или, объединив обе формулы и добавив случай $n=0$,

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx,\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{55.72}$$

Подставив (55.72) в (55.71), получим

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt. \tag{55.73}$$

Итак, мы записали ряд Фурье в комплексной форме и нашли соответствующие выражения для его коэффициентов.

Требует разъяснения лишь понятие сходимости ряда вида (55.73).

Частичной суммой порядка n ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \tag{55.74}$$

называется сумма $S_n=\sum\limits_{k=-n}^{n} z_k$. Ряд (55.74) называется сходящимся, если существует $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, при этом S называется суммой ряда и пишется

$$S=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n.$$

§ 56. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

56.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Пусть функция f абсолютно интегрируема на всей действительной оси. Напишем для нее интеграл, соответствующий в определенном смысле ряду Фурье, в котором суммирование по индексу n заменено интегрированием по некоторому параметру:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy+b(y)\sin xy]\,dy, \tag{56.1}$$

где

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \tag{56.2}$$

$$b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt. \tag{56.3}$$

Формулы (56.2) и (56.3) напоминают формулы для коэффициентов Фурье.

Определение 1. *Интеграл* (56.1) *называется интегралом Фурье* функции f.

Подставляя (56.2) и (56.3) в интеграл (56.1), преобразуем его следующим образом:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ty\cos xy + \sin ty\sin xy)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \quad (56.4)$$

Подобно тому, как сумма ряда Фурье функции при определенных условиях равна самой функции, интеграл Фурье также представляет исходную функцию.

Теорема 1. *Пусть*

1) *функция f кусочно-непрерывна на каждом конечном отрезке и абсолютно интегрируема на всей действительной прямой;*

2) *в точке x существуют производная справа $f'_+(x)$ и производная слева $f'_-(x)$. Тогда для указанной точки x справедлива формула*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \quad (56.5)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \quad (56.6)$$

где $\eta > 0$, а x — фиксированная точка, в которой существуют односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$.

Очевидно, что интеграл Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt \quad (56.7)$$

является пределом функции (56.6) при $\eta \to +\infty$, т. е. $S(\eta)$ является в этом смысле аналогом частичных сумм рядов Фурье.

Для каждого числа $\xi > 0$, согласно теореме об интегрировании интегралов, зависящих от параметра (см. п. 53.1), имеем

$$\int_0^\eta dy \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\cos y(x-t)\,dt = \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\,dt \int_0^\eta \cos y(x-t)\,dy =$$
$$= \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\,\frac{\sin \eta(x-t)}{x-t}\,dt. \qquad (56.8)$$

Действительно, в силу кусочной непрерывности функции $f(t)$ прямоугольник $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, можно разбить прямыми, параллельными оси Oy, на конечное число прямоугольников, на каждом из которых функция $f(t)\cos y(x-t)$ будет уже непрерывной, как функция двух переменных, вплоть до границы (если на границе указанных прямоугольников в нужном случае значениями функции f считать ее односторонние пределы, т. е. $f(t+0)$ или $f(t-0)$). Применяя теорему 3 из п. 53.1 к каждому прямоугольнику и суммируя полученные результаты, мы и получим формулу (56.8).

Из очевидного неравенства

$$|f(t)\cos y(x-t)| \leqslant |f(t)|$$

и сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ следует равномерная сходимость на отрезке $[0, \eta]$ относительно параметра y интеграла

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \qquad (56.9)$$

т. е. функция

$$F(y, \xi) = \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\cos y(x-t)\,dt$$

стремится к пределу (56.9) при $\xi \to +\infty$ равномерно на отрезке $[0, \eta]$.

Далее, функция $F(y, \xi)$ непрерывна по y. Действительно, функция f ограничена на отрезке $[-\xi, \xi]$: $|f(t)| \leqslant M$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Обозначим через $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции $\cos y(x-t)$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Тогда $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, поэтому

$$|F(y+\Delta y, \xi) - F(y, \xi)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\xi}^{\xi} |f(t)|\,|\cos(y+\Delta y)(x-t) - \cos y(x-t)|\,dt \leqslant 2M\xi\omega(\Delta y) \to 0$$

при $\Delta y \to 0$.

В силу теоремы 2 п. 53.1 в левой части равенства (56.8) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\xi \to +\infty$.

В результате получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}\,dt.$$

Этот интеграл конечен, ибо (см. (56.6) и (56.9)) он равен $\int_0^\eta F(y)\,dy$, где функция $F(y)$ непрерывна как предел равномерно сходящегося при $\xi\to+\infty$ семейства непрерывных по y функций $F(y,\xi)$.

Интеграл $S(\eta)$ является аналогом интеграла Дирихле для рядов Фурье. Положив $u=t-x$ (ср. (55.17)), получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u+x)\,\frac{\sin\eta u}{u}\,du.$$

Представив получившийся интеграл в виде суммы двух:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}=\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{+\infty}$$

и выполнив в первом из них замену $u=-t$, получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt.$$

Вспоминая (см. п. 54.4), что при $\eta>0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2},$$

получим

$$S(\eta)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt-$$

$$-[f(x+0)+f(x-0)]\,\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin\eta t\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin\eta t\,dt. \qquad (56.10)$$

Рассмотрим, например, первый интеграл, стоящий в правой части этого равенства. Разобьем его на два интеграла:

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}.$$

Поскольку

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = f'_+(x),$$

то $\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$ является кусочно-непрерывной функцией переменной t на отрезке $[0, 1]$, поэтому в силу теоремы 2 из п. 55.2

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_0^1 \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt = 0. \tag{56.11}$$

Функция $\frac{f(x+t)}{t}$ также кусочно-непрерывна на любом отрезке полуоси $t \geqslant 1$ и так как

$$\left| \frac{f(x+t)}{t} \right| \leqslant |f(x+t)|,$$

то

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{f(x+t)}{t} \right| dt \leqslant \int_1^{+\infty} |f(x+t)| \, dt = \int_{x+1}^{+\infty} |f(s)| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)| \, ds < +\infty,$$

т. е. $\frac{f(x+t)}{t}$ абсолютно интегрируема на этой полуоси и, следовательно, в силу той же теоремы

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \eta t \, dt = 0. \tag{56.12}$$

Наконец, из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dt$ (см. п. 33.6), выполняя замену переменного $u = \eta t$, получаем

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt = f(x+0) \lim_{\eta \to +\infty} \int_{\eta}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = 0. \tag{56.13}$$

Из (56.11), (56.12) и (56.13) следует, что

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin\eta t\,dt=0.$$

Отсюда в силу (56.10) получаем

$$\lim_{\eta\to+\infty}S(\eta)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Поскольку предел, стоящий в левой части, равен интегралу Фурье (56.7), то равенство (56.5) доказано. □

Требования, накладываемые на функцию в этой теореме, можно ослабить, потребовав, например, чтобы функция была абсолютно интегрируемой на всей числовой оси и удовлетворяла в каждой точке обобщенному условию Гёльдера. Мы не стали этого делать ради некоторого упрощения доказательства (ср. с доказательством теоремы 4 и ее следствий в п. 55.4).

Упражнение 1. Доказать, что если функция f в дополнение к наложенным на нее в теореме 1 ограничениям является четной или нечетной, то справедливы формулы: для четной функции

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos yx\,dy\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos yt\,dt,$$

для нечетной

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin yx\,dy\int\limits_0^{+\infty}f(t)\sin yt\,dt.$$

56.2. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ЗАПИСИ ФОРМУЛЫ ФУРЬЕ

В дальнейшем для простоты записи будем считать, что функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ и во всех ее точках непрерывна и имеет односторонние производные. В этом случае для всех $x\in\boldsymbol{R}$ согласно теореме 1 справедлива формула Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\,dt,$$

и так как подынтегральная функция четная относительно переменной y, то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\,dt. \tag{56.14}$$

В силу очевидного неравенства

$$|f(t)\sin y(x-t)|\leqslant|f(t)|$$

при ограничениях, наложенных на функцию f, существует также интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)\,dt,$$

причем в силу признака Вейерштрасса (см. п. 54.1) он равномерно сходится на всей числовой оси переменного y и, следовательно, является непрерывной функцией от y. Поэтому для любого числа η существует интеграл

$$\int_{-\eta}^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)\,dt, \tag{56.15}$$

причем в силу нечетности подынтегральной функции относительно переменной y этот интеграл равен нулю. Однако при сделанных предположениях относительно функции f нельзя гарантировать существование несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)\,dt. \tag{56.16}$$

Чтобы получить нужные формулы, нам придется ввести еще одно обобщение понятия интеграла.

56.3. ГЛАВНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛА

Введем следующее определение.

Определение 2. *Пусть функция φ интегрируема на любом конечном отрезке. Если существует конечный предел*

$$\lim_{\eta\to+\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x)\,dx, \qquad \eta>0,$$

то он называется главным значением интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *и обозначается буквами v. p.* *)

$$v.\ p. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta\to+\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x)\,dx. \tag{56.17}$$

Подчеркнем, что отличие этого определения от определения несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ в смысле определения п. 33.1 состоит в том, что там для функции φ, интегрируемой на любом

*) Главное значение — по-французски valeur principale.

конечном отрезке, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ определялся как предел интегралов $\int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx$ при независимом стремлении ξ к $-\infty$ и η к $+\infty$. Здесь же требуется существование лишь предела указанных интегралов $\int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx$ для частного случая, когда $\xi = -\eta$ и $\eta \to +\infty$.

Подобным же образом определяется и главное значение несобственного интеграла в точке: пусть $a < c < b$ и функция φ при любом $\varepsilon > 0$ интегрируема, по Риману, на отрезках $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b]$ (естественно, предполагается также, что $a < c-\varepsilon$ и $c+\varepsilon < b$); тогда главное значение интеграла $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\,dx$ в точке c определяется формулой

$$v.\ p. \int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} \varphi(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\,dx \right].$$

Иногда, там, где это не может привести к недоразумениям, интеграл в смысле главного значения обозначается просто символом интеграла без букв $v.\ p.$

Если для некоторой функции существует несобственный интеграл, то у этой функции существует и главное значение интеграла и оно совпадает с ее несобственным интегралом. Обратное неверно: у функции может существовать (и, следовательно, быть конечным) главное значение интеграла, а несобственный интеграл быть расходящимся.

Например, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ и $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не существуют как несобственные, однако существуют в смысле главного значения, которое в обоих случаях равно нулю.

56.4. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАПИСЬ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Вернемся к формуле Фурье (56.14) и запишем ее, используя понятие главного значения интеграла, в другом виде. В силу нечетности по y подынтегральной функции в интеграле (56.16) имеем, согласно сформулированному определению главного значения интеграла

$$v.\ p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\,dt = 0. \qquad (56.18)$$

Умножив обе части этого равенства на $\frac{i}{2\pi}$ и сложив с интегралом (56.14), получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iy(x-t)}\, dt, \qquad (56.19)$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Формула (56.19) и называется *комплексной записью интеграла Фурье*.

56.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Если положить

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt}\, dt,$$

то формула (56.19) примет вид

$$f(x)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y)\, e^{ixy}\, dy. \qquad (56.20)$$

Определение 3. *Функция Φ, которая ставится в соответствие функции f формулой*

$$\Phi(y)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt}\, dt, \qquad (56.21)$$

называется преобразованием Фурье функции f и обозначается $F[f]$ или $\hat{f}$.

В этом определении $f(t)$, вообще говоря, комплекснозначная функция действительного аргумента. Отметим, что функция $\Phi = F[f]$ может принимать существенно комплексные значения и в том случае, когда функция f принимает только действительные значения.

Преобразование Фурье определено, в частности, для всех абсолютно интегрируемых функций. Употребив, например, для преобразования Фурье функции f обозначение $\hat{f}$, формулу (56.20) можно записать в виде

$$f(x)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{ixy}\, dy. \qquad (56.20')$$

Эта формула позволяет восстановить саму функцию f, если известно ее преобразование Фурье $\hat{f}$. Она называется *формулой обращения*.

Определение 4. *Функция Ψ, которая ставится в соответствие функции f формулой*

$$\Psi(y) = v.\,p.\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iyt}\, dt, \tag{56.22}$$

называется обратным преобразованием Фурье функции f и обозначается $F^{-1}[f]$.

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье определены на множестве функций, для которых интегралы (56.21) и (56.22) существуют в смысле главного значения. Это множество содержит в себе, в частности, множество всех абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, для которых интегралы в формулах (56.21) и (56.22) можно понимать как обычные несобственные интегралы, а не только как интегралы в смысле главного значения. Термин «обратное преобразование Фурье» оправдывается тем, что преобразование F^{-1} обращает преобразование Фурье F. Более точно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если непрерывная абсолютно интегрируемая на всей оси функция f имеет в каждой точке конечные односторонние производные, то*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

Доказательство. Первая формула обращения, т. е. формула $F^{-1}[F[f]] = f$, является просто другой записью уже доказанной формулы (56.19).

Покажем справедливость второй формулы обращения. Поскольку косинус — четная функция, то в (56.14) можно переставить местами t и x:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t-x)\, dt,$$

в силу же нечетности синуса (ср. (56.18))

$$v.\,p. \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(t-x)\, dt = 0.$$

Поэтому наряду с формулой (56.19) имеем также

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iy(t-x)}\, dt,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ity}\, dt \right] e^{-ixy}\, dy,$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Эта формула может быть переписана в виде

$$F[F^{-1}[f]]=f. \ \square$$

Отметим, что справедливость формул обращения может быть доказана и при более слабых ограничениях на функцию, чем существование у нее в каждой точке односторонних производных.

Лемма 2. *Пусть для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье (соответственно обратное преобразование Фурье). Тогда, каковы бы ни были числа λ_1 и λ_2 для функции $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ также существует преобразование Фурье (соответственно обратное ему), причем*

$$F[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2]=\lambda_1 F[f_1]+\lambda_2 F[f_2]$$

(*соответственно* $F^{-1}[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2]=\lambda_1 F^{-1}[f_1]+\lambda_2 F^{-1}[f_2]$).

Это свойство называется *линейностью преобразования Фурье* (соответственно обратного преобразования Фурье). Оно непосредственно следует из линейности интеграла и из формул (56.21) и (56.22).

Следствие. $F[0]=F^{-1}[0]=0$.

Действительно, например,

$$F[0]=F[0\cdot 0]=0\cdot F[0]=0.$$

Впрочем, это свойство следует, конечно сразу и из формул (56.21) и (56.22).

Лемма 3. *Преобразование Фурье F, так же как и обратное преобразование Фурье F^{-1}, являются взаимно однозначными отображениями множества непрерывных абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, имеющих в каждой точке односторонние производные, во множество функций, для которых интегралы* (56.21) *и* (56.22) *существуют в смысле главного значения.*

Доказательство. Достаточно доказать лишь взаимную однозначность отображений F и F^{-1} — остальное уже доказано выше. Докажем, например, взаимную однозначность отображения F. Пусть $F[f_1]=F[f_2]$; тогда

$$F^{-1}[F[f_1]]=F^{-1}[F[f_2]].$$

Отсюда согласно лемме 1, следует, что

$$f_1=f_2. \ \square$$

Преобразование Фурье во всяком случае определено для абсолютно интегрируемых функций. В следующих пунктах будут изучаться свойства этого преобразования. В дальнейшем же будет показано, как преобразование Фурье обобщается на более широкие классы функций, а именно на функции с интегрируемым квадратом (п. 58.7*) и на так называемые обобщенные функции (п. 59.7).

56.6. ИНТЕГРАЛЫ ЛАПЛАСА

Найдем преобразование Фурье $\hat{f}$ четного продолжения функции e^{-ax}, $a>0$, с полупрямой $x\geqslant 0$ на всю числовую прямую, т. е. попросту говоря, преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-a|x|}$, $-\infty<x<+\infty$:

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}e^{-ixy}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{-ixy}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}e^{-ixy}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(a-iy)x}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(a+iy)x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-iy}+\frac{1}{a+iy}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+y^2}.$$

Применение обратного преобразования Фурье к полученной функции дает исходную функцию

$$e^{-ax}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+y^2}e^{ixy}\,dy,\qquad x\geqslant 0.$$

Вспоминая, что $e^{ixy}=\cos xy+i\sin xy$ и замечая, что в силу нечетности подынтегральной функции $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin xy}{a^2+y^2}dy=0$, получим

$$e^{-ax}=\frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy=\frac{2a}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy,\qquad x\geqslant 0.$$

Найдем теперь преобразование Фурье $\hat{f}$ нечетного продолжения функции e^{-ax}, $a>0$, с положительной полуоси $x>0$, т. е. преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & x>0,\\ -e^{ax} & x<0.\end{cases}$$

Имеем

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}(-e^{ax})\,e^{-ixy}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}e^{ixy}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{a-iy}+\frac{1}{a+iy}\right)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y}{a^2+y^2}\,i.$$

Применив снова формулу обращения преобразования Фурье, получим

$$e^{-ax}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{a^2+y^2}i\right)e^{ixy}\,dy=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{y\sin xy}{a^2+y^2}\,dy,\qquad x>0.$$

Итак, нам не только удалось найти преобразование Фурье рассматриваемых функций, но и получить сразу из формулы обращения (56.20′) значения двух интегралов:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy=\frac{\pi}{2a}e^{-ax},\qquad x\geqslant 0,$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{y\sin xy}{a^2+y^2}\,dy=\frac{\pi}{2}e^{-ax},\qquad x>0.$$

Эти интегралы называются *интегралами Лапласа.*

56.7. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ АБСОЛЮТНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В этом и следующих пунктах будут рассмотрены некоторые свойства преобразования Фурье функции f, которое, как и выше, будет обозначаться через $\hat{f}$ или $F[f]$. При этом будет предполагаться, что функция f принимает, вообще говоря, комплексные значения, а ее аргумент, как всегда, действителен.

Лемма 4. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то ее преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ ограничено на всей оси, причем*

$$|\hat{f}(y)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx.\tag{56.23}$$

Следствие. *Если последовательность абсолютно интегрируемых функций $f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, и абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0,$$

то последовательность $\{\hat{f}_n(y)\}$ равномерно на всей числовой оси сходится к функции $\hat{f}(y)$.

Доказательство. Неравенство (56.23) следует из формулы (см. (56.21))

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-ixy}\,dy,\tag{56.24}$$

если только вспомнить, что $|e^{-ixy}|=1$. □

Следствие сразу вытекает из неравенства (56.23) и линейности преобразования Фурье, ибо

$$|\hat{f}_n(y)-\hat{f}(y)|=|\widehat{f_n(x)-f}(x)|\underset{(56.23)}{\leqslant}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)-f(x)|\,dx. \ \square$$

Лемма 5. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то ее преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ непрерывно и*

$$\lim_{y\to\pm\infty}\hat{f}(y)=0. \tag{56.25}$$

Доказательство. Пусть $f(x)=u(x)+iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — действительные абсолютно интегрируемые функции. Поскольку $\widehat{f(x)}=\widehat{u(x)}+i\widehat{v(x)}$, то для доказательства непрерывности функции $\hat{f}(y)$ достаточно доказать непрерывность функций $\widehat{u(x)}$ и $\widehat{v(x)}$. Здесь, как всегда, $u(x)$ и $v(x)$ — действительнозначные функции действительного аргумента, а $\widehat{u(x)}$ и $\widehat{v(x)}$ — вообще говоря, комплекснозначные функции действительного аргумента.

Согласно лемме 2 из п. 55.2, для любой действительной абсолютно интегрируемой на всей оси функции $f(x)$ существует последовательность финитных ступенчатых функций $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_n(x)-f(x)|\,dx=0.$$

В силу следствия леммы 4 последовательность $\{\hat{\varphi}_n(y)\}$ сходится равномерно к функции $\hat{f}(y)$. Для того чтобы убедиться в непрерывности функции $\hat{f}(y)$, достаточно доказать, что функции $\hat{\varphi}_n(y)$ непрерывны (см. теорему 8′ в п. 36.4). Покажем это. Каждая финитная ступенчатая функция является линейной комбинацией одноступенчатых (см. п. 55.2), точнее, характеристических функций полуинтервалов вида $[a, b)$. Поэтому в силу линейности преобразования Фурье непрерывность функции $\hat{f}$ будет доказана, если мы покажем, что для характеристической функции любого полуинтервала $[a, b)$ ее преобразование Фурье непрерывно.

Пусть ω — характеристическая функция полуинтервала $[a, b)$, т. е. $\omega(x)=1$, если $a\leqslant x<b$, и $\omega(x)=0$, если $x<a$ или $x\geqslant b$. Тогда в силу (56.21) при $y\neq 0$ имеем

$$\hat{\omega}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b e^{-ixy}\,dx=-\frac{1}{iy\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b e^{-ixy}\,d(-ixy)=$$

$$=\frac{i}{y\sqrt{2\pi}}e^{-ixy}\Big|_{x=a}^{x=b}=\frac{i\,(e^{-iby}-e^{-iay})}{y\sqrt{2\pi}}.$$

Если же $y=0$, то в силу той же формулы (56.21)

$$\hat{\omega}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b dx=\frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}.$$

Итак,

$$\hat{\omega}(y)=\begin{cases}\dfrac{i\,(e^{-iby}-e^{-iay})}{y\sqrt{2\pi}} & \text{при} \quad y\neq 0,\\[2mm] \dfrac{b-a}{\sqrt{2\pi}} & \text{при} \quad y=0.\end{cases}$$

Очевидно, правая часть этого равенства является непрерывной функцией при всех $y\neq 0$. Покажем, что она непрерывна и при $y=0$:

$$\lim_{y\to 0}\frac{i\,(e^{-iyb}-e^{-iya})}{y\sqrt{2\pi}}=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left[(1-iby+o(y))-(1-iay+o(y))\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{y\to 0}\left[b-a+\frac{o(y)}{y}\right]=\frac{b-a}{\sqrt{2\pi}},$$

т. е. функция $\hat{\omega}(y)$ действительно непрерывна в точке $y=0$.

Таким образом доказана непрерывность на всей числовой оси преобразования Фурье $\hat{f}$ абсолютно интегрируемой на всей числовой оси функции f, принимающей действительные значения. Отсюда, как было сказано, сразу следует и непрерывность преобразования Фурье $\hat{f}$ абсолютно интегрируемой на всей числовой оси функции $f=u+iv$, т. е. принимающей, вообще говоря, и комплексные значения.

Равенство (56.25) следует из теоремы 2, п. 55.2. Действительно, пусть снова сначала функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси и принимает только действительные значения, тогда

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos xy\,dx-i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin xy\,dx\right],$$

где в силу указанной теоремы вещественная и мнимая части, а следовательно, и сама функция $\hat{f}(y)$ стремятся к нулю при $y\to\pm\infty$.

Если, теперь, $f=u+iv$, то по доказанному $\lim\limits_{y\to\pm\infty}\hat{u}(y)=\lim\limits_{y\to\pm\infty}\hat{v}(y)=0$, следовательно, $\lim\limits_{y\to\pm\infty}\hat{f}(y)=0$. □

56.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема 2. *Пусть абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция f имеет n абсолютно интегрируемых и непрерывных на всей оси производных. Тогда*

$$F[f^{(k)}]=(iy)^k F[f],\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{56.26}$$

и существует постоянная $M>0$ *такая, что*

$$|F[f]|\leqslant\frac{M}{|y^n|}.\tag{56.27}$$

Доказательство. Пусть сначала функция f принимает только действительные значения. Если f абсолютно интегрируема на всей оси вместе со своей производной f' и эта производная непрерывна, то

$$f(x)=f(0)+\int\limits_0^x f'(t)\,dt.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f'(t)|\,dt$ по условию теоремы сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'(t)\,dt$, поэтому в силу определения сходимости интеграла существуют пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\int\limits_0^x f'(t)\,dt$ и, следовательно, пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$. При этом из сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt$ следует, что указанные пределы равны нулю: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. Применив интегрирование по частям к формуле преобразования Фурье, получим

$$F[f']=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\,e^{-ixy}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)\,e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+$$
$$+\frac{iy}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-ixy}\,dx=iyF[f].$$

Таким образом, дифференцирование функции приводит к умножению ее преобразования Фурье на множитель iy.

Если теперь $f=u+iv$, где u и v — вещественные функции, и снова f абсолютно интегрируема вместе со своей производной $f'=u'+iv'$ и эта производная непрерывна, то

$$F[f']=F[u'+iv']=F[u']+iF[v']=iyF[u]-yF[v]=$$
$$=iyF[u+iv]=iyF[f].$$

Формула (56.26) при $n=1$ доказана.

Для произвольного n она получается отсюда по индукции.

Функция $F[f^{(n)}]$ ограничена (см. лемму 4), поэтому верхняя грань $M=\sup\limits_{-\infty<y<+\infty}F[f^{(n)}]$ конечна и, следовательно, оценка (56.27) следует из формулы (56.26) при $k=n$. $\square$

Итак, чем больше абсолютно интегрируемых производных имеет функция f, тем быстрее стремится к нулю на бесконечности ее преобразование Фурье.

Заметим, что теорема 2 вместе с ее доказательством остается справедливой и в случае, когда производная n-го порядка рассматриваемой функции является не непрерывной, а имеет конечное число разрывов первого рода (см. п. 5.1) при сохранении остальных предположений. Действительно, в этом случае указанная производная на любом конечном отрезке является кусочно-непрерывной функцией (см. п. 28.3) и потому проводимое в доказательстве интегрирование по частям законно (см. п. 30.2 и п. 33.2).

Упражнение 2. Доказать, что преобразование Фурье $F(y)$ функции $f(x)=\frac{1}{1+|x|^3}$ равно $O\left(\frac{1}{y^3}\right)$ при $y\to\infty$.

56.9. СВЕРТКА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Пусть функции φ и ψ определены на всей действительной оси. В различных вопросах математики часто используется так называемая *свертка функций* φ и ψ, которая обозначается $\varphi*\psi$, или, если x — аргумент свертки, через $(\varphi*\psi)(x)$ и определяется равенством

$$(\varphi*\psi)(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\psi(x-t)\,dt. \tag{56.28}$$

Для простоты в этом пункте будем предполагать, что рассматриваемые функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ принимают только действительные значения. Интеграл (56.28) заведомо существует, если обе функции ограничены и абсолютно интегрируемы*). При этом интеграл (56.28), и более того, интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt$$

равномерно сходятся на всей действительной оси. В самом деле в силу ограниченности функции ψ имеем $|\psi|\leqslant M$, где M — постоянная, поэтому для всех x и t

$$|\varphi(t)\psi(x-t)|\leqslant M|\varphi(t)|$$

и сделанное утверждение в силу абсолютной интегрируемости функции φ вытекает из признака Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов (см. п. 54.1). Из приведенных рассуждений следует также, что если функции φ и ψ ограничены, абсолютно

*) Существование интеграла (56.28) можно гарантировать и при более общих условиях, однако мы на этом не будем здесь останавливаться.

интегрируемы и непрерывны, то и их свертка f также непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема. Действительно, непрерывность функции f следует из равномерной сходимости интеграла (56.28), а ограниченность — из оценки

$$|(\varphi * \psi)(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt \leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt.$$

Докажем абсолютную интегрируемость свертки. Пусть $f = \varphi * \psi$; имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x-t)|\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(s)|\,ds. \qquad (56.29)$$

Перестановка порядка интегрирования здесь возможна в силу того (см. теорему 7 п. 54.3), что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt$ равномерно сходится на всей оси, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dx = |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x-t)|\,dx$ равномерно сходится на любом конечном отрезке (почему?), а повторный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt$, как это следует из последнего равенства формулы (56.29), существует.

Таким образом, при сделанных предположениях к функции $f = \varphi * \psi$ можно в свою очередь применять операцию свертки с некоторой непрерывной ограниченной и абсолютно интегрируемой функцией (причем снова получится функция того же класса) или преобразование Фурье.

Операция свертки функций *коммутативна и ассоциативна* в рассматриваемом классе функций. Действительно, выполнив в интеграле (56.28) замену переменного $x - t = s$, получим

$$\varphi * \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-s)\psi(s)\,ds = \psi * \varphi.$$

Далее, производя в ниже написанном интеграле замену переменного $t = y - \xi$, меняя порядок интегрирования и делая замену

$x-y+\xi=\eta$, получим

$$(\varphi*\psi)*\chi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi(y-x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\psi(x-t)\,dt=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi(y-x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)\,d\xi=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-y+\xi)\,\chi(y-x)\,dx=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(\eta)\,\chi(\xi-\eta)\,d\eta=(\psi*\chi)*\varphi=\varphi*(\psi*\chi).$$

Возможность перестановки порядка интегрирования и в этом случае следует из теоремы 7 п. 54.3. Действительно, исследуем на равномерную сходимость интегралы

$$\chi(y-x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)\,d\xi, \tag{56.30}$$

$$\varphi(y-\xi)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-y+\xi)\,\chi(y-x)\,dx. \tag{56.31}$$

В силу ограниченности функций ψ и χ имеем $|\psi|\leqslant M$, $|\chi|\leqslant M$, где M — постоянная, и поэтому

$$|\chi(y-x)\,\varphi(y-\xi)\,\psi(x-x+\xi)|\leqslant M^2|\varphi(y-\xi)|,$$
$$|\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)\,\chi(y-x)|\leqslant M^2|\chi(y-x)|.$$

Из этих неравенств и абсолютной интегрируемости функций φ и χ следует, согласно признаку Вейерштрасса, что интегралы (56.30) и (56.31) равномерно сходятся соответственно относительно переменных x и ξ (переменная y фиксирована) на любом конечном отрезке (почему?). Наконец, существует повторный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\chi(y-x)\,\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)|\,d\xi=(|\varphi|*|\psi|)*|\chi|.$$

Таким образом, все условия указанной теоремы 7 из п. 54.3 выполнены.

Следует заметить, что при рассмотрении сверток функций можно существенно ослабить ограничения, накладываемые на свертываемые функции. Однако доказательство свойств сверток в этом случае потребовало бы прежде всего более тонких теорем о перемене порядка интегрирования. Для простоты изложения мы не стали этого делать.

Займемся теперь изучением преобразования Фурье сверток двух функций. Для удобства видоизменим определение свертки $\varphi * \psi$, добавив дополнительный множитель $1/\sqrt{2\pi}$:

$$\varphi * \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\psi(x-t)\,dt.$$

Теорема 3. *Пусть функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы на числовой оси. Тогда*

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]\,F[\psi].$$

Доказательство. Функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы, поэтому функция $\varphi * \psi$ обладает теми же свойствами, в частности, она абсолютно интегрируема, и для нее можно рассматривать преобразование Фурье

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\psi(x-t)\,dt.$$

Меняя здесь порядок интегрирования (что возможно здесь в силу теоремы 7 п. 54.3) и производя замену переменного $x = t + s$ получим

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-t)\,e^{-ixy}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,e^{-ity}\,dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(s)\,e^{-isy}\,ds = F[\varphi]\,F[\psi],$$

т. е. преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций. □

Теорема 3 также может быть доказана при более слабых ограничениях на рассматриваемые функции, но мы не будем на этом останавливаться.

56.10. ПРОИЗВОДНАЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а функции $f(x)$, $xf(x)$, $\ldots$, $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой оси, то преобразование Фурье функции f является n раз дифференцируемой на всей числовой прямой функцией и*

$$i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть сначала функция f принимает только действительные значения. Формально дифференцируя по параметру y интеграл

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ixy}\,dx$$

и замечая, что $|xf(x)\,e^{-ixy}|=|xf(x)|$, получим абсолютно и равномерно сходящийся интеграл

$$-i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,e^{-ixy}\,dx,\quad -\infty<y<+\infty.$$

Следовательно (см. п. 54.3, теорема 8), в этом случае преобразование Фурье $F[f]$ функции f является дифференцируемой функцией и

$$iF'[f]=F[xf].$$

Если теперь $f=u+iv$, где u и v — действительные функции, то

$$F'[f]=F'[u+iv]=\{F[u]+iF[v]\}'=F'[u]+iF'[v]=$$
$$=-iF[xu]+F[xv]=-iF[xu+ixv]=-iF[xf].$$

Далее по индукции получаем, что преобразование Фурье $F[f]$ функции f имеет производные до порядка n включительно и $i^kF^{(k)}[f]=F[x^kf]$, $k=0, 1, \ldots, n$. $\square$

Следствие. *Если предположения теоремы выполнены, то все производные $F^{(k)}[f]$, $k=0, 1, \ldots, n$, непрерывны и стремятся к нулю при стремлении их аргумента к бесконечности.*

В силу леммы 5 следствие непосредственно вытекает из того, что производные $F^{(k)}[f]$ являются преобразованиями Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Можно показать, что если произведения вида $e^{a|x|^\alpha}f(x)$ абсолютно интегрируемы при определенных ограничениях, налагаемых на $a>0$ и $\alpha>0$, то это приводит к еще большей гладкости преобразования Фурье, а именно оказывается, что оно принадлежит к тем или иным классам аналитических функций.

Формула, задающая обратное преобразование Фурье, отличается от формулы, задающей прямое преобразование Фурье (см. (56.21) и (56.22)), лишь тем, что в показателе степени у числа e под интегралом i заменено на $-i$, поэтому для обратного преобразования Фурье справедливы свойства, аналогичные доказанным нами для прямого преобразования Фурье.

Упражнения. 3. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$ дважды дифференцируемо на всей числовой прямой.

4. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x)=xe^{-|x|}$ бесконечно дифференцируемо на всей числовой прямой.