delta\sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{2}}}e^{-u^2}du+\int_{\delta\sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{2}}}^{+\infty}e^{-u^2}du\right)\leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{1+2\varepsilon}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du\leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\sqrt{2\pi}\leqslant C_2e^{-\alpha_2 s}, \qquad (54.66)$$

где $\alpha_2=\frac{(1+2\varepsilon)\delta^2}{2}>0$, $C_2=e^{\frac{(1+2\varepsilon)\delta^2}{2}}\sqrt{2\pi}$.

Тем же методом получается и оценка

$$0<\sqrt{\frac{2}{(1-2\varepsilon)s}}-\int_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}dt\leqslant C_3e^{-\alpha_3 s}, \qquad (54.67)$$

где $\alpha_3=\frac{(1-2\varepsilon)\delta^2}{2}>0$, $C_3=e^{\frac{(1-2\varepsilon)\delta^2}{2}}\sqrt{2\pi}$.

Положив $\alpha=\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и подставив (54.65), (54.66) и (54.67) в (54.64), получим при соответствующих постоянных $C_4>0$ и $C_5>0$ (зависящих от ε)

$$\sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}}+C_4e^{-\alpha s}\leqslant\int_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}dt\leqslant\sqrt{\frac{2\pi}{(1-2\varepsilon)s}}+C_5e^{-\alpha s}.$$

Поделим полученное неравенство на $\sqrt{2\pi/s}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon}}+C_4e^{-\alpha s}\sqrt{\frac{s}{2\pi}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}}\int\limits_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}}+C_5e^{-\alpha s}\sqrt{\frac{s}{2\pi}}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon}}\leqslant\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}}\int\limits_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}\,dt\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}}.$$

Устремив здесь ε к нулю, получим

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}}\int\limits_{-1}^{+\infty}e^{sh(t)}\,dt=1,$$

или, что то же, искомое асимптотическое равенство

$$\int\limits_{-1}^{+\infty}[e^{-t}(1+t)]^s\,dt\sim\sqrt{\frac{2\pi}{s}},\quad s\to+\infty.$$

Умножив обе его части на $e^{-s}s^{s+1}$, в силу (54.54), получим асимптотическую формулу

$$\Gamma(s+1)\sim\sqrt{2\pi}\,e^{-s}s^{s+\frac{1}{2}},\quad s\to+\infty,\tag{54.68}$$

называемую *формулой Стирлинга для гамма-функции.* Эта формула является, очевидно, обобщением формулы Стирлинга для факториала натуральных чисел (см. п. 37.8), которая получается из (54.68), если положить $s=n$, ибо $\Gamma(n+1)=n!$ (см. п. 54.5).

54.8*. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

В п. 37.10* изучались разложения функций в асимптотические степенные ряды при $x\to+\infty$. Напомним, что ряд

$$a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\ldots$$

называется *асимптотическим разложением функции* f при $x\to+\infty$, если его частичные суммы

$$S_n(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}$$

удовлетворяют условию

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty.$$

Понятие асимптотического разложения функции естественным образом обобщается на ряды по системам функций, образующих так называемые *асимптотические последовательности.*

Определение 3. *Последовательность функций* $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *определенных в некоторой проколотой окрестности точки* a *(конечной или бесконечно удаленной), называется асимптотической последовательностью при* $x \to a$, *если для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *имеет место соотношение*

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a. \tag{54.69}$$

Примерами асимптотических последовательностей при $x \to a$ являются $\varphi_n(x) = (x-a)^n$, если a — конечная точка и $\varphi_n(x) = x^{-n}$, если $a = +\infty$ или $a = -\infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Определение 4. *Пусть* $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *является асимптотической последовательностью при* $x \to a$. *Ряд*

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{54.70}$$

называется асимптотическим рядом (или асимптотическим разложением) при $x \to a$ *заданной функции* f, *определенной в некоторой проколотой окрестности точки* a, *если его частичные суммы*

$$S_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) \tag{54.71}$$

удовлетворяет условию: для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$f(x) - S_n(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a. \tag{54.72}$$

Лемма 2. *Пусть* $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — *асимптотическая при* $x \to a$ *последовательность. Для того чтобы ряд* (54.70) *являлся асимптотическим разложением функции* f *при* $x \to a$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) - S_n(x) = O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \to a, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{54.73}$$

Иначе говоря, ряд (54.70) является асимптотическим разложением функции f при $x \to a$ тогда и только тогда, когда его частичная сумма $S_n(x)$ служит приближенным значением функции $f(x)$ с точностью до $O(\varphi_{n+1}(x))$ при $x \to a$, т. е. ошибка имеет порядок первого отбрасываемого члена.

Доказательство необходимости условия (54.73). Соотношение (54.72) при $n = 1, 2, \ldots$ можно переписать в виде

$$f(x) - S_{n-1}(x) - a_n\varphi_n(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a,$$

откуда

$$f(x)-S_{n-1}(x)=a_n\varphi_n(x)+o(\varphi_n(x))=O(\varphi_n(x)),\quad x\to a,\quad n=1,\ 2\ \ldots,$$

т. е. выполняется условие (54.73). $\square$

Доказательство достаточности условия (54.73). В силу (54.73) и (54.69) имеем

$$f(x)-S_n(x)=O(\varphi_{n+1}(x))=O(o(\varphi_n(x)))=o(\varphi_n(x)),\quad x\to a,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

что совпадает с (54.72). $\square$

Любопытно отметить, что если для любого $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ выполняется условие

$$f(x)-S_n(x)=O(\varphi_n(x)),\quad x\to a, \tag{54.74}$$

более слабое, чем (54.72), то из него в силу (54.69) следует (54.72). Иначе говоря, выполнение условия (54.74) для всех $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ означает, что ряд (54.70) является асимптотическим разложением функции f при $x\to a$. Действительно из (54.74) для $n=1,\ 2,\ \ldots$ имеем

$$f(x)-S_{n-1}(x)=a_n\varphi_n(x)+O(\varphi_n(x))=O(\varphi_n(x))=$$
$$=O(o(\varphi_{n-1}(x)))=o(\varphi_{n-1}(x)),\quad x\to a,$$

т. е. условие (54.72).

Если асимптотическая последовательность $\varphi_n(x)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots,$ такова, что существует проколотая окрестность точки a, в которой при всех $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ имеет место неравенство $\varphi_n(x)\neq 0$, то аналогично случаю степенных асимптотических рядов функций получаем:

если функция f раскладывается при $x\to a$ в асимптотический ряд (54.70), *то такое разложение единственно и его коэффициенты последовательно определяются по формулам*

$$a_0=\lim_{x\to a}f(x),\quad a_n=\lim_{x\to a}\frac{1}{\varphi_n(x)}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}a_k\varphi_k(x)\right].$$

Однако для практического нахождения асимптотических разложений заданных функций эта формула оказывается не всегда удобной. Часто проще получить нужное разложение другим путем, например, в случае интегралов при помощи интегрирования по частям. При этом, обычно, заранее не задаются асимптотической последовательностью $\{\varphi_n(x)\}$, а строят ее, исходя из свойств данной функции в окрестности точки a.

Пример. Разложим в асимптотический ряд при $x\to+\infty$ функцию

$$F(x,\ \alpha)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha}}\,dt,\quad x>0, \tag{54.75}$$

($\alpha > 0$ — параметр), подобрав соответствующую асимптотическую последовательность. Поскольку

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt + i \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt,$$

то по признаку Дирихле (см. п. 33.6) мнимая и действительная части функции $F(x, \alpha)$ представляют собой, при $x > 0$, сходящиеся интегралы. Поэтому сходится и интеграл (54.75). Отметим, что действительной и мнимой частью интеграла $\frac{1}{2} F\left(x^2, \frac{1}{2}\right)$ являются неполные интегралы Френеля (см. § 34)

$$\int_x^{+\infty} \cos \theta^2 \, d\theta, \quad \int_x^{+\infty} \sin \theta^2 \, d\theta.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле $\frac{1}{2} F\left(x^2, \frac{1}{2}\right)$ сделать замену переменной интегрирования $t = \theta^2$.

Интегрируя по частям (54.75), получим

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha F(x, \alpha+1).$$

Применяя последовательно эту формулу к значениям функции F, получающимся в правой части, будем иметь

$$F(x, \alpha) = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha F(x, \alpha+1) =$$
$$= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha \left[\frac{ie^{ix}}{x^{\alpha+1}} - i(\alpha+1) F(x, \alpha+2)\right] =$$
$$= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - \frac{\alpha i^2 e^{ix}}{x^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1) i^3 e^{ix}}{x^{\alpha+2}} + \ldots + \frac{(-1)^n \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) i^{n+1} e^{ix}}{x^{\alpha+n}} +$$
$$+ (-i)^{n+1} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n) F(x, \alpha+n+1) =$$
$$= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{(ix)^k} + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{i^{n+1}} F(x, \alpha+n+1). \tag{54.76}$$

Ряд

$$\frac{ie^{ix}}{x^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(ix)^n} \tag{54.77}$$

является асимптотическим разложением функции $F(x, \alpha)$ при $x \to +\infty$.

Действительно, последовательность функций $\varphi_n(x) = e^{ix} x^{-n-\alpha}$, $n = 0, 1, \ldots$, является, как легко проверить, асимптотической, а для частичных сумм $S_n(x, \alpha)$ ряда (54.77) в силу (54.76) имеем:

$$|F(x, \alpha) - S_n(x, \alpha)| = \left|\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{i^{n+1}} F(x, \alpha+n+1)\right| =$$

$$= \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\left|\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+n+1}}\,dt\right| \leqslant \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\int\limits_x^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+n+1}} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{x^{\alpha+n}} = O\left(\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+n}}\right),\quad x\to\infty,$$

т. е. выполняется условие (54.74), и, следовательно, ряд (54.77) действительно является асимптотическим разложением функции $F(x, \alpha)$ при $x\to+\infty$.

54.9.* АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НЕПОЛНОЙ ГАММА-ФУНКЦИИ

При любом $x>0$ для гамма-функции $\Gamma(s)$ имеем

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt = \int\limits_0^x t^{s-1}e^{-t}\,dt + \int\limits_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

Функция

$$\Gamma(s, x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt,\quad x>0, \tag{54.78}$$

называется неполной гамма-функцией. Она определена при всех действительных значениях параметра s. Найдем ее асимптотическое разложение при $x\to+\infty$. Выполняя в правой части (54.78) интегрирование по частям, получим

$$\Gamma(s, x) = \int\limits_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt =$$

$$= x^{s-1}e^{-t} + (s-1)\int\limits_x^{+\infty} t^{s-2}e^{-t}\,dt = x^{s-1}e^{-t} + (s-1)\Gamma(s-1, x).$$

Применяя последовательно эту формулу к значениям неполной гамма-функции, получающимся в правой части, будем иметь:

$$\Gamma(s, x) = x^{s-1}e^{-x} + (s-1)x^{s-2}e^{-x} + \dots + (s-1)(s-2)\dots$$

$$\dots(s-n+1)x^{s-n}e^{-x} + (s-1)(s-2)\dots(s-n)\Gamma(s-n, x) =$$

$$= e^{-x}x^s\sum_{k=0}^{n}\frac{(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{x^k} +$$

$$+ (s-1)(s-2)\dots(s-n)\Gamma(s-n, x).$$

Отсюда при $n > s-1$ имеем

$$\left|\Gamma(s, x) - e^{-x}x^s \sum_{k=0}^{n} \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{x^k}\right| =$$
$$= |(s-1)(s-2)\ldots(s-n)\Gamma(s-n, x)| \leqslant$$
$$\leqslant |(s-1)\ldots(s-n)| \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n-s+1}}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant |(s-1)(s-2)\ldots(s-n)| \frac{1}{x^{n-s-1}} \int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt =$$
$$= |(s-1)\ldots(s-n)| \frac{e^{-x}}{x^{n-s-1}} = O\left(\frac{e^{-x}}{x^{n-s-1}}\right), \quad x \to +\infty$$

т. е. для частичных сумм ряда

$$e^{-x}x^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{x^n} \tag{54.79}$$

и для последовательности $\varphi_n(x) = x^{-n+s+1}e^{-x}$, которая является, как это легко проверить, асимптотической, при $x \to +\infty$ выполняется условие (54.73). Таким образом ряд (54.79) является асимптотическим разложением неполной гамма-функции $\Gamma(s, x)$ при $x \to +\infty$.

В п. 54.7* был найден первый член асимптотического разложения гамма-функции $\Gamma(s+1)$ при $s \to +\infty$. Можно найти и следующие члены, т. е. разложить гамма-функцию в асимптотический ряд. Он выглядит следующим образом:

$$\Gamma(s+1) \sim$$
$$\sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-s} s^{s+\frac{1}{2}} \left(1 + 3c_3 \frac{2!}{1!\,2^2} \frac{2}{s} + 5c_5 \frac{4!}{2!\,2^4} \left(\frac{2}{s}\right)^2 + \ldots\right),$$
$$s \to +\infty. \tag{54.80}$$

Здесь $\{c_k\}$ — последовательность коэффициентов разложения в степенной ряд (в окрестности нуля) функции $t = t(z)$, определяемой равенством $\frac{1}{2}z^2 = -h(t)$, где $h(t)$ задана формулой (54.56).

Можно получить и асимптотическое разложение для натурального логарифма гамма-функции. Оно имеет вид

$$\ln\Gamma(s) \sim \left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s - s + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)s^{2n-1}},$$
$$s \to +\infty \tag{54.81}$$

и называется *рядом Стирлинга*. Здесь B_{2n} — так называемые *числа Бернулли*, определяемые равенством

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} C_{n+1}^j B_j m^{n+1-j}$$

(все нечетные числа Бернулли, кроме $B_1 = -\frac{1}{2}$, равны нулю).

Из формулы (54.81) с помощью потенцирования можно найти асимптотическое разложение для гамма-функции, в котором коэффициенты выражены в явном виде. Оно имеет вид

$$\Gamma(s) \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-s} s^{s-\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} - \frac{139}{51840s^3} + \ldots\right\}, \quad s \to +\infty.$$

Доказательство формул (54.80) и (54.81) не входит в задачу настоящего курса. Описание методов, с помощью которых получаются подобные разложения можно найти в книге М. В. Федорюка «Метод перевала». М., 1977.

54.10. ЗАМЕЧАНИЯ О КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Мы рассмотрели выше «одномерные» интегралы, зависящие от параметра, т. е. случай, когда и переменная интегрирования и параметр являлись числовыми переменными. Эта теория обобщается на случай кратных интегралов, зависящих от «многомерного» параметра, т. е. на интегралы вида

$$F(y) = \int f(x, y)\, dG. \tag{54.82}$$

Здесь функция $f(x, y)$ определена на открытом множестве $G \subset R^n$ и интегрируема, по Риману, на любом открытом измеримом по Жордану множестве Γ, таком, что $\overline{\Gamma} \subset G$. Параметр y пробегает некоторое множество Y, которое может быть, например, подмножеством m-мерного пространства R^m, а интеграл (54.82) понимается, вообще говоря, в несобственном смысле.

Интеграл (54.82) называется *сходящимся*, если при каждом фиксированном $y_0 \in Y$ интеграл

$$\int f(x, y_0)\, dG$$

сходится. В случае $n \geqslant 2$ это, как известно (см. п. 48.3), эквивалентно условию сходимости интеграла

$$\int |f(x, y_0)|\, dG.$$

Сходящемуся интегралу (54.82) (и любой последовательности открытых измеримых по Жордану множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G) естественным образом сопоставляется ряд, суммой которого он является:

$$\int f(x, y)\,dG = \int f(x, y)\,dG_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int f(x, y)\,d(G_{k+1} \setminus \bar{G}_k). \quad (54.83)$$

Подобно одномерному случаю определяется и равномерно сходящийся интеграл.

Определение 5. *Сходящийся интеграл* (54.82) *называется равномерно сходящимся, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой компакт* $A \subset G$, *что для каждого открытого измеримого по Жордану множества* Γ, *для которого* $A \subset \Gamma \subset \bar{\Gamma} \subset G$, *выполняется неравенство*

$$\int \left| f(x, y)\,d(G \setminus \bar{\Gamma}) \right| < \varepsilon.$$

Это определение равносильно следующему:

Определение 5′. *Сходящийся интеграл* (54.82) *называется равномерно сходящимся, если, какова бы ни была монотонно исчерпывающая открытое множество* G *последовательность открытых измеримых по Жордану множеств* G_k, $k = 1, 2, \ldots$, *и каково бы ни было число* $\varepsilon > 0$, *существует номер* k_ε, *зависящий от данной последовательности и числа* ε, *такой, что для каждого номера* $k \geq k_\varepsilon$ *и всех* $y \in Y$ *справедливо неравенство*

$$\left| \int f(x, y)\,d(G \setminus \bar{G}_k) \right| < \varepsilon.$$

Если интеграл (54.82) равномерно сходится на множестве G относительно параметра $y \in Y$, то ряд (54.83) также равномерно сходится на G.

Для кратных интегралов, зависящих от параметра, остаются в силе теоремы об их непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости, аналогичные доказанным выше. В этом легко убедиться, и мы не будем на этом подробно останавливаться.

Встречаются интегралы, зависящие от параметра и более сложным образом: в них не только подынтегральная функция f, но и множество G, по которому происходит интегрирование, зависит от параметра, т. е. $G = G(y)$:

$$F(y) = \int f(x, y)\,dG(y). \quad (54.84)$$

Примером такого интеграла в одномерном случае является интеграл

$$F(y) = \int_a^b \frac{dx}{|x-y|^\alpha}, \quad a \leq y \leq b.$$

Здесь $G(y)$ состоит из двух (кроме случая $y = a$ и $y = b$) интервалов (a, y) и (y, b), меняющихся с изменением параметра y.

Рассмотрим аналогичный пример в n-мерном пространстве. Пусть G — открытое множество в R^n, функция $\mu=\mu(x)$ непрерывна в G, $\rho=\rho(x, y)$ — расстояние между точками x и y, $x \in G$, $y \in R^n$ и α — некоторое число. Интегралы вида

$$u(y)=\int \frac{\mu(x)\,dG}{\rho^\alpha} \tag{54.85}$$

называются *потенциалами* и относятся к типу (54.84), так как в них множеством, по которому производится интегрирование, является множество $G \setminus \{y\}$, зависящее от y (в формуле (54.85), мы обозначили, как это делается обычно, область интегрирования просто через G). Если $\alpha=1$ и $n=3$, то функция (54.85) называется *ньютоновым потенциалом*.

Задача 34. Доказать, что если G — измеримое по Жордану открытое множество и функция $\mu=\mu(x)$ непрерывна на его замыкании $\bar{G}$, то интеграл (54.85) при $\alpha<n$ непрерывен во всем пространстве.