§ 57. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

57.1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. *Множество* $X=\{x, y, z, \dots\}$ *называется метрическим пространством* X, *если на множестве упорядоченных пар* (x, y) *элементов этого множества определена неотрицательная функция* $\rho(x, y)$, *называемая расстоянием* (*или метрикой*), *такая, что*:

1) $\rho(x, y)=0$, *тогда и только тогда, когда* $x=y$;

2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$, $x\in X$, $y\in X$;

3) $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$, $x\in X$, $y\in X$, $z\in X$.

Условия 1, 2 и 3 называются *аксиомами расстояния*.

Элементы метрического пространства называются *точками*.

Примеры. 1. Совокупность всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, если расстояние между действительными числами определить как абсолютную величину их разности: $\rho(x, y)=|x-y|$, $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in\boldsymbol{R}$, образует метрическое пространство.

2. Множество комплексных чисел $\boldsymbol{C}$, расстояние между элементами которого задается по формуле $\rho(z, z')=|z-z'|$, $z\in\boldsymbol{C}$, $z'\in\boldsymbol{C}$ также образует метрическое пространство.

3. Евклидово пространство R^n размерности n (см. п. 18.1) является метрическим пространством, если расстояние между его точками $x=(x_1, \dots, x_n)$ и $y=(y_1, \dots, y_n)$ определить по формуле (см. (18.1))

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

4. Пусть E — некоторое множество. Рассмотрим множество ограниченных на E функций, принимающих действительные (или комплексные) значения. Для двух таких функций φ и ψ положим

$$\rho(\varphi, \psi)=\sup_{t\in E}|\varphi(t)-\psi(t)|. \qquad (57.1)$$

Легко проверяется, что функция $\rho(\varphi, \psi)$ является метрикой. Справедливость свойств расстояния 1 и 2 ясна непосредственно. Проверим справедливость свойства 3. Пусть φ, ψ и χ — ограниченные функции, определенные на множестве E. Для любого элемента $t\in E$ имеем

$$|\varphi(t)-\chi(t)|=|[\varphi(t)-\psi(t)]+[\psi(t)-\chi(t)]|\leqslant$$
$$\leqslant|\varphi(t)-\psi(t)|+|\psi(t)-\chi(t)|,$$

поэтому

$$|\varphi(t)-\chi(t)|\leqslant\sup_E|\varphi(t)-\psi(t)|+\sup_E|\psi(t)-\chi(t)|,$$

откуда

$$\sup_E |\varphi(t)-\chi(t)| \leqslant \sup_E |\varphi(t)-\psi(t)| + \sup_E |\psi(t)-\chi(t)|,$$

т. е.

$$\rho(\varphi, \chi) \leqslant \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi).$$

5. Пусть G — измеримое по Жордану открытое множество n-мерного евклидова пространства R^n. Множество X непрерывных на замыкании $\bar{G}$ множества G функций образует метрическое пространство, если расстояние между функциями $\varphi \in X$ и $\psi \in X$ определить по формуле

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |\psi(x)-\varphi(x)| \, dG.$$

Действительно, если $\rho(\varphi, \psi)=0$, т. е. $\int |\psi(x)-\varphi(x)| \, dG = 0$, то в силу следствия из свойства 9° кратных интегралов (см. п. 44.6) $\varphi(x)=\psi(x)$ для всех $x \in G$ и, следовательно, для всех $x \in \bar{G}$. Свойство 2° расстояния в этом случае очевидно, а свойство 3° легко проверяется: если φ, ψ и χ — непрерывны на $\bar{G}$, то

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |\varphi(x)-\chi(x)| \, dG = \int |[\varphi(x)-\psi(x)]-[\psi(x)-\chi(x)]| \, dG \leqslant$$
$$\leqslant \int |\varphi(x)-\psi(x)| \, dG + \int |\psi(x)-\chi(x)| \, dG = \rho(\varphi, \psi)+\rho(\psi, \chi).$$

В случае $n=1$, $\bar{G}=[a, b]$ введенная метрика для непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций имеет вид

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |\varphi(x)-\psi(x)| \, dx. \qquad (57.2)$$

Естественным образом аналогичное пространство вводится и для функций, определенных на бесконечном промежутке. Например, в случае $a=-\infty$, $b=+\infty$ для двух непрерывных абсолютно интегрируемых на всей числовой оси функций φ и ψ расстояние определяется по формуле

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)-\psi(x)| \, dx. \qquad (57.3)$$

Всякое подмножество метрического пространства X в свою очередь является метрическим пространством относительно той же метрики и называется *подпространством пространства* X.

Определение 2. *Два метрических пространства X и X' называются изометричными, если между их точками существует взаимно однозначное соответствие f, сохраняющее расстояние, т. е. такое, что если*

$$x'=f(x), \quad y'=f(y), \quad x \in X, \quad y \in X, \quad x' \in X', \quad y' \in X',$$

то $\rho(x, y)=\rho(x', y')$ (такие соответствия также называются изометричными).

Определение 3. *Пусть X — метрическое пространство; последовательность его точек $\{x_n\}$ называется сходящейся к точке $x \in X$, если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x, x_n) = 0$, т. е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. В этом случае пишется $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ или $x_n \to x$ при $n \to \infty$ и говорится, что точка x является пределом данной последовательности.*

Например, в случае примеров 1 и 2 сходимость в рассматриваемых там метрических пространствах означает обычную сходимость числовых (соответственно действительных или комплексных) последовательностей. В примере 3 сходимостью последовательности является сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве, встречавшаяся нам раньше (см. п. 18.1). В метрическом пространстве функций, определенных и ограниченных на некотором множестве, расстояние между которыми определяется формулой (57.1), последовательность функций $\{\varphi_n\}$ сходится к функции φ, если

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in E} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| = 0,$$

т. е. если последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно на множестве E сходится к функции φ (см. т. I, п. 36.2).

Наконец, пример 5 дает вид сходимости последовательности функций в смысле некоторой интегральной метрики. В случае $n = 1$ подобная сходимость уже встречалась в п. 55.2 (лемма 2) и в п. 56.7 (следствие леммы 4).

Упражнение 1. Множество E метрического пространства X называется *ограниченным*, если

$$d(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in E,\ y \in E} \rho(x, y) < +\infty;$$

величина $d(E)$ называется *диаметром* множества E. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность метрического пространства ограничена.

Определение 4. *Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется фундаментальной, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство*

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Лемма 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она фундаментальная.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, то

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \square$$

Определение 5. *Метрическое пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность его точек сходится к его же точке.*

Очевидно, что метрическое пространство, изометричное полному пространству, также является полным метрическим пространством.

Примеры. 6. Метрические пространства действительных и комплексных чисел являются примерами полных метрических пространств. Полным является и n-мерное евклидово пространство R^n (см. п. 18.1). Рациональные числа дают пример неполного метрического пространства.

7. Рассмотрим метрическое пространство функций, определенных и ограниченных на множестве E, расстояние между которыми определено формулой (57.1). В этом пространстве последовательность функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, является фундаментальной, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant m_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\rho(\varphi_n, \varphi_m) = \sup_E |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon,$$

т. е. если последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости последовательности на множестве E (см. п. 36.2). В силу этого критерия последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно на множестве E сходится к некоторой функции φ, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \sup_E |\varphi(x) - \varphi_n(x)| = 0. \tag{57.4}$$

Покажем, что эта функция φ также ограничена и, следовательно, принадлежит рассматриваемому пространству. Действительно, в силу (57.4) для любого числа $\varepsilon > 0$, в частности для $\varepsilon = 1$, существует такой номер n_1, что для всех $n \geqslant n_1$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < 1;$$

поэтому

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi_{n_1}(x)| + |\varphi_{n_1}(x)| < 1 + \sup_E |\varphi_{n_1}(x)|.$$

Так как функция φ_{n_1} ограничена, то ограничена и функция φ. Мы доказали тем самым, что рассматриваемое пространство функций является полным.

Можно показать, что метрическое пространство функций, рассмотренных в примере 5, не является полным.

Для всякого метрического пространства X естественным образом вводится понятие ε-окрестности $U(x, \varepsilon)$ точки $x \in X$, $\varepsilon > 0$:

$$U(x, \varepsilon) = \{y : y \in R, \ \rho(y, x) < \varepsilon\},$$

а затем дословно, так же как для n-мерного пространства R^n (см. т. I, п. 18.2), вводятся понятия точки прикосновения множества, предельной и изолированной точки, граничной и внутренней точки, замыкания $\bar{A}$ множества A, понятие замкнутого и открытого множества.

Справедливы для произвольных метрических пространств и леммы 3, 4, 5 и 6, доказанные в п. 18.2 для открытых и замкнутых множеств n-мерных евклидовых пространств, причем доказательства, приведенные в п. 18.2, сохраняют свою силу и в общем случае.

Определение 6. *Множество A метрического пространства X называется плотным в пространстве X, если замыкание $\bar{A}$ множества A совпадает с пространством $X : \bar{A} = X$.*

Например, множество рациональных чисел плотно во множестве действительных чисел.

Очевидно, что свойство множества быть плотным в пространстве сохраняется при изометрических отображениях этого пространства.

Определение 7. *Полное метрическое пространство X^* называется пополнением метрического пространства X, если в пространстве X^* существует плотное в нем подмножество X', изометричное пространству X.*

Например, множество действительных чисел является пополнением множества рациональных чисел.

Иногда бывает удобно «отождествить» элементы пространств X и X', соответствующие друг другу при изометричном соответствии пространств X и X', и тем самым рассматривать множество X как подмножество его пополнения X^*. Поясним более подробно операцию отождествления элементов двух изометрических пространств X и Y. Пусть X и Y^* — метрические пространства, $Y \subset Y^*$, $f: X \to Y$ — изометричное отображение. Рассмотрим множество $X^* = X \cup (Y^* \setminus Y)$, получающееся из пространства X присоединением к нему множества $Y^* \setminus Y$. Таким образом: $X^* \setminus X = Y^* \setminus Y$. Определим для точек $x \in X^*$ и $y \in X^*$ понятие расстояния $\rho_{X^*}(x, y)$. Для удобства введем отображение $F: X^* \to Y^*$, задаваемое формулой

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in X, \\ x, & \text{если} \quad x \in X^* \setminus X. \end{cases}$$

Ясно, что F является взаимно однозначным отображением (биекцией) множества X^* на Y^*.

Теперь для любых $x \in X^*$ и $y \in Y^*$ положим

$$\rho_{X^*}(x, y) = \rho(F(x), F(y)).$$

Легко проверить, что определенная таким образом функция $\rho_{X^*}(x, y)$ удовлетворяет трем аксиомам расстояния, и, следовательно, X^* является метрическим пространством, а отображение F изометрично отображает пространство X^* на Y^*, причем при этом отображении множество X переходит в Y. Поэтому, если множество Y было плотным в пространстве Y^*, то множество X будет плотным в пространстве X^*.

Под утверждением «отождествим в пространстве Y^* множество X с изометричным ему пространством Y» и понимается рассмотрение пространства X^* вместо Y^*.

Покажем, что для всякого неполного метрического пространства существует его пополнение, т. е. покажем, что всякое неполное метрическое пространство является плотным подмножеством в некотором полном метрическом пространстве.

Теорема 1. *Для всякого метрического пространства существует его пополнение.*

Доказательство.

I. Конструкция пополнения X^* заданного метрического пространства X.

Две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов пространства X назовем *эквивалентными*, если

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0. \tag{57.5}$$

Эквивалентность двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ обозначается символом $\{x_n\} \sim \{y_n\}$; она обладает следующими свойствами:

1°. Всякая последовательность $\{x_n\}$ эквивалентна сама себе: $\{x_n\} \sim \{x_n\}$.

2°. Если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, то $\{y_n\} \sim \{x_n\}$.

3°. Если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, а $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, то $\{x_n\} \sim \{z_n\}$.

Нас будут интересовать только фундаментальные последовательности пространства X. Их множество распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой последовательностей. Обозначим эти классы через x^*, y^*, z^*, ..., а их совокупность — через X^*. Если фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ содержится в классе x^*, то будем, как обычно, это записывать следующим образом: $\{x_n\} \in x^*$.

II. Определение расстояния $\rho^*(x^*, y^*)$ в X^*.

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две фундаментальные последовательности метрического пространства X. Тогда числовая последовательность $\rho(x_n, y_n)$ также фундаментальна, т. е. удовлетворяет условию Коши (см. п. 3.7). Действительно, для любых номеров n и m

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)$$

и, следовательно, в силу симметрии индексов n и m

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m)+\rho(y_n, y_m). \tag{57.6}$$

Из фундаментальности последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняются неравенства

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{57.7}$$

Из (57.6) и (57.7) для $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ получаем

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x_m, y_m)| < \varepsilon.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ является фундаментальной, т. е. удовлетворяет условию Коши и, следовательно, сходится.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$. Положим, по определению, $\rho^*(x^*, y^*) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. В силу доказанного указанный предел существует. Покажем, что так определенная функция $\rho^*(x^*, y^*)$ не зависит от выбора фундаментальных последовательностей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$ и удовлетворяет аксиомам расстояния.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{x'_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{y'_n\} \in y^*$. Тогда

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x'_n)+\rho(x'_n, y'_n)+\rho(y_n, y'_n)$$

и

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x'_n, y'_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n)+\rho(y_n, y'_n).$$

В силу эквивалентности последовательностей $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ и соответственно — $\{y_n\}$, $\{y'_n\}$ получим (см. (57.5)):

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y'_n) = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

III. Проверка аксиом расстояния для $\rho^*(x^*, y^*)$.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$. Если $\rho^*(x^*, y^*) = 0$, то $\lim\limits_{\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, т. е. последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны, что означает совпадение элементов x^* и $y^*: x^* = y^*$. Из равенства $\rho(x_n, y_n) = \rho(y_n, x_n)$, перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим $\rho^*(x^*, y^*) = \rho^*(y^*, x^*)$, а из неравенства $\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n)+\rho(z_n, y_n)$ получим

$$\rho^*(x^*, y^*) \leqslant \rho^*(x^*, z^*)+\rho^*(z^*, y^*).$$

Итак, X^* является метрическим пространством.

IV. Построение подпространства пространства X^*, изометричного пространству X.

Пусть $x \in X$. Последовательность $x_n = x$, $n = 1, 2, \ldots$, очевидно, фундаментальная. Поставим в соответствие каждому $x \in X$ точку $x^* \in X^*$ такую, что $\{x\} \in x^*$. Если при указанном соответствии точке x соответствует точка x^*, а точке y — точка y^*, то, очевидно, при $x \neq y$ будем иметь $x^* \neq y^*$, причем $\rho^*(x^*, y^*) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x, y) = \rho(x, y)$, т. е. указанное соответствие осуществляет взаимно однозначное изометрическое соответствие между пространством X и некоторым подмножеством X' пространства X^*.

Точку x^* пространства X^*, соответствующую при рассматриваемом соответствии точке $x \in X$, мы будем для простоты обозначать также через x, а пространство X' через X. Можно считать, что мы просто отождествили соответствующие точки пространств X и X' (см. замечание после определения 7). В этих обозначениях имеем изометрическое включение

$$X \subset X^*.$$

V. Доказательство плотности X в X^*.

Покажем, что каждая точка x^* пространства X^* является точкой прикосновения множества X. Для этого достаточно показать, что для любой точки $x^* \in X^*$ существует последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к x^*.

Пусть $x^* \in X^*$ и $\{x_n\} \in x^*$, $x_n \in X$. Точку пространства X^*, содержащую фундаментальную последовательность, все члены которой равны одной и той же точке x_n, будем обозначать, согласно сделанному выше соглашению, также через x_n. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X^*$, сходится к точке $x^* \in X^*$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Из фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ следует, что существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (57.8)$$

Замечая, что по определению расстояния в X^*

$$\rho^*(x^*, x_n) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x_n),$$

из неравенства (57.8) для $n \geqslant n_\varepsilon$ получим

$$\rho^*(x^*, x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \rho^*(x^*, x_n) = 0$, что означает, что x^* является точкой прикосновения множества X. Итак, $\overline{X} = X^*$.

VI. Доказательство полноты пространства X^*.

Пусть $\{x_n^*\}$ — фундаментальная последовательность точек пространства X^*, $x_n \in X$ и $\rho^*(x_n^*, x_n) < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Такие точки x_n существуют в силу плотности X в X^*.

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Действительно, замечая, что

$$\rho^*(x_n, x_m) \leqslant \rho^*(x_n, x_n^*) + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \rho^*(x_m^*, x_m) < \\ < \frac{1}{n} + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \frac{1}{m},$$

выберем номер n_ε так, чтобы

$$\rho^*(x_n^*, x_m^*) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$. Тогда

$$\rho(x_n, x_m) = \rho^*(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \tag{57.9}$$

для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная.

Обозначим через x^* класс эквивалентных последовательностей, которому принадлежит последовательность $\{x_n\}$. Очевидно,

$$\rho^*(x^*, x_n^*) \leqslant \rho^*(x^*, x_n) + \rho^*(x_n, x_n^*) = \rho^*(x^*, x_n) + \frac{1}{n}.$$

Но из (57.9) при $m \to \infty$ и $n \geqslant n_\varepsilon$ получим

$$\rho^*(x^*, x_n) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \rho^*(x^*, x_n) = 0,$$

а потому и

$$\lim_{n \to \infty} \rho^*(x^*, x_n^*) = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что данная фундаментальная последовательность $\{x_n^*\}$ сходится в X^*. Полнота X^* доказана. □

Упражнение 2. Доказать, что с точностью до изометрических пространств пополнение метрического пространства единственно.

Определение 8. *Числовая функция f (действительно- или комплекснозначная), определенная на множестве A метрического пространства X, называется непрерывной в точке $x_0 \in A$ (или, более подробно, непрерывной по множеству A в точке $x_0 \in A$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек $x \in U(x_0, \delta) \cap A$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 9. *Функция f, определенная на множестве A метрического пространства X, называется непрерывной на множестве $B \subset A$, если она непрерывна по множеству A в каждой точке $x_0 \in B$.*

Упражнение 3. Сформулировать определение непрерывности в точке x_0 функции f, заданной на множестве $A \ni x_0$, с помощью понятия последовательности и доказать эквивалентность этого определения с определением 8.

Дословно, так же, как и в п. 36.4 (см. т. 1), доказывается, что предел равномерно сходящейся на метрическом пространстве последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.

Пример. Рассмотрим метрическое пространство ограниченных и непрерывных на некотором метрическом пространстве X функций f, расстояние между которыми определяется по формуле (57.1). Поскольку фундаментальность последовательности $\{f_n\}$ в смысле метрики (57.1) означает, что последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на множестве X, то всякая фундаментальная последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ равномерно сходится к некоторой функции f. Эта функция f, как отмечалось выше, непрерывна и, как было доказано несколько раньше в этом пункте, ограничена на X, т. е. принадлежит рассматриваемому пространству функций.

Таким образом, *пространство ограниченных и непрерывных на метрическом пространстве X функций является полным метрическим пространством.* Оно, очевидно, является подпространством всех ограниченных на X функций с расстоянием, определенным той же формулой (57.1).

В частности, поскольку всякая функция, непрерывная на некотором компакте A, лежащем в n-мерном евклидовом пространстве R^n, ограничена (см. п. 19.4), то пространство функций, непрерывных на компакте A, с расстоянием, определенным по формуле (57.1), является полным.

Определение 10. *Пусть X — метрическое пространство. Функция f, определенная на множестве упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, $y \in B$, $A \subset X$, $B \subset X$, называется непрерывной в точке (x_0, y_0), $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех пар (x, y) таких, что $x \in U(x_0, \delta) \cap A$, $y \in U(y_0, \delta) \cap B$, справедливо неравенство $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.*

Функция, непрерывная в каждой точке (x, y) некоторого множества пар, называется непрерывной на этом множестве.

Упражнения. 4. Проверить аксиомы расстояния для функции $\rho(\varphi, \psi)$, определенной формулой (57.3) для пространства абсолютно интегрируемых непрерывных на всей числовой оси функций.

5. Привести пример последовательности непрерывных функций, сходящейся на некотором отрезке в смысле расстояния (57.2), но не сходящейся на этом отрезке в смысле точечной сходимости (т. е. в смысле определения 3 п. 36.1).

6. Привести пример последовательности, сходящейся на некотором отрезке в смысле точечной сходимости, но не сходящейся на этом отрезке в смысле расстояния (57.2).

7. Доказать, что пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, расстояние между которыми определяется по формуле (57.2), не является полным.

57.2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 11. *Множество $X=\{x, y, z, \ldots\}$ называется действительным линейным пространством (или векторным пространством над полем действительных чисел), если:*

каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x\in X$ и *$y\in X$ поставлен в соответствие некоторый элемент пространства X, называемый суммой x* и *y и обозначаемый $x+y$;*

каждому элементу $x\in X$ и каждому действительному числу λ поставлен в соответствие единственный элемент пространства X, называемый произведением λ на x и обозначаемый λx. При этом выполняются следующие группы аксиом:

1. а) $x+y=y+x$ *для любых $x\in X$ и $y\in X$;*

б) $x+(y+z)=(x+y)+z$ *для любых $x\in X$, $y\in X$ и $z\in X$;*

в) *в X существует элемент, называемый нулевым и обозначаемый 0, такой, что $x+0=x$ для любого $x\in X$;*

г) *для каждого $x\in X$ существует элемент множества X, называемый противоположным элементу x, обозначаемый через $-x$ и такой, что $x+(-x)=0$.*

2. а) $1x=x$ *для любого $x\in X$;*

б) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ *для любого $x\in X$ и любых действительных чисел λ и μ.*

3. а) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ *для любого $x\in X$ и любых действительных чисел λ и μ;*

б) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ *для любых $x\in X$, $y\in Y$ и любого действительного числа λ.*

Для каждой пары элементов $x\in X$ и $y\in Y$ элемент $x+(-y)$ называется *разностью элементов x* и *y* и обозначается через $x-y$.

Если в приведенном определении действительного линейного пространства всюду заменить действительные числа комплексными: λ, $\mu\in \boldsymbol{C}$, то получится определение *комплексного линейного пространства.*

Примеры. 1. Множество всех действительных (комплексных) чисел образует действительное (комплексное) линейное пространство.

2. Пусть E — некоторое множество. Совокупность $F(E)$ всех функций $f: E\to \boldsymbol{R}$ (соответственно $f: E\to \boldsymbol{C}$) при естественном определении их сложения и умножения на действительное (комплексное) число:

$$(f_1+f_2)(x)\overset{\text{def}}{=}f_1(x)+f_2(x),\ (\lambda f)(x)\overset{\text{def}}{=}\lambda(f(x)),$$

$$f_1\in F(E),\ f_2\in F(E),\ f\in F(E),\ \lambda\in \boldsymbol{R} \text{ или } \lambda\in \boldsymbol{C}$$

является действительным (комплексным) линейным пространством.

3. Множество всех многочленов от одной переменной с действительными (комплексными) коэффициентами является линейным действительным (комплексным) пространством.

4. Множество всех многочленов степеней, не превышающих натурального n, от одной переменной с действительными (комплексными) коэффициентами является действительным (комплексным) линейным пространством.

5. Пространство всевозможных числовых последовательностей $\{x_n\}$, $x_n \in \boldsymbol{R}$ (или $x_n \in \boldsymbol{C}$), $n \in \boldsymbol{N}$, при естественном определении операций их сложения и умножения на число (см. п. 3.9) также является линейным пространством.

Определение 12. *Множество X', содержащееся в линейном пространстве X (действительном или комплексном) называется подпространством этого пространства, если все линейные комбинации элементов множества X' содержатся в нем.*

Иначе говоря, множество $X' \subset X$ является подпространством пространства X, если для любых двух элементов $x \in X'$, $y \in X'$ и любых чисел $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ (соответственно, $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $\mu \in \boldsymbol{C}$) имеет место включение

$$\lambda x + \mu y \in X'.$$

Очевидно, что подпространство X' линейного пространства X в свою очередь является линейным пространством. Если X — линейное пространство и $x \in X$, то совокупность всех элементов пространства X вида λx, где λ — всевозможные числа, служит примером подпространства пространства X.

Множество функций, действительнозначных и непрерывных на некотором множестве $E \subset R^n$, является подпространством пространства всех действительнозначных функций, определенных на E.

Элементы линейных пространств обычно называются *точками* или *векторами*.

Определение 13. *Конечная система векторов $x_1, \ldots, x_n$ линейного пространства X (действительного или комплексного) называется линейно зависимой, если существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (соответственно действительные или комплексные), не все равные нулю, что*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0.$$

В противоположном случае, т. е. когда из указанного равенства следует, что все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равны нулю, система векторов $x_1, \ldots, x_n$ называется линейно независимой.

Определение 14. *Система векторов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) линейного пространства X называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема x_{α_1}, $x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$ линейно независима.*

Упражнения. 8. Доказать, что если система x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, линейно независимая, то $x_\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$.

9. Доказать, что, для того чтобы конечная система векторов была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из них являлся линейной комбинацией остальных.

Определение 15. *Пусть задано множество $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ векторов линейного пространства X. Совокупность всевозможных конечных линейных комбинаций элементов этого множества, т. е. совокупность всевозможных векторов вида*

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_k x_{\alpha_k},$$

где $x_{\alpha_j} \in \{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, а λ_j — *числа,* $j = 1, 2, \ldots, k$, *называется линейной оболочкой множества* $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Определение 16. *Если в пространстве X (действительном или комплексном) имеется система n линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых является пространство X, то оно называется n-мерным и обозначается R^n, а всякая упорядоченная система n линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых является пространство R^n, называется базисом пространства.*

Иначе говоря, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ являются базисом пространства R^n, если:

1) векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы;

2) для каждого $x \in R^n$ существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$.

Элементы пространства R^n называются n-мерными векторами (соответственно действительными или комплексными).

Каждое n-мерное пространство называется конечномерным.

Упражнения. 10. Доказать, что в n-мерном пространстве каждая система линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых является все пространство, состоит из n векторов.

11. Доказать, что каждая система из n линейно независимых векторов в n-мерном пространстве является его базисом.

Примером n-мерного действительного пространства является n-мерное арифметическое векторное пространство (см. п. 18.4).

Аналогично этому пространству может быть построено комплексное арифметическое n-мерное пространство C^n. Его точками называются упорядоченные системы n комплексных чисел: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $x_j \in \boldsymbol{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. При этом, если $x \in C^n$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$, то

$$\lambda x \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

и для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in C^n$

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Базисом в этом пространстве являются векторы $e_i = \{\delta_1^i, \ldots, \delta_n^i\}$, где δ_j^i — так называемый *символ Кронекера*

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, что $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Другим примером конечномерного линейного пространства является пространство $\mathscr{P}^n$ многочленов степеней не превышающих натурального n. Оно является $(n+1)$-мерным: его размерность равна числу коэффициентов у рассматриваемых многочленов.

Определение 17. *Отображение f линейного пространства X в линейное пространство Y называется линейным отображением (или, что то же, линейным оператором), если для любых двух элементов $x \in X$, $y \in X$ и любых чисел λ и μ справедливо равенство*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Множество линейных операторов $f: X \to Y$, отображающих линейное пространство X в линейное пространство Y обозначается через $\mathscr{L}(X, Y)$. Легко непосредственно проверить, что множество $\mathscr{L}(X, Y)$ при естественном определении сложения его элементов и умножения их на число, т. е. при определении этих операций по формулам

$$(f_1 + f_2)(x) \overset{\text{def}}{=} f_1(x) + f_2(x),\ f_1 \in \mathscr{L}(X, Y),\ f_2 \in \mathscr{L}(X, Y),$$
$$(\lambda f)(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda(f(x)),\ f \in \mathscr{L}(X, Y),\ \lambda \in \boldsymbol{R} \text{ или } \lambda \in \boldsymbol{C},$$
$$x \in X,$$

образует также линейное пространство (действительное, если пространства X и Y были действительными линейными пространствами, и комплексное, если они были комплексными).

Определение 18. *Если $f: X \to Y$ и Y — линейное пространство, то множество $\{x : f(x) = 0\} \subset X$ называется ядром отображения f и обозначается через* $\ker f$*):

$$\ker f \overset{\text{def}}{=} \{x : f(x) = 0\}.$$

Лемма 2. *Для того чтобы линейное отображение $f: X \to Y$ линейного пространства X в линейное пространство Y было взаимно однозначным отображением X в Y, т. е. было инъекцией,*

---

*) От английского слова kernel — ядро.

необходимо и достаточно, чтобы его ядро состояло только из нулевого элемента:

$$\ker f = 0.$$

Доказательство необходимости. Очевидно, что любой линейный оператор f переводит ноль в ноль, ибо для любого $x \in X$ имеем: $f(0) = f(0x) = 0f(x) = 0$. Поэтому, если f — инъекция, то не существует $x \neq 0$, такого, что $f(x) = 0$. Это и означает, что $\ker f = 0$.

Доказательство достаточности. Пусть $\ker f = 0$ и $f(x) = f(y)$. Тогда в силу линейности отображения f имеем $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$, т. е. $x - y \in \ker f$ и так как $\ker f = 0$, то $x - y = 0$. Следовательно $x = y$. Это и означает, что f — инъекция. □

Примером линейных взаимно однозначных отображений являются прямое и обратное преобразование Фурье в соответствующих линейных пространствах функций (см. леммы 2 и 3 в п. 56.5).

Определение 19. *Пусть X и Y — линейные пространства. Линейное взаимно однозначное отображение пространства X на пространство Y называется изоморфным отображением, или изоморфизмом линейных пространств.*

Если для линейных пространств X и Y существует изоморфное отображение X на Y, то они называются изоморфными.

Два изоморфных пространства могут отличаться лишь природой своих элементов, а не свойствами линейного пространства как такового; поэтому в дальнейшем часто мы не будем различать изоморфные линейные пространства.

Упражнение 12. Доказать, что все n-мерные линейные пространства изоморфны между собой.

Определение 20. *Линейное пространство, не являющееся конечномерным, называется бесконечномерным.*

Очевидно, что линейное пространство является бесконечномерным тогда и только тогда, когда оно не имеет конечного базиса.

Примером бесконечномерного пространства является линейное пространство всех многочленов от одной переменной. Действительно это пространство заведомо не имеет конечного базиса: любая линейная комбинация заданной конечной системы многочленов является многочленом степени не выше степени старшего многочлена из указанной системы, и потому многочлены бóльших степеней не могут быть получены указанным способом.

Попытка обобщить понятие базиса в случае бесконечномерных пространств приводит к бесконечным суммам, т. е. рядам вида $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Для того чтобы имело смысл говорить об их сумме в пространстве X, в нем должно быть определено понятие сходимости последовательностей. Рассмотрению одного такого вида пространств посвящен следующий пункт.

57.3. НОРМИРОВАННЫЕ И ПОЛУНОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 21. *Линейное пространство X (действительное или комплексное) называется нормированным, если на множестве его точек определена действительная функция, называемая нормой, обозначаемая $\|x\|_X$ или, короче, $\|x\|$, $x \in X$, и имеющая следующие свойства:*

1°) $\|x\| \geqslant 0$, $x \in X$;

2°) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $x \in X$, λ — *число*;

3°) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $x \in X$, $y \in X$;

4°) *если* $\|x\| = 0$, *то* $x = 0$.

Заметим, что из свойства 2° следует, что если $x=0$, то $\|x\|=0$. Действительно, фиксируя произвольный элемент $x \in X$, получим

$$\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0\|x\| = 0.$$

Определение 22. *Если на множестве точек линейного пространства X определена действительная функция $\|x\|$, $x \in X$, удовлетворяющая только свойствам* 1, 2, 3, *то пространство X называется полунормированным, а функция $\|x\|$ — полунормой.*

Свойство 2° нормы (полунормы) называется ее *однородностью*, а свойство 3° — *неравенством треугольника.*

Отметим, что всякое подмножество линейного полунормированного (в частности, нормированного) пространства, являющееся подпространством линейного пространства, в свою очередь является линейным полунормированным (соответственно, нормированным) пространством.

Упражнение 13. Выяснить, будут ли выражения $\sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |f^{(n)}(t)|$, $\int\limits_a^b |f^{(n)}(t)|\,dt$ нормой? — полунормой? — для каких функций? — для каких n?

57.4. ПРИМЕРЫ НОРМИРОВАННЫХ И ПОЛУНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Множество действительных чисел и множество комплексных чисел, если в них за норму взять абсолютную величину чисел, образуют линейные нормированные пространства.

2. Если в действительном арифметическом n-мерном пространстве R^n норму вектора $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n$ определить как его длину (см. п. 18.4)

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} |x| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},$$

то R^n будет линейным нормированным пространством.

3. Комплексное арифметическое n-мерное пространство C^n (см. п. 57.2) будет нормированным, если положить

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2}, \quad x=(x_1, \ldots, x_n)\in C^n.$$

4. В действительном арифметическом n-мерном пространстве R^n можно ввести не только норму, совпадающую с длиной $|x|$ его элементов $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n$. Например, положим

$$\|x\|_p \overset{\text{def}}{=} (|x_1|^p+\ldots+|x_n|^p)^{1/p}, \quad 1\leqslant p<+\infty,$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, 2, \ldots, n} |x_i|.$$

Очевидно, длина вектора совпадает с нормой $\|x\|_2$. Проверим выполнение аксиом норм для $\|x\|_r$, $1\leqslant r\leqslant+\infty$. При $r=1$ по свойству абсолютной величины чисел

$$\|x+y\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i+y_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1+\|y\|_1.$$

При $1<p<+\infty$ применим неравенство Минковского (см. п. 35.8*):

$$\|x+y\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p+\|y\|_p.$$

Для $\|x\|_\infty$ имеем

$$\|x+y\|_\infty=\max_{i=1, 2, \ldots, n} |x_i+y_i| \leqslant \max_{i=1, 2, \ldots, n} (|x_i|+|y_i|) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{i=1, 2, \ldots, n} |x_i| + \max_{i=1, 2, \ldots, n} |y_i| = \|x\|_\infty+\|y\|_\infty.$$

Остальные свойства норм для $\|x\|_r$, $1\leqslant r\leqslant+\infty$, проверяются еще проще.

Упражнение 14. Доказать, что $\|x\|_\infty=\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p$, $x\in R^n$.

Определение 23. *Две нормы $\|x\|$ и $\|x\|^*$ в линейном нормированном пространстве X называются эквивалентными, если существуют такие постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство*

$$c_1\|x\| \leqslant \|x\|^* \leqslant c_2\|x\|.$$

Теорема 2. *В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Пусть X — конечномерное линейное пространство. Следовательно, в нем существует базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, состоящий из некоторого числа $n \in N$ его элементов, и для любого $x \in X$ имеется и притом единственное разложение

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Пусть $\|x\|$ — некоторая норма в пространстве X. Покажем, что она эквивалентна квадратичной норме

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Поскольку две нормы, каждая из которых эквивалентна третьей, также эквивалентны между собой, то из этого и будет следовать, что все нормы любого конечномерного пространства эквивалентны.

Прежде всего заметим, что $c_1 \overset{\text{def}}{=} \|e_1\| + \ldots + \|e_n\| > 0$, ибо для всех $k = 1, 2, \ldots, n$, имеет место неравенство $e_k \neq 0$, и, следовательно, $\|e_k\| > 0$. Далее, из очевидного неравенства

$$|x_k| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|x\|_2, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

получим, используя свойство нормы, неравенство

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\| \leqslant |x_1| \|e_1\| + \ldots + |x_n| \|e_n\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|e_1\| + \ldots + \|e_n\|) \|x\|_2 = c_1 \|x\|_2.$$

Итак, существует такое $c_1 > 0$, что для любого $x \in X$

$$\|x\| \leqslant c_1 \|x\|_2.$$

Докажем теперь, что существует такое $c_2 > 0$, что

$$\|x\| \geqslant c_2 \|x\|_2.$$

Поскольку в случае $x = 0$ это неравенство очевидно выполняется при любом $c_2 > 0$, то его достаточно доказать лишь для $x \neq 0$. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в пространстве X, так чтобы он состоял из единичных в смысле квадратичной нормы векторов

$$\|e_1\|_2 = \ldots = \|e_n\|_2 = 1.$$

Это всегда возможно, так как если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — какой-то базис линейного пространства, а $\|\cdot\|$ какая-либо норма в этом пространстве, то

$$\left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}$$

также будет его базисом, причем норма всех его элементов будет равна 1:

$$\left\|\frac{e_k}{\|e_k\|}\right\| = \frac{1}{\|e_k\|}\|e_k\| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пространство X с выбранным базисом можно рассматривать как арифметическое n-мерное пространство (см. п. 18.4). Для этого достаточно каждому его вектору $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ сопоставить упорядоченный набор n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ — его координат относительно указанного базиса. При этом квадратичная норма $\|x\|_2$ является длиной вектора x:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |x|.$$

Единичная сфера $S^{n-1} = \{x : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ этого пространства является, как известно (см. п. 18.3 и п. 18.4), компактом. Рассмотрим на ней функцию

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \|x\|.$$

Из неравенства

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|^{*)} \leqslant$$
$$\leqslant c_1\|x - y\|_2 = c_1|x - y|, \quad x \in X, \ y \in X,$$

следует, что эта функция непрерывна на всем пространстве X и, следовательно, на сфере S^{n-1}.

Поскольку для любой точки $x \in S^{n-1}$ имеем $\|x\|_2 = 1$, то $x \neq 0$, а потому в силу свойства 4° нормы функция f удовлетворяет на сфере S^{n-1} неравенству $f(x) = \|x\| > 0$. Согласно теореме Вейерштрасса всякая непрерывная на компакте функция достигает на нем своего минимального значения. Пусть функция f достигает свой минимум на сфере S^{n-1} в точке $x_0 \in S^{n-1}$. Положим

$$c_2 \overset{\text{def}}{=} \min_{x \in S^{n-1}} f(x) = f(x_0) > 0.$$

Тогда для любого $x \in S^{n-1}$ будем иметь:

$$\|x\| = f(x) \geqslant f(x_0) = c_2.$$

Теперь, заметив, что для каждого $x \in X$, $x \neq 0$, точка $\frac{x}{\|x\|_2}$ лежит на сфере S^{n-1}:

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_2 = \frac{1}{\|x\|_2}\|x\|_2 = 1$$

и, следовательно, для нее $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \geqslant c_2$ получим

$$\|x\| = \left\|\|x\|_2\frac{x}{\|x\|_2}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|\|x\|_2 \geqslant c_2\|x\|_2,$$

т. е.

$$\|x\| \geqslant c_2\|x\|_2, \quad x \in X, \ x \neq 0.$$

Эквивалентность норм $\|x\|$ и $\|x\|_2$ доказана. □

---

*) Мы воспользовались здесь неравенством $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$. Оно справедливо для любых элементов полунормированного пространства и легко следует из свойства 3° полунормы в определении 21 (см. ниже лемму 4 в п. 57.5).

5. Пусть снова $1 \leqslant p < +\infty$. Рассмотрим линейное подпространство всех последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_n \in \boldsymbol{R}$ (или $x_n \in \boldsymbol{C}$), состоящее из таких последовательностей, для которых

$$\|x\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < +\infty. \tag{57.10}$$

Функция $\|x\|_p$ является нормой, что проверяется аналогично конечному случаю (см. пример 4), так как, в частности, неравенство Минковского справедливо и для бесконечных сумм.

В случае, когда все элементы рассматриваемых последовательностей — действительные числа, их пространство с нормой (57.10) обозначается через l_p.

6. В п. 41.6 для линейного оператора $A: R^n \to R^m$ была введена норма по формуле (см. (41.41))

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |Ax|, \quad x \in R^n.$$

Это действительно норма, в смысле определения п. 57.3, в линейном пространстве $\mathscr{L}(R^n, R^m)$, что будет следовать из дальнейших рассмотрений.

Пусть X и Y — произвольные линейные нормированные пространства и $A: X \to Y$ — линейный оператор. Положим

$$\|A\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|, \tag{57.11}$$

где $\|x\| = \|x\|_X$ и $\|Ax\| = \|Ax\|_Y$.

В случае произвольно выбранных линейных пространств X и Y может оказаться, что верхняя грань $\|A\|$, определяемая равенством (57.11), не будет конечной для всякого линейного оператора $A: X \to Y$.

Пусть $\mathscr{L}(X, Y)$ как всегда (см. п. 57.2) — множество всех линейных операторов A, отображающих пространство X в пространство Y, $\mathscr{L}_c(X, Y)$ — множество тех из них, для которых $\|A\| < +\infty$. Покажем, что $\mathscr{L}_c(X, Y)$ также является линейным пространством, а $\|A\|$ — нормой в нем. Если $A \in \mathscr{L}_c(X, Y)$ и $B \in \mathscr{L}_c(X, Y)$, то

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(A+B)x\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax + Bx\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\| < +\infty,$$

и, следовательно, $A + B \in \mathscr{L}_c(X, Y)$. Для любого $\lambda \in \boldsymbol{R}$ (или $\lambda \in \boldsymbol{C}$ в случае комплексных пространств)

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\lambda Ax\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\lambda| \|Ax\| =$$
$$= |\lambda| \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| < +\infty$$

и, следовательно, $\lambda A \in \mathcal{L}_c(X, Y)$. Таким образом $\mathcal{L}_c(X, Y)$ действительно является линейным пространством.

Далее, очевидно, что из (57.11) непосредственно следует, что $\|A\| \geqslant 0$. При этом, если $\|A\| = 0$, т. е. $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = 0$, то для всех x таких, что $\|x\| \leqslant 1$ имеет место равенство $\|Ax\| = 0$, а следовательно, и $Ax = 0$. Но тогда и вообще для всех $x \in X$ также имеем $Ax = 0$. Действительно, если x такой элемент пространства X, что $\|x\| > 1$, то заведомо $x \neq 0$, а значит

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1.$$

Поэтому в силу уже доказанного $A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0$. Отсюда $\frac{1}{\|x\|} Ax = 0$ и, следовательно, для любого $x \in X: Ax = 0$. Это означает, что $A = 0$. Итак, $\|A\|$ — действительно норма в пространстве $\mathcal{L}_c(X, Y)$.

Если значение $\|A\|$, определяемое формулой (57.11) бесконечно: $\|A\| = +\infty$, то будем говорить, что норма оператора A бесконечна.

Норму $\|A\|$ (как конечную, так и бесконечную) можно получить и несколько другим способом. Именно, оказывается, что

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in X. \tag{57.12}$$

Для доказательства этой формулы заметим, что

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|. \tag{57.13}$$

В самом деле, с одной стороны, очевидно, что

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|,$$

ибо при увеличении числового множества его верхняя грань может только увеличиваться. С другой стороны, для любого элемента $x \in X$, такого что $0 < \|x\| \leqslant 1$, положим $y \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{\|x\|}$; тогда $\|y\| = 1$ и $\|Ay\| = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\| \geqslant \|Ax\|$. Отсюда

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|.$$

Из полученных неравенств и вытекает равенство (57.13).

Теперь имеем:

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|Ay\| = \|A\|,$$

т. е. формула (57.12) также доказана. Из нее очевидно следует, что для любого $x \in X$, $x \neq 0$,

$$\|Ax\| / \|x\| \leqslant \|A\|,$$

и. следовательно, для любого $x \in X$ имеет место неравенство

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\|,$$

где $\|x\|$ — норма в пространстве X, $\|Ax\|$ — норма в пространстве Y, а $\|A\|$ — норма в пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$. Это неравенство, очевидно, является обобщением неравенства (41.42) в п. 41.6.

Существует еще один подход к понятию нормы оператора, связанный с понятием так называемых ограниченных операторов.

Определение 24. *Оператор $A: X \to Y$ называется ограниченным, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех элементов $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\|.$$

Если A — линейный ограниченный оператор, то все постоянные $c > 0$, обладающие указанным свойством, ограничены снизу нулем, и потому их множество имеет конечную нижнюю грань. Обозначим ее через c_0:

$$c_0 = \inf\{c : \|Ax\| \leqslant c\|x\|, \quad x \in X\}.$$

Покажем, что

$$c_0 = \|A\|.$$

Прежде всего заметим, что справедливо неравенство

$$\|Ax\| \leqslant c_0\|x\|.$$

В самом деле, если бы нашелся такой элемент $x_0 \in X$, что $\|Ax_0\| > c_0\|x_0\|$, то нашлось бы число $\varepsilon > 0$, для которого выполняется неравенство $\|Ax_0\| > (c_0 + \varepsilon)\|x_0\|$. Однако это невозможно, так как согласно определению нижней грани существует такое число $c > 0$, что $c < c_0 + \varepsilon$ и для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$. В частности $\|Ax_0\| \leqslant c\|x_0\| < (c_0 + \varepsilon)\|x_0\|$. Таким образом, нижняя грань c_0 также удовлетворяет неравенству, с помощью которого определяется ограниченность оператора A. Поэтому в определении постоянной c_0 можно заменить нижнюю грань минимумом:

$$c_0 = \min\{c : \|Ax\| \leqslant c\|x\|, \quad x \in X\}.$$

Из неравенства $\|Ax\| \leqslant c_0\|x\|$ при $x \neq 0$ имеем

$$\|Ax\|/\|x\| \leqslant c_0,$$

откуда

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant c_0, \quad x \in X.$$

Случай строгого неравенства

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0, \quad x \in X,$$

невозможен, так как тогда нашлось бы такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0 - \varepsilon$$

и, следовательно, для любого $x \in X$, $x \neq 0$, тем более было бы справедливо неравенство

$$\|Ax\|/\|x\| < c_0 - \varepsilon, \quad \text{или} \quad \|Ax\| < (c_0 - \varepsilon)\|x\|, \quad x \in X,$$

что противоречило бы выбору c_0 как минимальной постоянной, обладающей свойством $\|Ax\| \leq c\|x\|$, $x \in X$.

Итак,

$$c_0 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Образно говоря, это равенство означает, что оператор A ограничен тогда и только тогда, когда он имеет конечную норму. Таким образом, множество ограниченных операторов составляет пространство $\mathscr{L}_c(X, Y)$.

В п. 41.6 было показано, что всякий линейный оператор $A: X \to Y$ в случае, когда линейные нормированные пространства X и Y конечномерны и в качестве норм в них взяты квадратичные нормы $\|x\|_2$ и $\|y\|_2$, $x \in X$, $y \in Y$, имеет конечную норму. Поскольку в конечномерных линейных пространствах все нормы эквивалентны (см. теорему 2 в примере 4), то отсюда следует, что *любой линейный оператор A, отображающий конечномерное линейное пространство X в конечномерное же линейное пространство Y, ограничен при любом выборе норм в этих пространствах, т. е. в этом случае*

$$\mathscr{L}(X, Y) = \mathscr{L}_c(X, Y).$$

7. Линейное пространство всех ограниченных действительных функций, определенных на произвольном множестве E, являющееся подпространством пространства $F(E)$ всех действительных функций $f: E \to \boldsymbol{R}$ (см. п. 57.2), превращается в нормированное, если в нем ввести норму по формуле

$$\|f\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup_{t \in E} |f(t)|. \tag{57.14}$$

Обозначим это пространство через $S(E)$. В случае, когда E является метрическим пространством, подпространство пространства $S(E)$, состоящее из непрерывных на E функций f, обозначим через $C(E)$ *), а норму (57.14) в этом пространстве будем обозначать также и через $\|f\|_C$.

*) C — первая буква латинского слова continuum — непрерывный.

Если E является компактом в R^n, то (см. теорему 3 в п. 19.5)

$$\|f\|_C = \sup_{t\in E} |f(t)| = \max_{t\in E} |f(t)|.$$

В частности, это верно для пространства $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ числовой прямой.

8. Пусть фиксировано число p, $1 \leqslant p < +\infty$. Рассмотрим множество функций f, определенных на некотором отрезке $[a, b]$ и таких, что интеграл

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx$$

сходится. Это множество, как легко проверить, образует линейное пространство, которое обозначается через $RL_p[a, b]$ *).

Положим

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right]^{1/p}. \tag{57.15}$$

Покажем, что (57.15) является полунормой в $RL_p[a, b]$. Из формулы (57.15), очевидно, сразу следует, что $\|f\|_p \geqslant 0$. При этом из условия $\|f\|_p = 0$ не следует, что $f = 0$. В самом деле, рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x = a, \\ 0 & \text{при} \quad x \in (a, b]. \end{cases}$$

Ясно, что $\|f\|_p = 0$, но функция f не равняется тождественно нулю на отрезке $[a, b]$, и потому она не является нулем линейного пространства $RL_p[a, b]$.

Проверим однородность выражения (57.14): для всех $f \in RL_p[a, b]$ и любого $\lambda \in \boldsymbol{R}$ (или $\lambda \in \boldsymbol{C}$) имеем

$$\|\lambda f\|_p = \left[\int_a^b |\lambda f(t)|^p\,dt\right]^{1/p} = |\lambda| \left[\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right]^{1/p} = |\lambda|\,\|f\|_p.$$

Докажем для (57.15) неравенство треугольника. Для любых $f \in RL_p[a, b]$ и $g \in RL_p[a, b]$, согласно неравенству Минковского для интегралов (см. п. 28.4*), получим:

$$\|f+g\|_p = \left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b |f(t)^p|\,dt\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right]^{1/p} = \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Итак, действительно, $\|f\|_p$ является полунормой (не являющейся нормой) в линейном пространстве $RL_p[a, b]$.

*) R — первая буква фамилии Б. Римана (B. Riemann), а L — первая буква фамилии А. Лебега (H. Lebesgue).

Аналогичная конструкция справедлива и для бесконечных промежутков; соответствующие полунормированные пространства будем также обозначать через RL_p.

9. Рассмотрим множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Оно является линейным пространством. Мы уже знаем, что в нем можно ввести норму $\|f\|_C$, определенную в примере 7 этого пункта. Можно в нем рассмотреть и полунорму (57.15), причем в этом пространстве полунорма (57.15) является уже нормой.

Действительно, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\|f\|_p=0$, $1\leqslant p<+\infty$, и, следовательно,

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx=0,$$

то из неотрицательности и непрерывности функции $|f(x)|^p$, $x\in[a, b]$, следует (см. свойство 9 интеграла в п. 28.1), что $f(x)\equiv 0$ на $[a, b]$.

Пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ *функций с нормой* (57.15) *обозначается через* $CL_p[a, b]$.

Подобным же образом строятся аналогичные пространства для неограниченных промежутков, а также и для функций многих переменных.

Если одно и то же множество принадлежит различным линейным нормированным или полунормированным пространствам (например, пространства $C[a, b]$ и $CL_p[a, b]$ состоят из одних и тех же функций), то часто бывает полезным оценить одну норму (полунорму) этих элементов через другую. Теоремы, выражающие подобные оценки, называются обычно *теоремами вложения.*

Поясним сказанное на примере, сформулированном в виде леммы.

Лемма 3. *Пусть* $-\infty<a<b<+\infty$, $1<p<+\infty$. *Если* $f\in RL_p[a, b]$, *то*

$$\|f\|_1\leqslant(b-a)^{1/q}\|f\|_p,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{57.16}$$

а если $f\in RL_p[a, b]\cap S[a, b]$, *то*

$$\|f\|_p\leqslant(b-a)^{1/p}\|f\|_\infty. \tag{57.17}$$

Доказательство. Принимая во внимание, что полунорма $\|f\|_p$ определяется по формуле (57.15), получим, используя неравенство Гёльдера (см. п. 28.4*),

$$\|f\|_1=\int_a^b |f(t)|\cdot 1\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right]^{1/p}\left[\int_a^b dx\right]^{1/q}=(b-a)^{1/q}\|f\|_p,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

тем самым (57.16) доказано. Неравенство (57.17) также сразу вытекает из определений (57.14) и (57.15) соответствующих норм:

$$\|f\|_p=\left[\int\limits_a^b |f(t)|^p\,dt\right]^{1/p}\leqslant\left\{\int\limits_a^b\left[\sup_{[a,b]}|f(t)|\right]^p dt\right\}^{1/p}=$$

$$=\|f\|_\infty\left(\int\limits_a^b dt\right)^{1/p}=(b-a)^{1/p}\|f\|_\infty.\ \square$$

Упражнение 15. Обозначим через $C^1L_2[a, b]$ подмножество пространства $CL_2[a, b]$, состоящее из непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций. Доказать, что

1) $C^1L_2[a, b]$ является линейным нормированным пространством, если под нормой функции $f\in C^1L_2[a, b]$ понимать ее норму в пространстве $CL_2[a, b]$;

2) оператор дифференцирования D является линейным неограниченным оператором D: $C^1L_2[a, b]\to CL_2[a, b]$.

Указание: полезно рассмотреть функции $\sin nx\in C^1L_2[-\pi, \pi]$.

57.5. СВОЙСТВА ПОЛУНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В полунормированных пространствах можно ввести понятие сходящейся последовательности и ее предела.

Определение 25. *Если последовательность $\{x_n\}$ элементов полунормированного (в частности, нормированного) линейного пространства X такова, что существует элемент $x\in X$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$, то последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся по полунорме (соответственно по норме) к элементу x и пишется $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.*

Вводя в каком-либо линейном пространстве функций различные полунормы (в частности, нормы), будем получать различные понятия сходимости последовательностей функций. Например, сходимость в смысле нормы (57.14) означает равномерную сходимость; сходимость в смысле полунормы (57.15) является уже сходимостью другого рода: она называется *сходимостью в среднем*, или, подробнее, в смысле p-среднего (иногда говорят и просто о сходимости в смысле пространства L_p). Мы уже встречались с частным случаем сходимости такого рода при $p=1$: см. лемму 2 в п. 55.2, следствие леммы 4 в п. 56.7 и метрику (57.2), а при $p=2$ — в следствии из теоремы 12 п. 55.9. При $p=2$ сходимость в среднем называется также сходимостью *в смысле среднего квадратичного*.

Неравенства (57.16) и (57.17) между различными полунормами функций позволяют установить связь между различными видами сходимостей функций.

Например, пусть последовательность функций f_n, $n=1, 2, \ldots$ и функция f таковы, что

1°. Последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к функции f.

2°. При всех $n=1, 2, \ldots$: $f_n - f \in S[a, b] \cap RL_p[a, b]$.

Тогда последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f на отрезке $[a, b]$ и в смысле p-среднего, $1 \leqslant p < +\infty$.

В самом деле, в силу (57.17) справедливо неравенство

$$\|f_n - f\|_p \leqslant (b-a)^{1/p} \|f_n - f\|_\infty.$$

Равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f на отрезке $[a, b]$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Упражнение 16*. Построить пример последовательности непрерывных неотрицательных на отрезке функций, сходящейся в среднем, но не сходящейся ни в одной точке.

Следует обратить внимание на то, что в полунормированном пространстве у сходящейся последовательности предел, вообще говоря, не единственен. При этом, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то полунорма разности двух пределов равна нулю: $\|a-b\| = 0$. Это сразу следует из неравенства

$$\|a-b\| \leqslant \|a-x_n\| + \|x_n - b\|.$$

Лемма 4. *Для любых двух элементов x и y линейного полунормированного пространства X справедливо неравенство*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|. \tag{57.18}$$

Доказательство. Так как

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|,$$

то

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$$

и аналогично

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\|.$$

Из последних двух неравенств и следует неравенство (57.18). □

Определение 26. *Пусть X — линейное полунормированное (в частности, нормированное) пространство. Множество $E \subset X$ называется ограниченным, или, подробнее, ограниченным по полунорме (соответственно по норме), если существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $\|x\| \leqslant M$.*

Лемма 5. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится по полунорме в X, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $x = \lim_{n\to\infty} x_n$; в силу сходимости последовательности существует такое n_0, что если $n \geqslant n_0$, то $\|x_n - x\| \leqslant 1$ и, следовательно,

$$\|x_n\| = \|(x_n - x) + x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\| \leqslant \|x\| + 1.$$

Положим $M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{n_0-1}\|, \|x\|+1\}$; тогда, очевидно, для всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $\|x_n\| \leqslant \leqslant M$. $\square$

На линейном пространстве с полунормой можно определить понятие непрерывной функции. Нам в дальнейшем (см. п. 57.9) понадобится понятие непрерывности функции одной и двух переменных на полунормированном пространстве. Определим эти понятия.

Пусть X — полунормированное пространство. Действительная или комплексная функция f, определенная на X, называется *непрерывной в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $\|x - x_0\| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть Y — также полунормированное пространство. Действительная или комплексная функция f, определенная на произведении $X \times Y$, называется *непрерывной в точке* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $(x, y) \in X \times Y$, удовлетворяющих неравенствам $\|x - x_0\| < \delta$, $\|y - y_0\| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Если функция f непрерывна в каждой точке некоторого множества, то она называется *непрерывной* на этом множестве.

Определение непрерывности можно, конечно, сформулировать для полунормированных пространств и пользуясь последовательностями элементов пространства.

Например, числовая функция f, определенная на полунормированном пространстве X, называется непрерывной в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 по полунорме пространства X: $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Эквивалентность двух сформулированных выше определений предела функции доказывается по той же схеме, что и в случае, когда X — множество действительных чисел (см. п. 4.5).

Лемма 6. *Полунорма $\|x\|$ является непрерывной функцией на полунормированном пространстве X.*

Доказательство. Пусть заданы элемент $x_0 \in X$ и число $\varepsilon > 0$. Тогда для всех таких x, что $\|x - x_0\| < \varepsilon$ в силу леммы 4 имеем $|\|x\|-\|x_0\||<\|x-x_0\|<\varepsilon$, т. е. условие непрерывности функции на X выполняется при выборе $\delta=\varepsilon$. □

Определение 27. *Пусть X и Y — линейные полунормированные (в частности, нормированные) пространства. Отображение f, изоморфно отображающее пространство X как линейное пространство на пространство Y (см. определение 19), и такое, что для любого $x \in X$ справедливо равенство*

$$\|x\|_X=\|f(x)\|_Y,$$

называется изоморфным отображением или изоморфизмом линейных полунормированных (нормированных) пространств.

Если для линейных полунормированных (нормированных) пространств X и Y существует изоморфное отображение X на Y, то они называются изоморфными.

Два изоморфных полунормированных (нормированных) пространства могут отличаться друг от друга только природой своих элементов, а не свойствами пространства. Поэтому в дальнейшем мы часто не будем различать изоморфные полунормированные (нормированные) пространства, состоящие из различных элементов; такие пространства можно «отождествлять».

Поясним это подробнее. Пусть X и Y — линейные полунормированные пространства, $Y \subset Y^*$, а $f: X \to Y$ — изоморфное отображение. Рассмотрим множество $X^*=X \cup (Y^* \setminus Y)$, получающееся из пространства X присоединением к нему множества $Y^* \setminus Y$. Таким образом: $X^* \setminus X = Y^* \setminus Y$. Определим для элементов множества X^* операции сложения и умножения на число, а также норму — они будут снабжаться индексом X^*. Для удобства введем отображение $F: X^* \to Y^*$, задаваемое формулой

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in X, \\ x & \text{если } x \in X^* \setminus X. \end{cases} \tag{57.19}$$

Ясно, что F является взаимно однозначным отображением (биекцией) множества X^* на Y^*.

Теперь для любых $x \in X^*$, $y \in X^*$ и любых чисел λ, μ положим

$$(\lambda x+\mu y)_{X^*} \overset{\text{def}}{=} F^{-1}[\lambda F(x)+\mu F(y)],$$
$$\|x\|_{X^*} \overset{\text{def}}{=} \|F(x)\|.$$

Так определенное пространство X^* является линейным полунормированным (нормированным), изоморфным пространству Y^* и содержащим X в качестве своего подмножества. Под утверждением «отождествим в пространстве Y^* множество Y с изоморфным ему пространством X» и понимается рассмотрение указанного выше пространства X^* (сравните с отождествлением изометрических метрических пространств п. 57.1).

Упражнения. 17. Пусть X — линейное полунормированное пространство. Элементы $x \in X$ и $y \in X$ называются *эквивалентными*, если $\|x-y\|=0$. Обозначим через $\tilde{X}$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов пространства X. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, λ — число. Определим $\tilde{x}+\tilde{y}$ как элемент множества $\tilde{X}$, содержащий $x+y$, а $\lambda\tilde{x}$ — как элемент из $\tilde{X}$, содержащий λx. Положим $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}=\|x\|_X$. Доказать, что данные определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x \in \tilde{x}$ и $y \in \tilde{y}$, и что $\tilde{X}$ является линейным нормированным пространством с нормой $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}$.

18. Доказать, что функции $x+y$ и λx непрерывны на всяком линейном полунормированном пространстве X (x и y — элементы этого пространства, а λ — число), иначе говоря, что операции сложения и умножения на число непрерывны в указанном пространстве.

57.6. СВОЙСТВА НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В линейном нормированном пространстве X можно естественным образом ввести расстояние между элементами этого пространства. Именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. *Линейное нормированное пространство X является метрическим пространством с метрикой*

$$\rho(x, y)=\|x-y\|, \tag{57.20}$$

при этом сходимость последовательностей в пространстве X по этой метрике совпадает со сходимостью по норме.

Доказательство. Функция $\rho(x, y)$, определенная формулой (57.20), действительно является расстоянием: свойства расстояния (см. п. 57.1) вытекают из свойств нормы $1^\circ - 4^\circ$ (проверьте это). Второе утверждение леммы очевидно.

Будем говорить, что *метрика* (57.20) *порождается заданной нормой пространства* X. Например, метрика, порожденная нормой $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ в арифметическом линейном пространстве n-мерных вещественных векторов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, является метрикой евклидова пространства R^n, определенной формулой (18.1).

Последовательность точек пространства X, фундаментальная относительно метрики (57.20), называется также *фундаментальной относительно нормы*, заданной в пространстве X.

Упражнение 19. Доказать, что множество в линейном нормированном пространстве ограничено по норме (см. определение 26 в п. 57.5) тогда и только тогда, когда оно ограничено как множество метрического пространства в смысле метрики (57.20) (см. упражнение 1 в п. 57.1).

Пример. Рассмотрим пространство l_p, последовательностей действительных чисел с нормой (57.10). Обозначим через e_n последовательность, у которой n-й член равен единице, а все остальные нули. Очевидно, что при $n \neq m$

$$\|e_n-e_m\|=(1+1)^{1/p}=2^{1/p}.$$

Поэтому последовательность элементов e_n, $n=1, 2, \ldots$, пространства l_p не может содержать фундаментальной, а, следовательно, и сходящейся подпоследовательности.

Последовательность $\{e_n\}$ ограничена, ибо для всех n имеем $\|e_n\|=1$. Она образует замкнутое множество в l_p, так как множество $\{e_n\}$ не имеет предельных точек в l_p (в противном случае в ней нашлась бы сходящаяся подпоследовательность).

Таким образом, в бесконечномерном пространстве существуют ограниченные последовательности, из которых нельзя выделить сходящуюся. Существуют также и ограниченные замкнутые множества, у которых не из всякой последовательности их точек можно выделить сходящуюся.

Замечание 1. Если в линейном пространстве X введены две нормы элементов $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$, причем они эквивалентны (см. определение 23 в п. 57.4), то последовательность $x_n \in X$, $n=1, 2, \ldots$, сходится к элементу $x \in X$ в смысле нормы $\|\cdot\|^{(1)}$ тогда и только тогда, когда она сходится к x в смысле нормы $\|\cdot\|^{(2)}$.

Действительно, в силу эквивалентности норм $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$ существуют такие постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$, что выполняются неравенства

$$c_1\|x_n-x\|^{(2)} \leqslant \|x_n-x\|^{(1)} \leqslant c_2\|x_n-x\|^{(2)}.$$

Из этих неравенств сразу и следует эквивалентность сходимостей последовательности $\{x_n\}$ к x в смысле норм $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$.

Из доказанной в теореме 2 п. 57.4 эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве следует, что сходимости последовательностей его точек по всем нормам эквивалентны. Поскольку сходимость по квадратичной норме $\|x\|_2$ равносильна покоординатной сходимости (см. п. 18.1 и 18.4), то сходимость последовательности точек в конечномерном пространстве по любой норме равносильна сходимости числовых последовательностей координат рассматриваемых точек относительно произвольного базиса.

Замечание 2. Отметим, что в случае, когда полунорма не является нормой даже такая простая функция как линейная на конечномерном линейном полунормированном пространстве может оказаться не непрерывной. Рассмотрим, например, двумерное арифметическое пространство X векторов $x=(x_1, x_2)$ с полунормой $\|x\|=|x_1|$. Это действительно полунорма, так как $\|x\|= =|x_1|\geqslant 0$. Кроме того, для любого числа λ имеем $\lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2)$ и потому $\|\lambda x\|=|\lambda x_1|=|\lambda||x_1|=|\lambda|\|x\|$. Наконец, если $y=(y_1, y_2)$ также является элементом из X, то $x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2)$, следовательно $\|x+y\|=|x_1+y_1|\leqslant|x_1|+|y_1|=\|x\|+\|y\|$. Таким образом, все свойства полунормы выполнены.

Покажем, что линейная функция $f(x)=x_2$ не непрерывна на X. Действительно, для последовательности $x^{(n)}=(1/n, 1)$ любая точка вида $x=(0, x_2)$ (x_2 произвольно) является ее пределом в смысле рассматриваемой полунормы:

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}-x\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

В частности точка $O=(0, 0)$ является пределом последовательности $\{x^{(n)}\}$. Однако

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = 1 \neq 0 = f(O).$$

Это и означает, что функция $f(x)=x_2$ не является непрерывной по полунорме $\|x\|=|x_1|$.

Подчеркнем, однако, что если в конечномерном пространстве полунорма является нормой, то всякая линейная функция будет непрерывна относительно этой нормы. Действительно, пусть X — n-мерное линейное нормированное пространство и f — линейный функционал на X. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в X и, следовательно, любой элемент $x\in X$ представим и притом единственным образом в виде $x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$. Поскольку f — линейный функционал, то

$$f(x)=f(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)=$$
$$=x_1f(e_1)+\ldots+x_nf(e_n)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n,$$

где $a_k=f(e_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$, — фиксированные для f числа. Вспоминая, что сходимость последовательности точек по любой норме в конечномерном пространстве эквивалентна ее покоординатной сходимости, сразу убеждаемся, что из полученной формулы $f(x)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n$ действительно следует непрерывность функции f.

Лемма 8. *Норма является непрерывной функцией на линейном нормированном пространстве в смысле метрики* (57.20).

В силу равенства (57.20) это следует из того, что полунорма непрерывна по полунорме (см. лемму 6 в п. 57.5).

Определение 28. *Линейное нормированное пространство называется полным, если оно является полным метрическим пространством в смысле метрики, порождаемой нормой данного пространства.*

Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством *).

Линейное нормированное пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой (57.14) является банаховым пространством. Мы в этом убедились в п. 57.1, когда рассматривали метрическое пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с расстоянием (57.1), которое как раз порождается нормой (57.14). Мы видели, что полнота пространства $C[a, b]$ сле-

*) С. Банах (1892—1945) — польский математик.

дует из того, что сходимость последовательности в этом пространстве означает ее равномерную сходимость на отрезке $[a, b]$.

Теорема 3. *Всякое линейное нормированное пространство содержится и плотно в некотором банаховом пространстве.*

Доказательство. Согласно теореме 1 п. 57.1, достаточно показать, что на пополнение X^* линейного нормированного пространства X, рассматриваемого как метрическое с метрикой (57.20), можно продолжить с X алгебраические операции и норму. Это можно сделать с помощью предельного перехода. Как и при доказательстве теоремы 1, будем считать, что $X \subset X^*$, иначе говоря, отождествим пространство X с изометричным ему подпространством построенного там пополнения X^*.

Пусть, например, $x \in X^*$ и $y \in X^*$. В силу плотности X в X^* существуют последовательности $x_n \in X$ и $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$.

Покажем, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится. Действительно,

$$\rho(x_n + y_n, x_m + y_m) = \|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| = \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m).$$

Из сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что они фундаментальные, поэтому последовательность $\{x_n + y_n\}$ также фундаментальная и, следовательно, в силу полноты X^*, сходящаяся.

Положим, по определению,

$$x + y = \lim_{n \to \infty} (x_n + y_n).$$

Аналогично с помощью предельного перехода определяется и λx, $x \in X^*$.

Легко проверить, что определенные так алгебраические операции $x + y$, λx для элементов пополнения X^* не зависят от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, таких, что $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. Также легко убедиться, что в случае, когда элементы принадлежат исходному пространству X, определенные нами алгебраические операции совпадают с заданными.

Определим теперь норму для $x \in X^*$. Пусть $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Покажем что последовательность $\{\|x_n\|\}$ фундаментальная. В самом деле, из неравенства (57.18) для всех натуральных n и m имеем

$$\bigl|\|x_n\| - \|x_m\|\bigr| \leqslant \|x_n - x_m\| = \rho(x_n, x_m). \qquad (57.21)$$

Последовательность $\{x_n\}$, будучи сходящейся, является и фундаментальной, поэтому из неравенства (57.21) следует, что и числовая последовательность $\{\|x_n\|\}$ фундаментальна, а значит, сходится.

Положим, по определению,

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Так определенная норма $\|x\|$, $x \in X^*$, не зависит от выбора последовательности $x_n \in X$, $n=1, 2, \ldots$, такой, что $x_n \to x$. Легко проверить также, используя предельный переход, что для функции $\|x\|$, $x \in X^*$, выполняются свойства нормы $1^\circ - 4^\circ$ и что в случае $x \in X$ мы получаем прежнюю норму. $\square$

В качестве примера отметим линейное нормированное пространство $CL_p[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой (57.15). Эта норма при $p=1$ порождает метрику (57.2). Можно показать, что метрическое пространство непрерывных функций с метрикой (57.2) не является полным. Согласно доказанной теореме, рассматриваемое линейное нормированное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций можно дополнить до полного пространства. Это банахово пространство обозначается $L[a, b]$.

Определение 29. *Система элементов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) линейного полунормированного пространства X называется полной в этом пространстве, если для каждого элемента $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$ данной системы и такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что выполняется неравенство*

$$\|x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n})\| < \varepsilon. \tag{57.22}$$

Сформулируем это определение несколько иначе, введя предварительно еще одно понятие.

Определение 30. *Множество $A \subset X$ называется плотным в полунормированном пространстве X, если для любого элемента $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $a \in A$, что*

$$\|x - a\| < \varepsilon.$$

Если X — нормированное и, следовательно, метрическое пространство, то определение 30 в силу (57.20) приводит к тому же понятию плотности множества, что и определение 6 из п. 57.1. Теперь можно сказать:

Система $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ — полна в пространстве X, если множество конечных линейных комбинаций ее элементов, т. е. ее линейная оболочка (см. определение 15 в п. 57.2) *образует плотное в X множество.*

Если X является нормированным пространством, то в нем, как во всяком метрическом пространстве, имеет смысл понятие замыкания множества, а поскольку плотность некоторого множества в метрическом пространстве означает, что замыкание этого множества совпадает с самим пространством (см. определение 6 в п. 57.1), то в этом случае определение 30 можно перефразировать и таким образом:

система элементов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — *некоторое множество индексов) линейного нормированного пространства* X *называется полной, если замыкание ее линейной оболочки* (*см. п.* 57.2) *совпадает со всем пространством* X.

С частным случаем понятия полноты для системы функций мы уже встречались в п. 55.8.

Определение 31. *Если в линейном нормированном пространстве* X *существует счетное множество элементов, образующее полную систему пространства* X, *то пространство* X *называется сепарабельным.*

В заключение этого пункта введем понятие базиса, а предварительно — понятие ряда в пространстве X.

Определение 32. *Пусть* x_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — *последовательность элементов линейного нормированного пространства* X. *Положим* $s_n = x_1 + \ldots + x_n$, $n = 1, 2, \ldots$; *пара последовательностей* $\{x_n\}$, $\{s_n\}$ *называется рядом (с общим членом* x_n) *и обозначается*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n; \tag{57.23}$$

элементы s_n *называются* n-*ми частичными суммами ряда* (57.23).

Если последовательность s_n, $n = 1, 2, \ldots,$ сходится в пространстве X, то ряд (57.23) называется *сходящимся*. В этом случае предел $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$ последовательности s_n, $n = 1, 2, \ldots,$ называется *суммой ряда* (57.23) и пишется

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s.$$

Таким образом, как и в случае числовых рядов, мы будем одним и тем же символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ обозначать как сам ряд, так и его сумму, если он сходится.

Как и для числовых рядов для рядов в линейных нормированных пространствах справедливы следующие утверждения.

Если ряд (57.23) *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$, *причем если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = s$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda s$.

Если в пространстве X сходятся два ряда, то сходится и ряд, общий член которого равен сумме их членов с одинаковыми номерами, и его сумма равна сумме сумм данных рядов.

Определение 33. *Последовательность элементов e_n, $n=1, 2, \ldots$ линейного нормированного пространства называется базисом, если, каков бы ни был элемент x, существует, и притом единственная, последовательность чисел λ_n, $n=1, 2, \ldots$, такая что*

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n. \tag{57.24}$$

Таким образом, если последовательность $\{e_n\}$ является базисом пространства X, то для каждого элемента $x \in X$ существует, и притом единственная, последовательность чисел $\{\lambda_n\}$, такая, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что при всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\|x-(\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n)\| < \varepsilon. \tag{57.25}$$

Формула (57.24) называется разложением элемента x по базису $\{e_n\}$.

Нетрудно убедиться, что если система элементов $\{e_n\}$ образует базис, то она линейно независима. Это сразу следует из единственности разложения элементов пространства по базису. В самом деле, если бы элементы e_n, $n=1, 2, \ldots$, оказались линейно зависимыми, то среди них нашлось бы конечное множество таких $e_{n_1}, \ldots, e_{n_k}$, что для некоторых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, которые не все равны нулю, имело бы место равенство $\lambda_1 e_{n_1}+\ldots+\lambda_k e_{n_k}=0$, т. е. получилось бы разложение нуля по элементам базиса с коэффициентами, которые не все равны нулю. Поскольку для нуля имеется тривиальное разложение $0=\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 e_n$, то тем самым нарушено условие единственности разложения элементов по базису.

Если линейное нормированное пространство имеет базис, состоящий из конечного или счетного множества элементов, то это пространство сепарабельно. Действительно, нетрудно проверить, что множество всех конечных линейных комбинаций элементов указанных базисов с рациональными коэффициентами счетно и плотно во всем пространстве.

Замечание. Подчеркнем отличие между последовательностью элементов, образующих полную систему, и последовательностью элементов, образующих базис. В первом случае коэффициенты λ_k, $k=1, 2, \ldots, n$, в неравенстве (57.22) зависят, вообще говоря, не только от выбора элемента $x \in X$, но и от выбора числа ε. Во втором же случае коэффициенты λ_k, $k=1, 2, \ldots, n$, в неравенстве (57.25) определяются только самим элементом (они называются *коэффициентами разложения элемента x по данному базису* или *координатами элемента x при данном базисе*) и лишь их количество, т. е. число n_ε, зависит от выбора ε.

Существуют сепарабельные банаховы пространства, в которых нет базиса. В следующем пункте будет рассмотрен более узкий класс пространств, в которых базис всегда существует.

57.7. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Определение 34. *Действительная функция, определенная на множестве упорядоченных пар элементов действительного линейного пространства и обозначаемая (x, y), $x \in X$, $y \in X$, называется скалярным умножением, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1°) $(x, y) = (y, x)$, $x \in X$, $y \in X$;

2°) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda (x, z) + \mu (y, z)$, $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$, λ *и* μ — *действительные числа:*

3°) $(x, x) \geqslant 0$, $x \in X$;

4°) *если* $(x, x) = 0$, *то* $x = 0$.

Заметим, что из свойств 2° следует, что для любого $x \in X$ справедливо равенство

$$(x, 0) = 0.$$

Действительно, $(x, 0) = (x, 0 \cdot 0) = 0 (x, 0) = 0$.

Определение 35. *Действительная функция (x, y), определенная на множестве упорядоченных пар элементов действительного линейного пространства X, $x \in X$, $y \in X$ и удовлетворяющая лишь условиям* 1, 2, 3, *называется полускалярным умножением.*

Аналогичным образом вводится понятие и полускалярного (в частности, скалярного) умножения в комплексном линейном пространстве $\boldsymbol{R}$. В этом случае комплекснозначная функция (x, y) называется полускалярным (соответственно скалярным) умножением, если она удовлетворяет свойству 2° для любых комплексных чисел λ и μ, свойству 3° и свойству

$$1'^{\circ})\ (x, y) = \overline{(y, x)}, \quad x \in X, \quad y \in X,$$

где, как всегда, черта над числом обозначает сопряженное ему комплексное число.

В дальнейшем под линейным пространством будем понимать действительное линейное пространство, если не оговорено что-либо другое.

Результат скалярного (полускалярного) умножения двух элементов $x \in X$, и $y \in Y$ называется их *скалярным* (*полускалярным*) *произведением* (x, y). Линейные пространства, для элементов которых определена операция скалярного (полускалярного) умножения, называются *линейными пространствами со скалярным* (*полускалярным*) *произведением*.

Лемма 9. *Для любой пары векторов x и y линейного пространства X с полускалярным произведением справедливо неравенство*

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y), \tag{57.26}$$

которое называется неравенством Коши — Шварца.

Доказательство. Для любого действительного числа λ в силу свойства 3 полускалярного умножения имеем

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) \geqslant 0.$$

Применив свойства 1° и 2° полускалярного умножения, получим:

$$\lambda^2 (x, x) + 2\lambda (x, y) + (y, y) \geqslant 0.$$

Если $(x, x) = 0$, то $2\lambda (x, y) + (y, y) \geqslant 0$. Поскольку это справедливо для любого действительного λ, то $(x, y) = 0$ и, следовательно, неравенство (57.26) справедливо — обе его части обращаются в ноль. Если же $(x, x) \neq 0$, то дискриминант получившегося квадратичного относительно λ трехчлена неположителен:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0,$$

что равносильно условию (55.26).

Следствие. *Для любой пары векторов линейного пространства с полускалярным произведением справедливо неравенство*

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}, \quad x \in X, \quad y \in X.$$

Действительно, применив неравенство Коши—Шварца, получим:

$$(x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant$$
$$\leqslant (x, x) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)} + (y, y) = \left[\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}\right]^2 \square.$$

Упражнение 20. Доказать, что в комплексном линейном пространстве X с полускалярным произведением выполняется неравенство

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y), \quad x \in X, \quad y \in X.$$

Если в линейном пространстве X с полускалярным произведением положить

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in X, \tag{57.27}$$

то функция $\|x\|$ удовлетворяет свойствам 1°—3° полунормы. Свойство 1° полунормы следует из свойства 3° полускалярного умножения, свойство 2° — из свойства 2°, свойство 3° полунормы — из следствия леммы 9.

Если же полускалярное умножение является скалярным, то полунорма (57.27) является нормой. Действительно, свойство 4° нормы следует из свойства 4 скалярного умножения. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 10. *Каждое линейное пространство со скалярным (соответственно полускалярным) произведением является нормированным (соответственно полунормированным) пространством с нормой (соответственно полунормой), определяемой формулой* (57.27), *а следовательно, и метрическим пространством с метрикой* (57.20).

Полунорму (57.27) будем называть *полунормой* (соответственно *нормой*), *порожденной заданным полускалярным* (*скалярным*) *произведением*. Расстояние (57.20), порожденное нормой (57.27) линейного пространства со скалярным произведением, будем также называть *расстоянием, порожденным заданным скалярным произведением*.

Применяя обозначение полунормы, неравенство (57.26) можно переписать в виде

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|. \tag{57.28}$$

57.8. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

1. В множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$ обычная операция умножения является и скалярным умножением в смысле определения 34.

В множестве комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ *скалярным произведением* чисел x и y является произведение $x\bar{y}$.

2. Действительное арифметическое n-мерное векторное пространство R^n, в котором скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$ определяется по формуле (см. (18.32) в п. 18.4)

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

является линейным пространством со скалярным произведением в смысле определения 34 п. 57.7. В этом случае норма элемента $x \in R^n$ совпадает с его длиной $|x|$ (см. п. 57.4, пример 2):

$$\|x\| = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

а соответствующая метрика с расстоянием в n-мерном арифметическом точечном пространстве:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Напомним, что для этого пространства неравенство Коши — Шварца было доказано нами раньше (см. лемму 1 в п. 18.1 и неравенство (18.39) в п. 18.4).

В арифметическом комплексном пространстве C^n (см. п. 57.2) скалярное произведение вводится по формуле

$$(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + \ldots + x_n \bar{y}_n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in C^n.$$

3. Рассмотрим линейное полунормированное пространство $RL_2[a, b]$ из примера 8, п. 57.4, состоящее из функций с интегрируемым (вообще говоря, в несобственном смысле) на отрезке $[a, b]$ квадратом, т. е. из таких функций f, для которых

$$\int_a^b f^2(t)\,dt < +\infty.$$

Пусть $f \in RL_2[a, b]$ и $g \in RL_2[a, b]$. Вспомним, что произведение функций, интегрируемых по Риману на некотором отрезке, также интегрируемо по Риману на этом отрезке. Поэтому на любом отрезке $[\xi, \eta] \subset [a, b]$, не содержащем особых точек функций f и g (см. п. 55.1), произведение fg также интегрируемо по Риману, и следовательно имеет смысл рассматривать несобственный интеграл

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt. \tag{57.29}$$

Поскольку, кроме того, в любой не являющейся особой для функции f или g точке x справедливо неравенство

$$|f(t)\,g(t)| \leqslant \frac{f^2(t)+g^2(t)}{2}\ ^{*)},$$

то интеграл (57.29) сходится, и притом абсолютно.

Полускалярное произведение в этом пространстве определяется формулой

$$(f,\ g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt. \tag{57.30}$$

Свойства $1°$, $2°$, $3°$ полускалярного произведения легко проверяются. Полученное пространство с полускалярным произведением (57.30) будем также обозначать через $RL_2[a, b]$.

Заметим, что неравенство (57.26) в этом случае может быть записано следующим образом:

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,dt \int_a^b g^2(t)\,dt;$$

оно является частным случаем неравенства Гёльдера (см. п. 28.4*) при $p=q=2$ и называется неравенством Коши — Буняковского **).

Полунорма, порожденная полускалярным произведением (57.30), имеет, очевидно, вид

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}, \tag{57.31}$$

*) Оно следует из очевидного неравенства $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geqslant 0$.

**) В. Я. Буняковский (1804—1889) — русский математик.

т. е. совпадает с полунормой (57.15), рассмотренной в примере 8, п. 57.4 при $p=2$. Отсюда следует, что полускалярное произведение (57.30) не является скалярным, так как в п. 57.4 было установлено, что полунорма (57.15) не является нормой при всех $p \geqslant 1$.

Однако, в подпространстве $CL_2[a, b]$ пространства $RL_2[a, b]$, состоящем только из функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, полускалярное произведение (57.30) является уже скалярным, ибо, как было показано в примере 9, п. 57.4, в этом случае

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}, \quad f \in CL_2[a, b]$$

является не только полунормой, но и нормой.

Для расстояния между двумя непрерывными функциями f и g в этом пространстве получаем формулу

$$\rho(f, g) = \|f-g\| = \left\{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,dx\right\}^{1/2}. \tag{57.32}$$

Мы уже встречались со сходимостью функций в смысле этой метрики: см., например, следствие теоремы 12 в п. 55.9.

Все сказанное естественным образом распространяется и на функции, определенные на любом бесконечном промежутке, в частности на всей оси.

Упражнение 21. Пусть X — линейное пространство с полускалярным произведением. Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называются *эквивалентными*, если $\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = 0$. Обозначим через $\tilde{X}$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов пространства X. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, λ и μ — числа. Определим $\lambda\tilde{x}+\mu\tilde{y}$ как элемент множества $\tilde{X}$, содержащий $\lambda x+\mu y$, и положим $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$. Доказать, что эти определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x \in \tilde{x}$ и $y \in \tilde{y}$, и что $\tilde{X}$ является линейным пространством, а $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — скалярным произведением в нем.

57.9. СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Линейное пространство с полускалярным произведением является согласно (57.27) и полунормированным. Поэтому для него определено понятие сходящейся последовательности, ее предела, и понятие непрерывной функции (см. п. 57.5).

Лемма 11. *Полускалярное произведение* (x, y) *является непрерывной функцией* (см. п. 57.5) *своих аргументов* x *и* y *на множестве* $X \times X$, *на котором оно задано*: $x \in X$, $y \in X$.

Доказательство. В самом деле для любых $x_0 \in X$, $y_0 \in X$, $x \in X$ и $y \in X$ выполняется неравенство

$$|(x_0, y_0)-(x, y)| = |(x_0-x, y_0)+(x, y_0-y)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_0-x\|\,\|y_0\| + \|x\|\,\|y-y_0\|, \tag{57.33}$$

из которого сразу следует указанная непрерывность полускалярного произведения. Действительно, если $x \in U(x_0, \delta)$, $y \in U(y_0, \delta)$, то, заметив, что $\|x\| \leqslant \|x-x_0\|+\|x_0\| < \|x_0\|+\delta$, из (57.33) получим

$$|(x_0, y_0)-(x, y)| < \delta\|y_0\|+(|x_0|+\delta)\delta.$$

Отсюда следует, что при любом фиксированном числе $\varepsilon > 0$ всегда можно выбрать $\delta=\delta(\varepsilon) > 0$ так, что при $x \in U(x_0, \delta)$, $y \in U(y_0, \delta)$ выполняется неравенство $|(x_0, y_0)-(x, y)| < \varepsilon$; для этого достаточно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы $\delta\|y_0\|+(\|x_0\|+\delta)\delta < \varepsilon$; это, очевидно, всегда возможно. $\square$

В пространстве X с полускалярным произведением можно говорить о сходимости рядов по полунорме, порожденной полускалярным произведением: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$, $x=1, 2, \ldots$, называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} x_n$ сходится по указанной полунорме к некоторому элементу $s \in X$, который называется суммой ряда: $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Отметим, что сумма ряда в пространстве с полускалярным произведением определена неоднозначно. Однако, если $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $s^*=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, т. е. s и s^* суть суммы одного и того же ряда, то $\|s^*-s\|=0$ (см. п. 57.5), и потому для любого элемента $a \in X$ имеет место равенство $(s^*, a)=(s, a)$. Действительно, в силу неравенства Коши — Шварца для полускалярного произведения

$$|(s^*, a)-(s, a)|=|(s^*-s, a)| \leqslant \|s^*-s\|\|a\|=0.$$

Из непрерывности полускалярного произведения во всем пространстве следует, например, что ряды в пространстве с полускалярным произведением можно умножать почленно не только на числовые множители, но и на элементы самого пространства. Докажем это.

Лемма 12. *Пусть в пространстве X с полускалярным произведением задан сходящийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n=s, \quad x_n \in X, \quad n=1, 2, \ldots.$$

Тогда для всякого элемента $a \in X$ числовой ряд, получающийся из данного почленным умножением его на a, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a)=(s, a).$$

Иначе говоря, для сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и любого элемента $a \in X$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, a\right).$$

Доказательство. Поскольку

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k, a) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k, a\right) =$$
$$= \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k, a\right) = (s, a).$$

Пример. Рассмотрим пространство $RL_2[a, b]$ из примера 3 п. 57.8. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ функций $f_n \in RL_2[a, b]$ сходится в этом пространстве к функции $f \in RL_2[a, b]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

т. е. последовательность частичных сумм

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$$

этого ряда сходится к функции f в смысле среднего квадратичного:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 \, dt = 0.$$

Тогда для любой функции $\varphi(x) \in RL_2[a, b]$ согласно лемме 12

$$(f, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, \varphi),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) \varphi(x) \, dx.$$

В частности, при $\varphi = 1$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Иначе говоря,

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Итак, *если ряд функций с интегрируемым квадратом на отрезке* $[a, b]$ *сходится на нем в смысле среднего квадратичного к некоторой функции также с интегрируемым квадратом на* $[a, b]$, *то ряд можно почленно интегрировать.*

Поскольку из равномерной сходимости последовательности непрерывных функций вытекает сходимость этой последовательности к той же функции и в смысле среднего квадратичного (см. п. 57.4), то из доказанного здесь утверждения следует, что *если ряд непрерывных функций сходится на отрезке равномерно, то его можно почленно интегрировать.*

Этот результат был получен нами ранее другим путем в главе о рядах (см. теорему 9 в п. 36.4).

Определение 36. *Два линейных пространства* X *и* Y *со скалярным (полускалярным) произведением называются изоморфными, если они изоморфны как линейные пространства, и отображение* f, *отображающее пространство* X *на пространство* Y *и осуществляющее этот изоморфизм, сохраняет скалярное произведение (полускалярное произведение), т. е. для любых двух элементов* $x \in X$ *и* $y \in X$ *выполняется равенство*

$$(x, y) = (f(x), f(y)).$$

Два изоморфных линейных пространства со скалярным (полускалярным) произведением могут отличаться лишь природой своих элементов, а не метрическими свойствами, поэтому в дальнейшем изоморфные линейные пространства со скалярным (полускалярным) произведением часто не будут различаться.

Поясним это на примере. Пусть X и Y^* — линейные пространства со скалярным (полускалярным) произведением и пусть f — изоморфное отображение пространства X на множество $Y \subset Y^*$. Тогда, «отождествляя» элементы пространства X с соответствующими им элементами множества Y, можно рассматривать пространство X как подпространство пространства Y^*. Под этим понимается (сравните с соответствующими конструкциями в п. 57.1 и п. 57.5) рассмотрение линейного пространства X^*, состоящего из элементов пространства X и элементов множества $Y^* \setminus Y$. При этом в пространстве X^* операции сложения элементов и умножения их на число вводятся так же, как это было сделано после определения 27 в п. 57.5, а скалярное (полускалярное) произведение $(x, y)_{X^*}$, $x \in X^*$, $y \in X^*$ определяется в пространстве через скалярное (полускалярное) произведение в пространстве Y^* посредством биекции $F: X^* \to Y^*$, задаваемое формулой (57.19), следующим образом:

$$(x, y)_{X^*} = (F(x), F(y)),$$

где в правой части стоит скалярное (полускалярное) произведение в пространстве Y^*. Легко проверить, что пространство X^* изоморфно пространству Y^*.

Упражнения 22. Доказать, что все n-мерные линейные пространства со скалярным произведением изоморфны между собой.

22. Доказать, что всякое n-мерное линейное пространство со скалярным произведением полно в смысле метрики, порожденной скалярным произведением.

Определение 37. *Линейное пространство со скалярным произведением, полное в смысле метрики, порожденной заданным скалярным произведением, называется гильбертовым*[*] *пространством.*

Просто же линейное пространство со скалярным произведением называют также *предгильбертовым пространством.* Это название оправдывается следующей теоремой.

Теорема 4. *Всякое предгильбертово пространство X содержится и плотно в некотором гильбертовом пространстве X^*.*

Доказательство. Согласно теореме 1 п. 57.1 и теореме 3 п. 57.6, достаточно показать, что на пополнение X^* линейного нормированного пространства X можно продолжить с X скалярное произведение с сохранением свойств 1°—4°. Это можно сделать с помощью предельного перехода. Действительно, поскольку $\overline{X} = X^*$, то для любой пары точек $x \in X^*$ и $y \in X^*$ существуют последовательности точек $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

Покажем, что существует $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$. В самом деле, из неравенства (57.33) следует, что для всех натуральных m и n

$$|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)| \leqslant \|x_m - x_n\| \|y_m\| + \|x_n\| \|y_m - y_n\|.$$

Так как в силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены по норме и являются фундаментальными, то из этого неравенства следует, что числовая последовательность $\{(x_n, y_n)\}$ — также фундаментальная и, следовательно, сходится.

Положим, по определению, $(x, y) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$. Легко проверить, используя предельный переход, что это определение не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, таких, что

[*] Д. Гильберт (1862—1943) — немецкий математик.

$x_n \to x$, $y_n \to y$, и что для таким образом определенной функции (x, y) выполняются свойства $1° - 4°$ скалярного произведения. $\square$

Полученное гильбертово пространство называется *пополнением исходного предгильбертова пространства.*

Примером гильбертова пространства является n-мерное евклидово пространство (см. (57.8)). Другие примеры будут рассмотрены далее.

Упражнение 23. Доказать, что предгильбертово пространство, изоморфное гильбертову пространству, само является гильбертовым.

57.10. ПРОСТРАНСТВО L_2

Напомним (см. пример 3 в п. 57.8), что линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со скалярным произведением, определенным по формуле (57.30) обозначается через $CL_2[a, b]$.

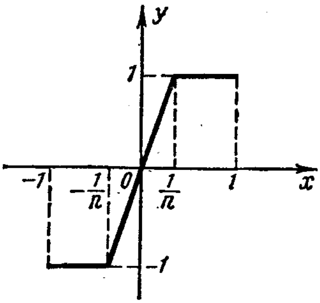

Рис. 225

Норма в пространстве $CL_2[a, b]$ определяется (57.31).

Лемма 13. *Пространство $CL_2[a, b]$ не является гильбертовым.*

Доказательство. Чтобы убедиться, что всякое пространство CL_2 $[a, b]$ не является полным, достаточно рассмотреть пространство $CL_2[a, b]$ для некоторого фиксированного отрезка (почему?). Возьмем для определенности отрезок $[-1, 1]$ и приведем пример фундаментальной в пространстве $CL_2[-1, 1]$ последовательности функций, не сходящейся в этом пространстве.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n}, \\ nx, & \text{если } -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{если } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{57.34}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

(рис. 225). Очевидно, что функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны на отрезке $[-1; 1]$. Замечая далее, что $|f_n(x)| \leqslant 1$, имеем для $m > n$

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2\, dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1/n}^{1/n} [|f_n(x)| + |f_m(x)|]^2\, dx \leqslant 4 \int_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{8}{n},$$

откуда, очевидно, следует, что последовательность (57.34) — фундаментальная в пространстве $CL_2[a, b]$.

Действительно, если задано $\varepsilon>0$, то выбирая n_0 так, что $8/n_0<\varepsilon$ для всех $n\geqslant n_0$ и всех $m>n$, будем иметь $\|f_n-f_m\|<\frac{8}{n}\leqslant\frac{8}{n_0}<\varepsilon$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases} -1 & \text{при } -1\leqslant x<0,\\ 0 & \text{при } x=0,\\ 1 & \text{при } 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

то естественно ожидать, что если последовательность $\{f_n\}$ сходится в смысле среднего квадратичного, то она сходится к той же функции, к которой она сходится поточечно, т. е. к функции (см. рис. 226):

$$f(x)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases} -1 & \text{при } -1\leqslant x<0,\\ 0 & \text{при } x=0,\\ 1 & \text{при } 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

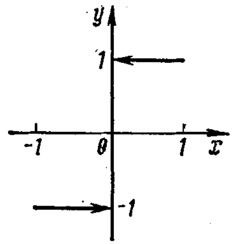

Рис. 226

Однако эта функция f разрывна и потому $f\notin CL_2[0, 1]$. Следовательно, естественно ожидать, что последовательность $\{f_n\}$ не имеет предела в пространстве $CL_2[a, b]$. Покажем это.

Нетрудно убедиться, что последовательность (57.34) сходится на отрезке $[-1, 1]$ в смысле полунормы (57.31) к функции f. Действительно,

$$\|f-f_n\|^{2\,*)}=\int_{-1}^{1}|f(x)-f_n(x)|^2dx=\int_{-1/n}^{1/n}|f(x)-f_n(x)|^2dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-1/n}^{+1/n}[|f(x)|+|f_n(x)|^2]\,dx\leqslant 4\int_{-1/n}^{+1/n}dx=\frac{8}{n}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$
$$\text{ибо} \quad |f(x)|\leqslant 1, \quad |f_n(x)\leqslant 1, \quad x\in[-1, 1]. \tag{57.35}$$

Предел по полунорме не единственен и поэтому возникает вопрос: не существует ли еще и непрерывной функции, которая также является пределом последовательности $\{f_n\}$ в смысле среднего квадратичного. Покажем, что такой функции не существует. Допустим противное. Пусть существует такая непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ функция $g(x)$, что

$$\lim_{n\to\infty}\|g-f_n\|=0. \tag{57.36}$$

---

*) Поскольку $f-f_n$ уже не является непрерывной функцией, то здесь символ $\|\varphi\|$ обозначает уже полунорму (57.31) функции φ. Это следует иметь в виду и в дальнейших рассмотрениях.

Тогда
$$\|f-g\|=\|(f-f_n)+(f_n-g)\|\leqslant\|f-f_n\|+\|f_n-g\|,$$
где оба слагаемых правой части в силу (57.35) и (57.36) стремятся к нулю при $n\to\infty$, а левая часть не зависит от n, следовательно,
$$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|^2\,dx=\|f-g\|^2=0;$$
тем более
$$\int_{-1}^{0}|f(x)-g(x)|^2\,dx=0,\quad \int_{0}^{1}|f(x)-g(x)|^2\,dx=0. \tag{57.37}$$

Рассмотрим, например, случай $x\geqslant 0$. Поскольку функции f и g непрерывны на интервале $(0, 1)$, то в силу (57.37) они совпадают на этом интервале (см. свойство 9 определенного интеграла в п. 28.1). Поэтому
$$g(+0)=\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}f(x)=1.$$

Аналогично из рассмотрения случая $x\leqslant 0$ будем иметь
$$g(-0)=\lim_{x\to-0}f(x)=-1,$$
т. е. g — разрывная функция.

Полученное противоречие и доказывает утверждение. □

Итак, линейное пространство $CL_2[a, b]$ не полно. Однако мы знаем, что всякое предгильбертово пространство можно дополнить до полного, в частности это можно сделать и с рассматриваемым пространством. Мы вернемся к этому вопросу несколько позже, а сейчас рассмотрим еще одно пространство.

Попробуем взять более широкий класс функций, чем непрерывные, а именно рассмотрим линейное пространство $RL_2[a, b]$ функций с интегрируемым на некотором отрезке $[a, b]$ квадратом (см. пример 3 в п. 57.8) с полускалярным произведением, задаваемым формулой (57.30), и сконструируем из этого пространства пространство со скалярным произведением.

Определение 38. *Две функции f и g с интегрируемым на отрезке $[a, b]$ квадратом назовем эквивалентными, если полунорма (57.31) их разности равна нулю:*
$$\|f-g\|=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\,dx}=0. \tag{57.38}$$

Эквивалентность функций в смысле этого определения будем обозначать символом
$$f\sim g. \tag{57.39}$$

Употребление в этом случае того же символа, который употреблялся для асимптотического равенства функций, т. е. для обозначения их эквивалентности в смысле порядка их изменения (см. определение 5 в п. 8.2), не приведет к недоразумению, так как всегда будет ясно, о какой эквивалентности функций идет речь.

Отношение эквивалентности (57.39) обладает следующими свойствами:

1°) $f \sim f$;

2°) если $f \sim g$, то $g \sim f$;

3°) если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$.

Разобьем множество всех функций с интегрируемым на отрезке $[a, b]$ квадратом, т. е. пространство $RL_2[a, b]$ на классы эквивалентных между собой функций. Эти классы будем называть классами эквивалентности и обозначать заглавными латинскими буквами F, G, H, ..., а их совокупность — через $\mathfrak{F}$. Каждую функцию f, принадлежащую классу эквивалентности F, будем называть его представителем. Кратко выражая процесс построения множества $\mathfrak{F}$, говорят, что оно получается из множества всех функций с интегрируемым квадратом «отождествлением» его эквивалентных элементов. Итак, теперь каждое множество эквивалентных функций рассматривается как один элемент множества $\mathfrak{F}$.

Для каждого $F \in \mathfrak{F}$ и каждого действительного числа λ элемент λF определяется следующим образом. Выберем какого-либо представителя $f \in F$, тогда функция λf является также функцией с интегрируемым на отрезке $[a, b]$ квадратом и, следовательно, принадлежит некоторому классу эквивалентности, т. е. является представителем некоторого элемента из $\mathfrak{F}$, который и определяется как элемент λF.

Чтобы показать, что это определение корректно, надо доказать, это элемент λF не зависит от выбора функции $f \in F$. Действительно, если $f \in F$ и $f_1 \in F$, то $f_1 \sim f$, т. е. $\|f_1 - f\| = 0$. Следовательно, $\|\lambda f_1 - \lambda f\| = |\lambda| \|f_1 - f\| = 0$, а это означает, что $\lambda f_1 \sim \lambda f$. Поэтому функции λf_1 и λf принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, т. е. одному и тому же элементу множества $\mathfrak{F}$.

Определим теперь операцию сложения элементов множества $\mathfrak{F}$. Пусть $F \in \mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{F}$. Выберем какие-либо функции $f \in F$ и $g \in G$. Элемент $F + G$ определим как класс эквивалентности, содержащий элемент $f + g$. Это определение однозначно, так как если

$$f \in F, \quad f_1 \in F, \ g \in G, \quad g_1 \in G$$

и, следовательно,

$$f_1 \sim f, \quad g_1 \sim g,$$

то

$$\|f_1 - f\| = 0, \quad \|g_1 - g\| = 0.$$

Поэтому

$$0 \leqslant \|(f_1+g_1)-(f+g)\| \leqslant \|f_1-f\|+\|g_1-g\|=0,$$

т. е.

$$f_1+g_1 \sim f+g$$

и, таким образом, функция f_1+g_1 принадлежит тому же классу эквивалентности, что и функция $f+g$.

Итак, для того чтобы сложить элементы из множества $\mathfrak{F}$ или умножить их на число, надо выбрать их представителей и проделать над ними указанную операцию; в результате получится некоторая функция; класс эквивалентности, представителем которого является эта функция, и будет результатом рассматриваемой операции.

Множество $\mathfrak{F}$ с введенными в нем операциями λF и $F+G$ образует линейное пространство. Действительно, для этих операций выполняются свойства 1°, 2°, 3° определения 11 в п. 57.2. Проверим, например, что для любых $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{F}$ и любого числа λ справедливо равенство

$$\lambda(F+G)=\lambda F+\lambda G. \tag{57.40}$$

Если $f \in F$ и $g \in G$, то, согласно определению сложения элементов из множества $\mathfrak{F}$, получим $f+g \in F+G$, $\lambda(f+g) \in \lambda(F+G)$. Поскольку f и g — элементы линейного пространства, то $\lambda(f+g) = \lambda f+\lambda g$. В силу же правила умножения элементов из $\mathfrak{F}$ на число и сложения этих элементов

$$\lambda f \in \lambda F, \quad \lambda g \in \lambda G, \quad \lambda f+\lambda g \in \lambda F+\lambda G.$$

Таким образом, классы эквивалентности $\lambda(F+G)$ и $\lambda F+\lambda G$ содержат общий элемент $\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$ и, следовательно, совпадают. Равенство (57.40) доказано.

Аналогично проверяется и выполнение остальных свойств линейных пространств (см. определение 11 в п. 57.2) для операций сложения и умножения на число элементов из множества $\mathfrak{F}$.

Отметим, что нулем полученного линейного пространства $\mathfrak{F}$ является класс эквивалентности, содержащий функцию, тождественно равную нулю на отрезке $[a, b]$. Этот класс состоит из тех и только тех функций f, которые эквивалентны нулю, иначе говоря, для которых полунорма (57.31) равна нулю: $\|f\|=0$, т. е.

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=0.$$

Определим теперь в линейном пространстве $\mathfrak{F}$ скалярное умножение. Пусть $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{F}$; выберем из классов F и G каких-либо представителей $f \in F$ и $g \in G$ и положим

$$(F, G) \overset{\text{def}}{=} (f, g). \tag{57.41}$$

Таким образом, для того чтобы скалярно перемножить элементы пространства $\mathfrak{F}$, надо выбрать их представителей и скалярно умножить их друг на друга (в смысле полускалярного произведения (57.30)). Полученный результат и будет равен скалярному произведению рассматриваемых элементов из множества $\mathfrak{F}$.

Определение (57.41) также не зависит от выбора функций из классов эквивалентности. Действительно, если

$$f \in F,\ f_1 \in F,\ g \in G,\ g_1 \subset G,$$

то

$$f_1 \sim f,\ g_1 \sim g$$

и, следовательно,

$$\|f_1 - f\| = 0,\ \|g_1 - g\| = 0.$$

Поэтому, используя неравенство Коши — Шварца (57.28) получим

$$0 \leqslant |(f_1,\ g_1) - (f,\ g)| = |[(f_1,\ g_1) - (f,\ g_1)] + [(f,\ g_1) - (f,\ g)]| \leqslant$$
$$\leqslant |(f_1 - f_1 g_1)| + |(f_1,\ g_1 - g)| \leqslant \|f_1 - f\| \|g_1\| + \|f\| \|g_1 - g\| = 0.$$

Таким образом $(f_1,\ g_1) = (f,\ g)$.

Функция (57.41) удовлетворяет всем свойствам скалярного умножения. Действительно, пусть $f \in F \in \mathfrak{F}$, $g \in G \in \mathfrak{F}$, $h \in H \in \mathfrak{F}$, λ и μ — числа, тогда

$$(\lambda F + \mu G,\ H) = (\lambda f + \mu g,\ h) = \lambda (f,\ h) + \mu (g,\ h) = \lambda (F,\ H) + \mu (G,\ H),$$
$$(F,\ G) = (f,\ g) = (g,\ f) = (G,\ F),$$
$$(F,\ F) = (f,\ f) \geqslant 0.$$

Наконец, если $(F,\ F) = 0$, то это означает, что для любой функции $f \in F$ имеем $(f,\ f) = \|f\|^2 = 0$, т. е. $f \sim 0$, а это, как отмечалось выше, и означает, что элемент F является нулевым элементом пространства $\mathfrak{F}$.

Определение 39. *Линейное пространство* $\mathfrak{F}$ *со скалярным произведением* (57.41) *называется пространством* $\widetilde{RL}_2 = \widetilde{RL}_2[a,\ b]$.

Отметим, что норма $\|F\|_{\widetilde{RL}_2}$ элемента F в пространстве $\widetilde{RL}_2[a,\ b]$, согласно (57.27) и (57.41), определяется через полунорму $\|f\|_{RL_2}$ функции $f \in F$ по формуле

$$\|F\|_{\widetilde{RL}_2} = \|f\|_{RL_2} = \left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right]^{1/2},\ f \in F, \tag{57.42}$$

причем в силу доказанной однозначности определения скалярного произведения это определение однозначно, т. е. не зависит от выбора функции $f \in F$.

Замечание 1. Элементами пространства $\widetilde{RL}_2[a,\ b]$ являются классы эквивалентных функций, однако в математической литературе часто встречается выражение «функция из пространства $\widetilde{RL}_2$». Это условное выражение означает просто, что речь идет о функции с интегрируемым квадратом и, следовательно, принадлежащей одному из рассматриваемых классов эквивалентных функций, т. е. являющейся его представителем. Это выражение удобно, так как операция сложения, умножения на число и операция скалярного умножения классов эквивалентных функций сводятся к соответствующей операции над их представителями, причем результат не зависит от выбора указанных представителей. Это обстоятельство в известном смысле оправдывает также и часто употребляющееся условное выражение «пространство $\widetilde{RL}_2[a, b]$ состоит из функций с интегрируемым квадратом»; в этом случае пространство $\widetilde{RL}_2$ нередко обозначается просто через RL_2.

Каждая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, будучи функцией с интегрируемым квадратом на этом отрезке, принадлежит некоторому классу эквивалентности, т. е. некоторому элементу пространства $\widetilde{RL}_2[a, b]$. При этом в указанном классе нет другой непрерывной функции, ибо если непрерывные функции эквивалентны, то они равны.

Изучим отображение, ставящее в соответствие каждой непрерывной функции $f \in CL_2[a, b]$ класс эквивалентности $F \in \widetilde{RL}_2[a, b]$, к которому она принадлежит: $f \in F$. Это отображение называется *естественным отображением* $CL_2[a, b]$ в $\widetilde{RL}_2[a, b]$. В силу самого определения операций сложения элементов (являющихся классами эквивалентности), умножения их на число и их скалярного произведения в пространстве $\widetilde{RL}_2[a, b]$, сводящихся к таким же действиям над представителями классов эквивалентности, естественное отображение является линейным и сохраняет скалярное произведение. Оно является взаимно однозначным отображением (инъекцией) пространства $CL_2[a, b]$ в пространство $\widetilde{RL}_2[a, b]$, так как если бы при этом отображении две непрерывные функции отобразились в один и тот же элемент пространства $\widetilde{RL}_2[a, b]$, т. е. в один и тот же класс эквивалентности, то они обе принадлежали бы этому классу. А это, как было отмечено выше, возможно только в случае, если они являются одной и той же непрерывной функцией.

Для изучения его дальнейших свойств предварительно докажем три леммы об аппроксимации функций. В них вместо $\|\cdot\|_{RL_2}$ будем для краткости просто писать $\|\cdot\|$.

Лемма 14. *Пусть квадрат функции f интегрируем на конечном или бесконечном промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая финитная ступенчатая функция* φ (см. п. 55.2), *равная нулю вне указанного промежутка, что*

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим для простоты, что функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi, \eta]$, $a < \xi <$

$<\eta<b$, т. е. что внутри рассматриваемого промежутка с концами a и b нет особых точек функции f (см. п. 55.1). Общий случай легко сводится к этому.

Пусть задано $\varepsilon>0$. Зафиксируем так ξ и η, чтобы

$$\int_a^\xi f^2(x)\,dx+\int_\eta^b f^2(x)\,dx<\frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{57.43}$$

Это возможно в силу того, что интеграл по отрезку $[a, b]$ от функции f^2 сходится. Функция f, будучи интегрируемой, по Риману, на отрезке $[\xi, \eta]$, ограничена на нем:

$$|f(x)|\leqslant M, \quad \xi\leqslant x\leqslant\eta, \tag{57.44}$$

M — постоянная.

Согласно лемме 2 в п. 55.2 для данного $\varepsilon>0$ существует такая финитная ступенчатая функция φ, что ее носитель $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в отрезке $[\xi, \eta]$, т. е. $\operatorname{supp}\varphi\subset[\xi, \eta]$,

$$|\varphi(x)|\leqslant M, \quad x\in[\xi, \eta] \tag{57.45}$$

(это следует из формулы (55.9)) и

$$\int_\xi^\eta |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon^2}{4M}. \tag{57.46}$$

Применив последовательно неравенства (57.43), (57.44), (57.45) и (57.46), получим:

$$\|f-\varphi\|^2=\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx=\int_a^\xi f^2(x)\,dx+\int_\eta^b f^2(x)\,dx+$$
$$+\int_\xi^\eta [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2}+\int_\xi^\eta [|f(x)|+|\varphi(x)|]\,|f(x)-\varphi(x)|\,dx\leqslant$$
$$<\frac{\varepsilon^2}{2}+2M\int_\xi^\eta |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon^2}{2}+2M\frac{\varepsilon^2}{4M}=\varepsilon^2.$$

Отсюда следует, что $\|f-\varphi\|<\varepsilon$. □

Лемма 15. Пусть φ — финитная ступенчатая функция, равная нулю вне отрезка $[a, b]$; тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такая финитная непрерывная на всей числовой оси функция g, также равная нулю вне указанного отрезка, что

$$\|g-\varphi\|<\varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай характеристической функции полуинтервала, ибо всякая финитная ступенчатая функция является конечной линейной комбинацией подобных функций (см. п. 55.2). Итак, пусть задана функция

$$\chi(x)=\begin{cases} 1 \text{ для } a\leqslant x<b, \\ 0 \text{ для } x<a \text{ и } x\geqslant b, \end{cases}$$

и задано $\varepsilon>0$. Возьмем какое-либо $\eta>0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\eta<\frac{\varepsilon^2}{8}, \quad \eta<\frac{b-a}{2},$$

и рассмотрим функцию $g(x)$, график которой изображен на рис. 227.

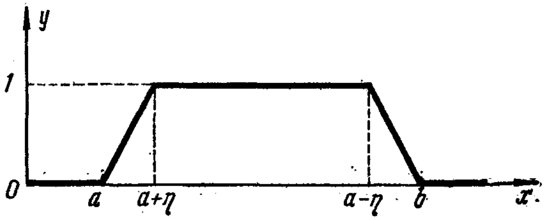

Рис. 227

При желании ее можно аналитически описать следующим образом

$$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{для } x<a \text{ и } x>b, \\ \dfrac{x-a}{\eta} & \text{для } a\leqslant x\leqslant a+\eta, \\ 1 & \text{для } a+\eta<x<b-\eta, \\ \dfrac{b-x}{\eta} & \text{для } b-\eta\leqslant x\leqslant b. \end{cases}$$

Очевидно, что $g(x)$ является финитной непрерывной на всей числовой оси функцией. Поскольку $|\chi(x)|\leqslant 1$, $|g(x)|\leqslant 1$, $-\infty<x<+\infty$, то

$$\|\chi-g\|^2=\int_a^b[\chi(x)-g(x)]^2\,dx=\int_a^{a+\eta}[\chi(x)-g(x)]^2\,dx+$$
$$+\int_{b-\eta}^{b}[\chi(x)-g(x)]^2\,dx\leqslant\int_a^{a+\eta}[|\chi(x)|+|g(x)|]^2\,dx+$$
$$+\int_{b-\eta}^{b}[|\chi(x)|+|g(x)|]^2\,dx\leqslant 4\int_a^{a+\eta}dx+4\int_{b-\eta}^{b}dx<8\eta<\varepsilon^2,$$

т. е. $\|\chi-g\|<\varepsilon$. □

Лемма 16. Если f является функцией с интегрируемым квадратом на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке является пределом в смысле среднего квадратичного некоторой последовательности непрерывных на всей числовой оси финитных функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, носители которых лежат на отрезке $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|^2=\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx=0. \qquad (57.47)$$

Доказательство. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, в силу леммы 14 существует такая финитная ступенчатая функция φ, равная нулю вне отрезка $[a, b]$, что

$$\|f-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

а в силу леммы 15 для этой ступенчатой функции φ найдется такая функция g, непрерывная на всей числовой оси и равная нулю вне отрезка $[a, b]$, что

$$\|\varphi-g\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

и, следовательно, (рис. 228)

$$\|f-g\|\leqslant\|f-\varphi\|+\|\varphi-g\|<\varepsilon.$$

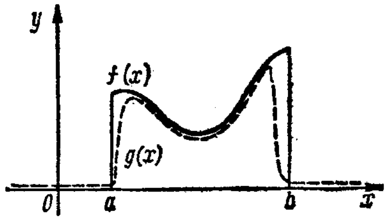

Рис. 228

Выбирая теперь некоторую числовую последовательность $\varepsilon_n\to+0$ при $n\to\infty$, $n=1, 2, \ldots$, и обозначая через f_n соответствующую числу ε_n в силу указанной конструкции, функцию, непрерывную на всей числовой оси и равную нулю вне отрезка $[a, b]$, получим искомую последовательность $\{f_n\}$, удовлетворяющую условию (57.47) (определение предела последовательности функций в смысле среднего квадратичного см. в п. 57.5) и такую, что $\operatorname{supp} f_n\subset[a, b]$ для всех $n=1, 2, \ldots$. □

Определение 40. *Подмножество пространства $CL_2[a, b]$ состоящее из функций f, обращающихся в ноль на концах отрезка $[a, b]$: $f(a)=f(b)=0$, называется пространством $\mathring{C}L_2[a, b]$.*

Очевидно, что лемма 16 означает, что любую функцию с интегрируемым на отрезке $[a, b]$ квадратом можно сколь угодно точно в смысле среднего квадратичного приблизить функциями из $\mathring{C}L_2[a, b]$. Ясно, что $\mathring{C}L_2[a, b]$ является линейным предгильбертовым пространством, и

$$\mathring{C}L_2[a, b]\subset CL_2[a, b]. \qquad (57.48)$$

Вернемся теперь к естественному отображению $CL_2[a, b]\to\widetilde{RL}_2[a, b]$.

Теорема 5. *Естественное отображение $CL_2[a, b]\to\widetilde{RL}_2[a, b]$, т. е. отображение, ставящее в соответствие каждой непрерывной* *на отрезке* $[a, b]$ *функции класс эквивалентности, к которому она принадлежит, является изоморфным отображением пространства* $CL_2[a, b]$ *в* $\widetilde{RL}_2[a, b]$, *причем образ пространства* $\mathring{C}L_2[a, b]$ (*а, следовательно, в силу* (57.48) *и всего пространства* $CL_2[a, b]$) *плотен в* $\widetilde{RL}_2[a, b]$.

Доказательство теоремы 5. Обозначим через Φ естественное отображение пространства $CL_2[a, b]$ в пространства $\widetilde{RL}_2[a, b]$, т. е. отображение, ставящее в соответствие каждой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f класс эквивалентных функций с интегрируемым на этом отрезке квадратом, которому она принадлежит, иначе говоря, класс эквивалентности, представителем которого она является. Таким образом, если

$$f \in CL_2[a, b] \quad \text{и} \quad f \in F \in \widetilde{RL}_2[a, b],$$

то $\Phi(f) = F$.

Пусть $F = \Phi(f) = 0$; тогда $\|F\| = 0$, но $f \in F$, поэтому и $\|f\| = 0$. По свойству нормы отсюда следует, что $f = 0$, т. е. ядро отображения Φ состоит только из нулевого элемента. Поскольку естественное отображение Φ линейно, то оно взаимно однозначно отображает пространство $CL_2[a, b]$ в пространство $\widetilde{RL}_2[a, b]$ (см. лемму 2 в п. 57.2).

Покажем, что образ пространства $\mathring{C}L_2[a, b]$ при этом отображении является плотным в пространстве $\widetilde{RL}_2[a, b]$ множеством. Пусть $F \in \widetilde{RL}_2[a, b]$ и функция f является представителем элемента F, т. е. $f \in F$. Поскольку f является функцией с интегрируемым на отрезке $[a, b]$ квадратом, то, согласно лемме 3, она является пределом в смысле среднего квадратичного некоторой последовательности непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций f_n, обращающихся в ноль на его концах (см. (57.47)), т. е. $f_n \in \mathring{C}L_2[a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $f_n \in F_n \in \widetilde{RL}_2[a, b]$, то, согласно определению нормы в пространстве $\widetilde{RL}_2[a, b]$, получим

$$\|F_n - F\|_{\widetilde{RL}_2} = \|f_n - f\|_{RL_2},$$

где справа, как обычно, стоит полунорма (57.31). Отсюда в силу равенства (57.47) получаем

$$\lim_{n \to \infty} \|F_n - F\| = 0. \tag{57.49}$$

Поскольку класс эквивалентности F являлся произвольно фиксированным элементом пространства $\widetilde{RL}_2[a, b]$, а $F_n = \Phi(f_n)$, где f_n — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, обращающаяся в ноль на его концах, и, следовательно, $F_n \in \Phi(\mathring{C}L_2[a, b])$; $n = 1, 2, \ldots$, то равенство (57.49) и означает плотность образа множества $\mathring{C}L_2[a, b]$ в пространстве $\widetilde{RL}_2[a, b]$ при отображении Φ.

Для доказательства же плотности образа множества $\widetilde{C}L_2[a, b]$ при его естественном отображении в пространство $\widetilde{R}L_2[a, b]$ заметим, что из включения (57.48) следует очевидным образом, что

$$\Phi(\mathring{C}L_2[a, b]) \subset \Phi(CL_2[a, b]) \subset \widetilde{R}L_2[a, b].$$

А если в каком-либо метрическом пространстве X плотно множество A, т. е. $\bar{A}=X$ и $A \subset B \subset X$, то, конечно, множество B также плотно в X, ибо $\bar{A} \subset \bar{B} \subset X$ и так как $\bar{A}=X$, то и $\bar{B}=X$. Поэтому из плотности множества $\Phi(\mathring{C}L_2[a, b])$ в пространстве $\widetilde{R}L_2[a, b]$ следует и плотность в нем множества $\Phi(CL_2[a, b])$. $\square$

Если отождествить каждую непрерывную функцию $f \in CL_2[a, b]$ с классом эквивалентных функций $F \in \widetilde{R}L_2[a, b]$, которому она принадлежит: $f \in F$, т. е. отождествить f с ее образом при естественном отображении Φ, то получим, что $CL_2[a, b]$ является подмножеством пространства $\widetilde{R}L_2[a, b]$:

$$\mathring{C}L_2[a, b] \subset \widetilde{R}L_2[a, b]. \qquad (57.50)$$

Это включение называется *естественным вложением* пространства CL_2 в пространство $\widetilde{R}L_2$.

Итак, в силу (57.48) и (57.50) справедливы включения

$$\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b] \subset \widetilde{R}L_2[a, b],$$

причем согласно теореме 5

$$\overline{\widetilde{C}L_2[a, b]} = \widetilde{R}L_2[a, b]$$

— множество $\mathring{C}L_2[a, b]$, а следовательно и $CL_2[a, b]$, плотны в пространстве $\widetilde{R}L_2[a, b]$.

Можно показать, что пространство $\widetilde{R}L[a, b]$ не является полным, т. е. не является гильбертовым пространством.

Задача 37. Доказать, что пространство $\widetilde{R}L_2[a, a]$ не является полным.

Выше было показано (см. п. 57.9), что всякое предгильбертово пространство можно дополнить до полного, т. е. до гильбертова пространства. В частности, это можно сделать и с пространством $\widetilde{R}L_2[a, b]$.

Определение 41. *Пополнение предгильбертова пространства* $\widetilde{R}L_2 = \widetilde{R}L_2[a, b]$ *называется пространством* $L_2 = L_2[a, b]$.

В силу определения пополнения

$$\widetilde{R}L_2[a, b] \subset L_2[a, b] \qquad (57.51)$$

и $\widetilde{R}L_2[a, b]$ плотно в пространстве $L_2[a, b]$, т. е.

$$\overline{\widetilde{R}L_2[a, b]} = L_2[a, b].$$

В силу включений (57.48), (57.50) и (57.51) имеют место естественные вложения

$$\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b] \subset \widetilde{R}L_2[a, b] \subset L_2[a, b]. \quad (57.52)$$

Оказывается, что не только $\widetilde{R}L_2$ плотно в пространстве L_2, но и $\mathring{C}L_2$ плотно в L_2.

Теорема 6. *Пространство* $\mathring{C}L_2[a, b]$ *плотно в пространстве* $L_2[a, b]$.

Следствие. *Пространство* $CL_2[a, b]$ *плотно в пространстве* $L_2[a, b]$.

Доказательство теоремы 6. Пусть $f \in L_2[a, b]$ и пусть произвольно фиксировано $\varepsilon > 0$. Для простоты все элементы пространства $L_2[a, b]$ будем также обозначать строчными латинскими буквами, хотя они, вообще говоря, и не являются функциями. Поскольку пространство $L_2[a, b]$ является пополнением пространства $\widetilde{R}L_2[a, b]$, то существует такой элемент $g \in \widetilde{R}L_2[a, b]$, что

$$\|f-g\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно включению (57.52) и плотности множества $\mathring{C}L_2[a, b]$ в пространстве $\widetilde{R}L_2[a, b]$, существует такой элемент $h \in \mathring{C}L_2[a, b]$, что

$$\|g-h\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\|f-h\|_{L_2} \leqslant \|f-g\|_{L_2} + \|g-h\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что множество $\mathring{C}L_2[a, b]$ плотно в пространстве $L_2[a, b]$. □

Следствие очевидным образом вытекает из теоремы, так как (как это было показано при доказательстве теоремы 5), если подмножество A некоторого множества B, $A \subset B$, плотно в каком-то метрическом пространстве $X \supset B$, то и само множество B тем более плотно в X. В данном случае $\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b]) \subset L_2[a, b]$ и $\mathring{C}L_2[a, b]$ плотно в $L_2[a, b]$. Поэтому $CL_2[a, b]$ также плотно в $L_2[a, b]$.

Упражнение 24. Доказать, что если X — метрическое пространство, $A \subset B \subset X$, множество A плотно в множестве B, а множество B плотно в пространстве X, то и множество A плотно в пространстве X.

Замечание 2. Если рассматривать пространство $L_2[a, b]$ как пространство, получающееся из пространства $\widetilde{R}L_2[a, b]$ конструкцией пополнения пространств, описанной в теоремах 1, 3 и 4 настоящего параграфа, то его элементами будут являться классы эквивалентных фундаментальных последовательностей, составленные из классов эквивалентных функций с интегрируемым квадратом. Если при этом произвести отождествление пространства CL_2 и RL_2 с их образами в L_2, как это указывалось выше, и тем самым считать, что

$$CL_2 \subset \widetilde{RL}_2 \subset L_2,$$

то окажется, что пространство L_2 состоит из непрерывных функций, из классов эквивалентных функций с интегрируемым квадратом, не содержащих непрерывных функций, и из «абстрактных элементов», представляющих собой указанные классы фундаментальных последовательностей. Можно, далее, условно в смысле замечания 1 «заменить» все элементы из пространства $\widetilde{RL}_2$ функциями — произвольно выбранными их представителями. Тогда пространство L_2 окажется состоящим из функций с интегрируемым квадратом и тех же абстрактных элементов, необходимо возникающих при процессе пополнения пространства $\widetilde{RL}_2$ ввиду его неполноты. Эта «условная замена» элементов пространства $\widetilde{RL}_2[a, b]$ их представителями отражает точное утверждение, что операции над классами эквивалентных функций сводятся к соответствующим операциям над их представителями в вышеуказанном смысле.

Оказывается, и это очень интересно и важно, что указанные абстрактные элементы можно рассматривать не как классы фундаментальных последовательностей классов эквивалентности, а как некоторые функции, точнее как классы эквивалентных функций в смысле определения 38, причем скалярное произведение для них также определяется формулами (57.30) и (57.41), только интеграл в этих формулах следует понимать не в смысле собственного или несобственного интеграла Римана, а в более общем смысле, в смысле так называемого интеграла Лебега. Рассмотрение этого вопроса выходит, однако, за рамки рассматриваемых методов и поэтому не будет излагаться в настоящем курсе. Его изложение можно найти, например, в замечательном учебнике С. М. Никольского «Курс математического анализа», т. I, II, 2-е изд., М., 1975.

Замечание 3. Определение пространства $L_2[a, b]$ естественным образом обобщается и на случай бесконечного промежутка. Рассмотрим для определенности всю числовую ось. Для двух непрерывных интегрируемых в квадрате на всей действительной оси функций φ и ψ скалярное произведение определим по формуле

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)\,dx. \tag{57.53}$$

Это определение корректно, ибо интеграл, стоящий справа, при сделанных относительно функций φ и ψ предположениях сходится, и даже абсолютно. Это сразу следует из неравенства

$$|\varphi(x)\psi(x)| \leqslant \frac{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}{2}.$$

Свойства скалярного произведения для (57.53) легко проверяются. Можно показать аналогично случаю конечного промежутка, что получившееся при этом метрическое пространство непрерывных интегрируемых в квадрате функций, так же как и предгильбертово пространство, получающееся «отождествлением» эквивалентных функций с интегрируемым на всей числовой оси квадратом, не является полным в метрике, порожденной скалярным произведением (57.53). Пополнения этих пространств совпадают с точностью до изоморфизма и обозначаются через $L_2(-\infty, +\infty)$.

Упражнения. 25. Доказать, что функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке $[0, 1]$ не является пределом в смысле среднего квадратичного последовательности непрерывных функций.

26. Доказать неэквивалентность понятий сходимости в среднем в смысле L_1 и в смысле L_2 для последовательности функций.

27. Доказать, что если последовательность интегрируемых на некотором отрезке функций равномерно на этом отрезке сходится к некоторой интегрируемой на нем функции, то указанная последовательность сходится в той же функции на рассматриваемом отрезке и в среднем как в смысле L_1, так и в смысле L_2.

28. Построить пример последовательности непрерывных на некотором отрезке функций, сходящейся на нем к некоторой непрерывной функции в среднем в смысле L_2, но не сходящейся равномерно на этом отрезке.

29. Построить пример последовательности неотрицательных непрерывных на отрезке функций, сходящейся на нем в среднем, но не сходящейся в смысле среднего квадратичного.

Задача 38. Доказать, что для любого p, $1 \leqslant p < +\infty$, и любого промежутка с концами в точках a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, множество непрерывных на нем функций плотно в пространстве $\widetilde{RL}_p(a, b)$.

Мы описали различные типы пространств. В анализе в основном изучаются пространства, элементами которых являются функции. Такие пространства называются *функциональными*.

Для простоты в примерах рассматривались функции одного переменного. Подобным же образом, если взять линейное пространство функций, непрерывных на замыкании некоторого измеримого по Жордану множества $G \subset R^n$, ввести скалярное произведение по формуле $(\varphi, \psi)=\int \varphi\psi\, dG$ и пополнить получившееся пространство, то получим гильбертово пространство, которое обозначается $L_2(G)$.

При этом можно показать, что все таким образом полученные пространства $L_2(G)$ будут сепарабельными бесконечномерными гильбертовыми пространствами.

Бесконечномерность пространства $L_2[a, b]$ будет установлена в п. 58.2, а его сепарабельность — в п. 58.3 (теорема 2).

В дальнейшем (см. п. 58.5, теорему 10) будет доказано, что все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой. Таким образом, изучив определенные свойства функций одной или многих переменных, удается из некоторых их множеств образовать пространства L_2. Однако, превратившись в точки этого пространства, функции утрачивают многие свои индивидуальные свойства. В частности, пространства L_2 неотличимы друг от друга по числу переменных, от которых зависят функции, из которых образованы эти пространства. Это, конечно, нисколько не мешает применять функциональные пространства с большим успехом как в чисто теоретических вопросах, так и в приложениях математики.

Введенные в этом параграфе многочисленные определения будут применяться в дальнейшем для описания определенных свойств различных классов функций в привычных и наглядных геометрических терминах (пространство, точка, расстояние, вектор, базис и т. п.) и помогут установить аналогии, имеющиеся между обычными n-мерными векторными пространствами и пространствами функций, и выяснить специфические свойства бесконечномерных функциональных пространств.

§ 58. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ И РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НИМ

58.1. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Определение 1. *Пусть X — линейное пространство с полускалярным произведением. Элементы $x \in X$ и $y \in X$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$, в этом случае пишется также $x \perp y$.*

Определение 2. *Система элементов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) линейного пространства X с полускалярным произведением называется ортогональной, если каждые ее два элемента ортогональны. Если, кроме того, норма ее любого элемента равна единице, т. е. $\|x_\alpha\| = 1$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, то она называется ортонормированной.*

Очевидно, если система x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, ортогональна и $x_\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, то ее можно «нормировать». Действительно, поделив каждый элемент на его норму, т. е. умножив x_α на число $1/\|x_\alpha\|$, получим ортонормированную систему

$$\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|},\ \alpha \in \mathfrak{A}\right\}.$$

Напомним, что если X — пространство со скалярным произведением, то условие $\|x\| \neq 0$ равносильно тому, что $x \neq 0$.