Бесконечномерность пространства $L_2[a, b]$ будет установлена в п. 58.2, а его сепарабельность — в п. 58.3 (теорема 2).

В дальнейшем (см. п. 58.5, теорему 10) будет доказано, что все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой. Таким образом, изучив определенные свойства функций одной или многих переменных, удается из некоторых их множеств образовать пространства L_2. Однако, превратившись в точки этого пространства, функции утрачивают многие свои индивидуальные свойства. В частности, пространства L_2 неотличимы друг от друга по числу переменных, от которых зависят функции, из которых образованы эти пространства. Это, конечно, нисколько не мешает применять функциональные пространства с большим успехом как в чисто теоретических вопросах, так и в приложениях математики.

Введенные в этом параграфе многочисленные определения будут применяться в дальнейшем для описания определенных свойств различных классов функций в привычных и наглядных геометрических терминах (пространство, точка, расстояние, вектор, базис и т. п.) и помогут установить аналогии, имеющиеся между обычными n-мерными векторными пространствами и пространствами функций, и выяснить специфические свойства бесконечномерных функциональных пространств.

§ 58. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ И РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НИМ

58.1. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Определение 1. *Пусть X — линейное пространство с полускалярным произведением. Элементы $x \in X$ и $y \in X$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$, в этом случае пишется также $x \perp y$.*

Определение 2. *Система элементов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) линейного пространства X с полускалярным произведением называется ортогональной, если каждые ее два элемента ортогональны. Если, кроме того, норма ее любого элемента равна единице, т. е. $\|x_\alpha\| = 1$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, то она называется ортонормированной.*

Очевидно, если система x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, ортогональна и $x_\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, то ее можно «нормировать». Действительно, поделив каждый элемент на его норму, т. е. умножив x_α на число $1/\|x_\alpha\|$, получим ортонормированную систему

$$\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|},\ \alpha \in \mathfrak{A}\right\}.$$

Напомним, что если X — пространство со скалярным произведением, то условие $\|x\| \neq 0$ равносильно тому, что $x \neq 0$.

Лемма 1. *Если система* $\{x_\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *элементов пространства* X *с полускалярным произведением ортогональна и* $\|x_\alpha\| \neq 0$ *для всех* $\alpha \in A$, *то она линейно независима.*

Доказательство. Пусть для некоторых элементов

$$x_{\alpha_k},\ \alpha_k \in \mathfrak{A},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

имеем

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на x_{α_k}, k — фиксировано ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$), получим

$$\lambda_k (x_{\alpha_k},\ x_{\alpha_k}) = 0,$$

ибо в силу ортогональности системы $(x_{\alpha_j},\ x_{\alpha_k}) = 0$, $j \neq k$. Замечая далее, что, по предположению, $x_{\alpha_k} \neq 0$ и, следовательно $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$, получим $\lambda_k = 0$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Линейная независимость системы x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, доказана. □

Докажем еще одну лемму, выражающую критерий линейной независимости функций через скалярные произведения.

Лемма 2. *Если для системы элементов* $x_1,\ \ldots,\ x_n$ *пространства* X *со скалярным произведением определитель*

$$G(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \begin{vmatrix} (x_1,\ x_1)\,(x_1,\ x_2) \ldots (x_1,\ x_n) \\ (x_2,\ x_1)\,(x_2,\ x_2) \ldots (x_2,\ x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_n,\ x_1)\,(x_n,\ x_2) \ldots (x_n,\ x_n) \end{vmatrix}$$

равен нулю, то система линейно зависима.

Определитель $G(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ называется *определителем Грама* *) данной системы.

Доказательство. Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными λ_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n,\ x_i) = 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{58.1}$$

или

$$\lambda_1 (x_1,\ x_i) + \ldots + \lambda_n (x_n,\ x_i) = 0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Определителем этой системы является транспонированный определитель Грама, который по условию леммы равен нулю. Следовательно, система (58.1) имеет нетривиальное решение $\lambda_1 \ldots,\ \lambda_n$ (т. е. такое, что не все λ_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,$ равны нулю). Умножим равенство (58.1) на λ_i и просуммируем по i от 1 до n:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n,\ \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = 0.$$

---

*) И. Грам (1850—1916) — датский математик.

Отсюда $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, что означает линейную зависимость системы $x_1, \ldots, x_n$. $\square$

Упражнения. 1. Доказать, что если конечная система элементов предгильбертова пространства линейно зависима, то ее определитель Грама равен нулю.

2. Доказать, что если $\{\omega_\alpha\}$ — ортонормированная система, то для любых двух ее элементов ω_α и $\omega_{\alpha'}$ имеет место равенство

$$\|\omega_{\alpha'} - \omega_\alpha\| = \sqrt{2}, \quad \alpha' \neq \alpha,$$

3. Доказать, что функции $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 5x$, $\sin 7x$, $\sin 9x$ — линейно независимы.

Примеры 1. Тригонометрическая система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{58.2}$$

ортогональна в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ (см. п. 57.10). Это было доказано в лемме 1 п. 55.1.

Из формул (55.4) следует, что $\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$, $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому ортонормированная система, соответствующая системе (58.2), имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \ldots.$$

2. Многочлены

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58.3}$$

называются *полиномами Лежандра*. Из формулы (58.3) видно, что $P_n(x)$ является многочленом степени n:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + \ldots.$$

Покажем, что система (58.3) ортогональна в пространстве $L_2[-1, 1]$. Для этого докажем более общее утверждение, а именно, — что полином Лежандра $P_n(x)$ ортогонален к любому многочлену $Q_m(x)$ степени $m < n$. Заметив предварительно, что выражение

$$\frac{d^k (x^2-1)^n}{dx^k}$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, обращается в ноль в точках $x = -1$ и $x = 1$, имеем, интегрируя по частям:

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} dx = Q_m(x) \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \Big|_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} Q_m'(x) \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}} dx = \ldots = (-1)^m Q_m^{(m)}(x) \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m} (x^2-1)^n}{dx^{n-m}} dx =$$

$$= (-1)^m Q_m^{(m)}(x) \frac{d^{n-m-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}} \Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) P_n(x)\,dx = 0, \quad m < n;$$

в частности,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

Подсчитаем теперь норму полиномов Лежандра. Заметив, что

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + Q_{n-1}(x)$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$, и использовав ортогональность $P_n(x)$ ко всем многочленам меньшей степени, получим:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x)\left[\frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + Q_{n-1}(x)\right] dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!} \int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^n\,dx = \frac{(2n-1)!!}{n!\,(2n)!!} \int_{-1}^{1} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} x^n\,dx.$$

Интегрируя последовательно по частям, будем иметь

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = \ldots = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_{-1}^{1} x\,d(x^2-1)^n =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1} x^2\,dx =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1}\,dx^3 =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-4)!!} \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-2} x^4\,dx = \ldots = \int_{-1}^{1} x^{2n}\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом,

$$\| P_n(x) \| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Система полиномов Лежандра, как и всякая ортогональная система ненулевых элементов, линейно независима (см. лемму 1) в пространстве $L_2\,[-1, 1]$. Поскольку в данном случае рассматриваемая система функций состоит из многочленов, то из их линейной независимости на каком-то отрезке (в данном случае на отрезке $[-1, 1]$) следует и их линейная независимость на любом другом отрезке.

Действительно, если какие-то многочлены $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$, то они, очевидно, линейно независимы и на всей числовой оси (всякая система функций, линейно независимая на некотором множестве, линейно независима и на всяком большем множестве, на котором определены все функции рассматриваемой системы). Если бы многочлены $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ оказались бы линейно зависимы на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, т. е. нашлись бы такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, что для всех $x \in [\alpha, \beta]$ выполнялось равенство $\lambda_1 Q_1(x) + \ldots + \lambda_k Q_k(x) = 0$, то это означало бы, что все коэффициенты многочлена $\lambda_1 Q_1(x) + \ldots + \lambda_k Q_k(x)$ равны нулю (многочлен с неравными нулю коэффициентами может иметь лишь конечное число нулей). Это означает, что многочлены $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ линейно зависимы на всей числовой оси. Полученное противоречие доказывает их линейную независимость на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Из линейной независимости полиномов Лежандра следует, что любой многочлен степени, не большей n, является линейной комбинацией полиномов Лежандра $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$. Действительно, в $(n+1)$-мерном пространстве многочленов степеней, не превышающих n, любая система $n+1$ линейно независимых многочленов, в частности указанная система полиномов Лежандра, образует базис. Поэтому всякий многочлен рассматриваемой степени, является линейной комбинацией элементов указанной системы.

3. Система функций $\{e^{inx}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$.

В самом деле,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx.$$

Отсюда, вспоминая, что период функции e^z равен $2\pi i$ (см. п. 37.6), при $n \neq m$ получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}\,dx = \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Упражнение 4. Доказать, что последовательность функций $\sin(2n-1)\frac{x}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, образует ортогональную систему на отрезке $[0, \pi]$.

58.2. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ

Пусть снова X — предгильбертово пространство. Рассмотрим следующую задачу. Пусть дана линейно независимая счетная система элементов x_n, $n = 1, 2, \ldots$, пространства X. Требуется с помощью конечных линейных комбинаций получить из нее ортогональную систему. Оказывается, эта задача всегда имеет решение.

Теорема 1. *Пусть*

$$x_n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{58.4}$$

— линейно независимая система элементов пространства X. Тогда *существует ортогональная система элементов* y_n, $y_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, *этого пространства, такая, что каждый ее элемент* y_n, $n=1, 2, \ldots$, *является линейной комбинацией первых* n *элементов системы* (58.4):

$$y_n = \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n}x_n. \tag{58.5}$$

Построение ортогональной системы $\{y_n\}$ вида (58.5) из линейно независимой системы $\{x_n\}$ называется обычно *процессом ортогонализации системы* $\{x_n\}$.

Доказательство. Положим $y_1 = x_1$. Поскольку система (58.4) линейно независима, то $y_1 \neq 0$ (почему?).

Пусть существуют попарно ортогональные элементы $y_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots, k$, $k \geqslant 1$, удовлетворяющие условию (58.5). Будем искать элемент y_{k+1}, ортогональный ко всем $y_1, \ldots, y_k$, в виде

$$y_{k+1} = \beta_{k+1,1}y_1 + \ldots + \beta_{k+1,k}y_k - x_{k+1}. \tag{58.6}$$

Из условий ортогональности

$$(y_1, y_{k+1}) = \ldots = (y_k, y_{k+1}) = 0 \tag{58.7}$$

получаем

$$(y_1, y_1)\beta_{k+1,1} = (y_1, x_{k+1}), \ \ldots, \ (y_k, y_k)\beta_{k+1,k} = (y_k, x_{k+1}). \tag{58.8}$$

Отсюда однозначно определяются коэффициенты $\beta_{k+1,i}$, $i=1, 2, \ldots, k$. Элемент y_{k+1}, задаваемый представлением (58.6) с найденными коэффициентами $\beta_{k+1,i}$, $i=1, 2, \ldots, k$, удовлетворяет условиям (58.7).

Подставим в (58.6) выражения для y_n, $n=1, 2, \ldots, k$, записанные в виде (58.5); после приведения подобных членов получим

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k - x_{k+1}. \tag{58.9}$$

Отсюда следует, что $y_{k+1} \neq 0$, ибо в противном случае элементы $x_1, \ldots, x_{k+1}$ оказались бы линейно зависимыми. $\square$

Замечание. Отметим, что если какая-либо ортогональная система элементов z_n, $z_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, пространства X такова, что каждый элемент z_n также является линейной комбинацией первых n элементов системы (58.4):

$$z_n = \gamma_{n,1}x_1 + \ldots + \gamma_{n,n}x_n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{58.10}$$

то элемент z_n отличается от элемента y_n лишь некоторым числовым множителем $\lambda_n \neq 0$:

$$z_n = \lambda_n y_n, \quad n=1, 2, \ldots.$$

Докажем это. Обозначим через $L(u_1, \ldots, u_n)$ линейную оболочку системы элементов $u_1, \ldots, u_n$ (см. п. 57.2); $L(x_1, \ldots, x_n)$ является n-мерным пространством, в котором элементы $x_1, \ldots, x_n$ образуют базис (см. п. 57.2). Элементы y_i, $i=1,2,\ldots,n$ (соответственно z_i, $i=1, 2, \ldots, n$), линейно независимы и содержатся в $L=(x_1, \ldots, x_n)$; следовательно, элементы y_i, $i=1, 2, \ldots, n$ и элементы z_i, $i=1, 2, \ldots, n$, также образуют базис в пространстве $L(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, $L(x_1, \ldots, x_n)=L(y_1, \ldots, y_n)=$ $=L(z_1, \ldots, z_n)$, $n=1, 2, \ldots$.

Элемент $y_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ ортогонален подпространству $L(y_1, \ldots, y_{n-1})=L(x_1, \ldots, x_{n-1})$, т. е. ортогонален каждому элементу этого подпространства. Элемент же $z_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ ортогонален подпространству $L(z_1, \ldots, z_{n-1})=L(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Итак, элементы y_n и z_n n-мерного пространства $L(x_1, \ldots, x_n)$ ортогональны одному и тому же $(n-1)$-мерному подпространству $L(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и, следовательно, пропорциональны: $z_n=\lambda_n y_n$, $\lambda_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots$ (почему?).

Отметим еще, что из

$$L(x_1, \ldots, x_n)=L(y_1, \ldots, y_n), \qquad n=1, 2, \ldots$$

вытекает совпадение линейных оболочек бесконечных систем (58.4) и (58.5).

Рассмотрим теперь систему степеней x:

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots. \tag{58.11}$$

Эта система линейно независима на любом промежутке (конечном или бесконечном). Действительно, если

$$\lambda_0+\lambda_1 x+\ldots+\lambda_n x^n \equiv 0, \tag{58.12}$$

то, дифференцируя это тождество n раз, получим

$$n!\lambda_n=0,$$

т. е. $\lambda_n=0$.

Если уже доказано, что $\lambda_{k+1}=\ldots=\lambda_n=0$, то тождество (58.12) примет вид

$$\lambda_0+\lambda_1 x+\ldots+\lambda_k x^k=0.$$

Дифференцируя его k раз, получим $\lambda_k=0$. Итак, $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$, что и означает линейную независимость функций $1, x, \ldots, x^n$.

Заметим, что поскольку функции системы (58.11), рассматриваемые на некотором отрезке $[a, b]$, принадлежат пространствам $C[a, b]$ (см. пример 7 в п. 57.4), $CL_2[a, b]$ и $L_2[a, b]$ (см. п. 57.10), то в этих пространствах имеются бесконечные линейно независимые системы. Следовательно, указанные пространства бесконечномерны, т. е. заведомо не имеют базиса, состоящего из конечного числа элементов.

Если систему (58.11) взять на отрезке $[-1, 1]$ в качестве исходной системы (58.4) и применить к ней процесс ортогонализации (см. (58.5)) в пространстве $L_2[-1, 1]$, то получим последовательность ортогональных многочленов соответственно степеней $0, 1, 2, \ldots$. Из сделанного выше замечания следует, что эти многочлены могут отличаться от многочленов Лежандра (58.3), которые также ортогональны, лишь постоянным множителем.

58.3. ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ. ПОЛНОТА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Напомним (см. п. 57.6), что система элементов $\Omega = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, называется *полной в полунормированном пространстве* X, если множество всех конечных линейных комбинаций ее элементов плотно в пространстве X в смысле заданной в нем полунормы. Иначе говоря, система полна, если для каждого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_k} \in \Omega$ и числа λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\| < \varepsilon.$$

Определение 3. *Полунормированное пространство X называется вложенным в полунормированное пространство Y, если*

1°) $X \subset Y$;

2°) *существует такая постоянная $c > 0$, что для любого $x \in X$ имеет место неравенство*

$$\|x\|_Y \leqslant c\|x\|_X.$$

Постоянная $c > 0$ называется *константой вложения*. Вложение пространства X в пространство Y обозначается символом

$$X \Subset Y.$$

Легко проверить, что если $X \Subset Y$ и $Y \Subset Z$, то $X \Subset Z$. Из леммы 3, п. 57.4 следует, что для любого отрезка имеют место вложения

$$RL_p[a, b] \Subset RL_1[a, b],$$

$$RL_p[a, b] \cap S[a, b] \Subset RL_p[a, b], \quad 1 \leqslant p < +\infty.$$

Здесь во втором вложении пространство $RL_p[a, b] \cap S[a, b]$ рассматривается с нормой $\|\cdot\|_\infty$, т. е. с нормой пространства $S[a, b]$. Если ограничиться только одними непрерывными функциями, то из второго вложения следует вложение

$$C[a, b] \Subset CL_p[a, b], \quad 1 \leqslant p < +\infty. \tag{58.13}$$

Отсюда, вспоминая, что при $p = 2$ пространство $CL_2[a, b]$ изометрически вкладывается в пространство $L_2[a, b]$ (см. (57.52)) получаем еще вложение

$$C[a,\ b]\Subset L_2[a,\ b]. \tag{58.14}$$

Обратим внимание на то, что во вложениях (58.13) и (58.14) вкладываемые пространства плотны в пространствах, в которые они вкладываются: в случае (58.13) это следует просто из того, что множества точек обоих пространств совпадают, а в случае (58.14) это следует из теоремы 6 п. 57.10.

Лемма 3. *Если система $\Omega=\{x_\alpha\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, полна в полунормированном пространстве X, пространство X вложено в полунормированное пространство Y и множество X плотно в пространстве Y по полунорме этого пространства, то система Ω полна в пространстве Y.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $y\in Y$ и любое $\varepsilon>0$. В силу плотности множества X в пространстве X найдется такой элемент $x\in X$, что

$$\|y-x\|_Y<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку система Ω полна в пространстве X, то существует конечное множество таких элементов $x_{\alpha_k}\in\Omega$ и чисел λ_k, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, что

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_{\alpha_k}\right\|_X<\frac{\varepsilon}{2c},$$

где $c>0$ — константа вложения $X\Subset Y$. В силу этого вложения (см. определение 3)

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_{\alpha_k}\right\|_Y\leqslant c\left\|x-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_{\alpha_k}\right\|_X<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для первоначально выбранного нами элемента y получим

$$\left\|y-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_{\alpha_k}\right\|_Y\leqslant\|y-x\|_Y+\left\|x-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_{\alpha_k}\right\|_Y<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Это и означает плотность системы Ω в пространстве Y. ☐

Примеры. 1. Система степеней

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots \tag{58.15}$$

полна в пространствах $C[a,\ b]$, $CL_p[a,\ b]$, $1\leqslant p<+\infty$ и $L_2[a,b]$ для любого отрезка $[a,\ b]$. Действительно, в силу теоремы Вейерштрасса (см. теорему 8′ в п. 55.8) указанная система степеней полна в пространстве $C[a,\ b]$, которое согласно (58.14) вложено в пространство $L_2[a, b]$ и плотно в нем. Поэтому по лемме 3 этого пункта система степеней (58.15) полна в пространстве $L_2[a, b]$. По той же лемме эта система полна и в пространстве $CL_p[a, b]$ при любом $p \geq 1$, ибо $C[a, b]$ вложено в $CL_p[a, b]$ и плотно в нем (см. (58.13)).

Обратим внимание на то, что всякий базис в линейном нормированном пространстве является, очевидно, полной линейно независимой системой. Обратное неверно. Например, система степеней (58.15) хотя и образует полную линейно независимую систему в банаховом пространстве $C[a, b]$, однако не является в нем базисом: если в пространстве $C[a, b]$ некоторая функция f раскладывается по системе степеней (58.15), т. е. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то это означает, что написанный степенной ряд сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, и, следовательно, функция f аналитическая на интервале (a, b). Поэтому заведомо любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция не может быть представлена в указанном виде.

2. Система полиномов Лежандра

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \tag{58.3}$$

полна в пространствах $C[a, b]$, $CL_p[a, b]$, $1 \leq p < +\infty$, и $L_2[a, b]$ для любого отрезка $[a, b]$. Это сразу следует из того, что любой многочлен $Q(x)$ является линейной комбинацией полиномов Лежандра (см. п. 58.1):

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x). \tag{58.16}$$

Поэтому, если в каком-то полунормированном пространстве X полна система степеней (58.15), т. е. для любого элемента $f \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $Q = Q(x)$, что $\|f - Q\| < \varepsilon$, то в силу (58.16)

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k \right\| < \varepsilon.$$

Это и означает полноту системы полиномов Лежандра в пространстве X.

3. Обозначим через $C^*[-\pi, \pi]$ подпространство пространства непрерывных функций $C[-\pi, \pi]$, состоящее из функций, принимающих на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ одинаковые значения:

$$f(-\pi) = f(\pi). \tag{58.17}$$

Тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots, \tag{58.2}$$

полна в пространствах $C^*[-\pi, \pi]$ и $L_2[-\pi, \pi]$. Полнота тригонометрической системы в пространстве $C^*[-\pi, \pi]$ была доказана раньше: см. теорему 7′ в п. 55.8.

Обозначим через $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ подпространство пространства $C^*[-\pi, \pi]$, состоящее из таких функций f, которые принимают на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ значения, равные нулю: $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Согласно теореме 6, п. 57.10 множество $\mathring{C}[-\pi, \pi]$, а следовательно, и пространство $C^*[-\pi, \pi] \supset \mathring{C}[-\pi, \pi]$, плотно в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$. Поэтому в силу вложения (см. 58.14))

$$C^*[-\pi, \pi] \Subset L_2[-\pi, \pi]$$

и леммы 3 этого пункта тригонометрическая система (58.2) полна в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

Отметим, что поскольку условие (58.17) сохраняется при равномерной сходимости, и каждый тригонометрический многочлен ему удовлетворяет, то тригонометрическая система заведомо не полна в пространстве $C[-\pi, \pi]$, так как в нем заведомо есть функции, не удовлетворяющие условию (58.17).

Из рассмотренных примеров как простое следствие вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Банахово пространство $C[a, b]$ и гильбертово пространство $L_2[a, b]$ являются сепарабельными пространствами.*

Действительно, сепарабельность пространства означает (см. определение 31 в п. 57.6) наличие в нем счетной полной системы. В указанных пространствах таковой системой является, например, система (58.15) целых неотрицательных степеней переменной x.

58.4. РЯДЫ ФУРЬЕ

Пусть, как и раньше, X — предгильбертово пространство. Рассмотрим следующую задачу. Пусть задана система n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства X и фиксирован некоторый вектор $x \in X$. Требуется найти линейную комбинацию вида

$$a_1e_1 + \ldots + a_ne_n, \tag{58.18}$$

которая дает наилучшее приближение в пространстве X элемента x, т. е. осуществляет минимум выражения

$$\| x - (a_1e_1 + \ldots + a_ne_n) \|, \tag{58.19}$$

или, что то же, минимум функции

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k \right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k,\ x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k \right) \tag{58.20}$$

от переменных $a_1, \ldots, a_n$.

Геометрически это означает, что в n-мерном пространстве $R^n = \mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$, натянутом на векторы $e_1 \in X, \ldots, e_n \in X$ ищется элемент, наименее удаленный от заданного элемента $x \in \in X$.

Если пространство X — n-мерное и, следовательно, векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис, то всегда можно подобрать такие коэффициенты a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, что будет выполняться равенство

$$x = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n \tag{58.21}$$

и, следовательно, выражение (58.19) обратится в ноль. Если же X не конечномерно, или конечномерно, но имеет размерность, бо́льшую, чем n, то равенство (58.21), вообще говоря, осуществить невозможно и задача состоит в отыскании линейной комбинации (58.18), дающей минимальное значение выражению (58.19).

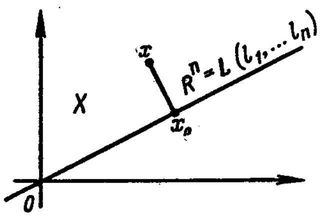

Рис. 229

Мы покажем, что сформулированная задача всегда имеет и притом единственное решение x_0, кроме того, выясним некоторые свойства этого решения (см. рис. 229, на котором схематически изображена рассматриваемая задача). Применяя, если надо, процесс ортогонализации (см. п. 58.2), систему $e_1, \ldots, e_n$ всегда можно заменить ортогональной системой не равных нулю векторов. Поэтому будем предполагать, что $e_k \neq 0$, $(e_k, e_j) = 0$, $k \neq j$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$. Пользуясь условием ортогональности, преобразуем функцию (58.20) следующим образом:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,\ x - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right) = (x, x) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k a_j (e_k, e_j) - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k (x, e_k) =$$
$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k (x, e_k) =$$
$$\|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \|e_k\| - \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|} \right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x, e_k)^2}{\|e_k\|^2}. \tag{58.22}$$

Отсюда следует *), что минимум выражения (58.19) достигается, когда

$$a_k \|e_k\| - \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

*) Очевидно, что это рассуждение является непосредственным обобщением доказательства теоремы 11 из п. 55.9.

т. е. когда

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}. \qquad (58.23)$$

Числа a_k, определенные по формуле (58.23), *называются коэффициентами Фурье элемента x по системе $e_1, \ldots, e_n$.*

Если система $e_1, \ldots, e_n$ ортонормированная, то формулы (58.23) приобретают более простой вид:

$$a_k = (x, e_k). \qquad (58.24)$$

В случае n-мерного пространства, когда в качестве векторов $e_1, \ldots, e_n$ выбран базис пространства, коэффициенты Фурье вектора x являются его коэффициентами разложения по указанному базису, т. е. координатами элемента x относительно этого базиса. В этом легко убедиться, умножив скалярно равенство (58.21) на e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$: в результате получится (58.23).

Вернемся теперь к выражению (58.22). Если в нем в качестве $a_1, \ldots, a_n$ взять коэффициенты Фурье (58.23), то получим

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 \geqslant 0, \qquad (58.25)$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2. \qquad (58.26)$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть e_k, $e_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — ортогональная система векторов предгильбертова пространства X. Наилучшее приближение в пространстве X вектора $x \in X$ линейными комбинациями вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ осуществляется, когда α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, суть коэффициенты Фурье: $\alpha_k = a_k$. При этом*

$$\inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0.$$

Следствие 1. *Элемент $x_0 = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ является элементом наилучшего приближения элемента $x \in X$ в подпространстве $\mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$ тогда и только тогда, когда элемент $x - x_0$ ортогонален* к $\mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$, т. е. $x - x_0 \perp \mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$.

Действительно, условие $x - x_0 \perp \mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$ равносильно условию: для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место равенство $(x - x_0, e_k) = 0$. Это, в свою очередь, эквивалентно условию $(x, e_k) = (x_0, e_k)$

или, поскольку

$$(x_0,\ e_k)=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j,\ e_k\right)=\alpha_k(e_k,\ e_k),$$

условию $(x,\ e_k)=\alpha_k(e_k,\ e_k)$. Таким образом, условия

$$x-x_0\perp\mathscr{L}(e_1,\ \ldots,\ e_n)\ \text{и}\ \alpha_k=\frac{(x,\ e_k)}{(e_k,\ e_k)}$$

равносильны. Но второе условие означает, что числа α_k являются коэффициентами Фурье элемента x_0, т. е. что x_0 является элементом наилучшего приближения. □

Пусть теперь задана последовательность (а не конечная система, как выше) элементов

$$e_n\,(e_n\neq 0),\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{58.27}$$

образующих ортогональную систему в пространстве X. Числа a_k, $k=1,\ 2,\ \ldots$, определяемые по формуле (58.23), и в этом случае называются *коэффициентами Фурье* элемента y по системе (58.27).

Определение 4. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n, \tag{58.28}$$

где a_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$ — *коэффициенты Фурье* (58.23) *элемента* x *по системе* (58.27), *называется рядом Фурье элемента* x *по этой системе.* Если ряд (58.28) является рядом Фурье элемента x, то пишется

$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n.$$

Определение 5. *Пусть задана ортогональная система* (58.27) *и элемент* $x\in X$. *Наилучшим приближением элемента* x *с помощью линейных комбинаций вида* $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$ (n — *фиксировано*) *называется число* $E_n(x)$, *определяемое равенством*

$$E_n(x)=\inf_{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\|,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

где нижняя грань берется по всевозможным коэффициентам $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$, *или, что то же, по всевозможным линейным комбинациям вида* $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$.

Поскольку всякая линейная комбинация элементов $e_1,\ \ldots,\ e_n$ может также рассматриваться и как линейная комбинация элементов $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$, то, очевидно,

$$E_{n+1}(x) \leqslant E_n(x). \tag{58.29}$$

Из теоремы 3 следует, что рассматриваемая нижняя грань достигается, если в качестве коэффициентов α_k взять коэффициенты Фурье, и что

$$E_n(x) = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| =$$

$$= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2},$$

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{58.30}$$

Полученный результат сформулируем в виде следствия 2 из теоремы 3.

Следствие 2. *Частичные суммы*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

ряда Фурье элемента $x \in X$ осуществляют наилучшее в пространстве X приближение элемента $x \in X$ с помощью линейных комбинаций вида $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Отметим еще несколько следствий теоремы 3.

Следствие 3. *Если s_n — частичная сумма ряда Фурье элемента $x \in X$, то числовая последовательность $\|x - s_n\|$ убывает:*

$$\|x - s_{n+1}\| \leqslant \|x - s_n\|, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{58.31}$$

В самом деле, согласно (58.30)

$$\|x - s_n\| = E_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому неравенство (58.31) является неравенством (58.29), записанным в других обозначениях.

Следствие 4. *Для коэффициентов Фурье a_n, $n = 1, 2, \ldots$, каждого элемента $x \in X$ справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|x\|^2, \tag{58.32}$$

называемое неравенством Бесселя.

Неравенство (58.32) непосредственно следует из неравенства (58.26) при $n \to \infty$ (ср. с неравенством (55.49) в п. 55.9).

Следствие 5. *Если существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|e_n\| \geqslant c$ при $n = 1, 2, \ldots$, в частности, если система (58.27) ортонормированная (в этом случае можно взять $c = 1$), то коэффи-*

циенты Фурье любого элемента $x \in X$ стремятся к нулю при $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{58.33}$$

Это следует из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \| e_n \|^2 \leqslant \frac{\| x \|^2}{c^2},$$

ибо общий член сходящегося ряда стремится к нулю.

Естественно возникает вопрос: при каких условиях ряд Фурье элемента x сходится?

Теорема 4. *Если пространство X гильбертово (т. е. полно), то ряд Фурье* (58.28) *любого элемента $x \in X$ по любой ортогональной системе* (58.27) *сходится в пространстве X. Если x_0 его сумма:*

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \tag{58.34}$$

то элемент $x - x_0$ ортогонален ко всем элементам системы (58.27).

Доказательство. Пусть $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, $n = 1, 2 \ldots,$ — частичные суммы ряда Фурье (58.28) элемента x по системе (58.27); тогда

$$\| s_{n+p} - s_n \|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right) =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \| e_k \|^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots. \tag{58.35}$$

В силу неравенства Бесселя (58.32) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \| e_n \|^2$$

сходится, и, следовательно, в силу критерия Коши для сходимости числового ряда для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ и $p > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \| e_k \|^2 < \varepsilon^2,$$

поэтому, согласно неравенству (58.35) при $n \geqslant n_\varepsilon$ и $p > 0$, имеем

$$\| s_{n+p} - s_n \| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{s_n\}$ является фундаментальной в пространстве X и вследствие полноты последнего сходится.

В условиях теоремы последовательность s_n сходится, вообще говоря, не к элементу x. Пусть ее пределом является элемент x_0, т. е. $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, тогда, используя непрерывность скалярного произведения (см. п. 57.9) и формулу (58.23), получим

$$(x - x_0,\ e_k) = (x,\ e_k) - (x_0,\ e_k) =$$
$$= (x,\ e_k) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,\ e_k\right) = (x,\ e_k) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e_n,\ e_k) =$$
$$= (x,\ e_k) - a_k \| e_k \|^2 = 0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \ \square$$

Что же касается условия сходимости ряда Фурье некоторого отдельного элемента к самому этому элементу, то его можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 5. *Ряд Фурье* (58.28) *элемента x предгильбертова пространства сходится к этому элементу тогда и только тогда, когда для него выполняется равенство*

$$\| x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \| e_n \|^2, \tag{58.36}$$

где a_n — коэффициенты Фурье элемента x по системе (58.27).

Равенство (58.36) называется *равенством Парсеваля.*

В случае, когда система (58.27) ортонормирована, равенство Парсеваля принимает более простой вид:

$$\| x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad a_n = (x,\ e_n), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

и представляет собой обобщение теоремы Пифагора на бесконечномерные пространства.

Доказательство теоремы 5. Мы имели (см. (58.25))

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \| e_k \|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим эквивалентность условия

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0 \tag{58.37}$$

и условия

$$\lim_{n \to \infty} \left(\| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \| e_k \|^2 \right) = 0,$$

т. е. условия

$$\| x \|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \| e_k \|^2. \ \square \tag{58.38}$$

Напомним теперь понятие полной системы (см. п. 57.6) применительно только к случаю счетных систем. Система элементов $e_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, называется полной, если множество конечных линейных комбинаций элементов этой системы плотно в пространстве X. Это означает, что для каждого элемента $x \in X$ и каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют такой номер $n = n(\varepsilon, x)$ и такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что выполняется неравенство

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon. \tag{58.39}$$

Полнота ортонормированной системы является условием, обеспечивающим сходимость ряда Фурье любого элемента пространства к самому этому элементу. Сформулируем это условие в виде теоремы.

Теорема 6. *Ряд Фурье по ортогональной системе* (58.27) *любого элемента предгильбертова пространства сходится к самому этому элементу тогда и только тогда, когда система* (58.27) *является полной.*

Следствие. *Для того чтобы ортогональная система* (58.27) *предгильбертова пространства X была полной в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $x \in X$ выполнялось равенство Парсеваля* (58.36).

Доказательство теоремы 6. Пусть X — предгильбертово пространство и система (58.27) является ортогональной системой этого пространства. Если для любого $x \in X$ его ряд Фурье по системе (58.27) сходится к x, т. е.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \text{ где } a_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58.40}$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0. \tag{58.41}$$

Следовательно, для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такая частичная сумма $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ ряда Фурье (58.28), что

$$\|x - s_n\| < \varepsilon, \tag{58.42}$$

т. е. выполняется условие (58.39).

Обратно, если условие (58.39) выполняется при каких-то коэффициентах $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то оно заведомо выполняется согласно теореме 3 и в случае, если взять $\lambda_1 = a_1, \ldots, \lambda_n = a_n$, т. е. в этом случае для заданного $\varepsilon > 0$ выполняется условие (58.42) при некотором n, а значит, и при всех $m > n$ (см. (58.31)), а это равносильно выполнению условия (58.41). $\square$

Следствие непосредственно вытекает из теорем 5 и 6.

Выясним теперь вопрос о единственности элемента, имеющего данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ своим рядом Фурье.

Теорема 7. *Если ортогональная система* (58.27) *предгильбертова пространства X полная, то элемент $x \in X$, у которого все коэффициенты Фурье по системе* (58.27) *равны нулю, сам равен нулю.*

Следствие. *Из равенства всех коэффициентов Фурье у двух элементов пространства X по полной ортогональной системе* (58.27) *вытекает равенство самих элементов.*

Доказательство теоремы 7. Если система (58.27) — полная, то согласно теореме 6 любой элемент $x \in X$ является суммой своего ряда Фурье: $x = \sum_{n=-}^{\infty} a_n e_n$. Поэтому, если $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то и $x = 0$.

Доказательство следствия. Если $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и их коэффициенты Фурье равны между собой:

$$\frac{(x_1, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_2, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то для элемента $x = x_1 - x_2$ все коэффициенты Фурье равны нулю:

$$\frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_1 - x_2, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_1, e_n)}{\|e_n\|^2} - \frac{(x_2, e_n)}{\|e_n\|^2} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и, следовательно, согласно теореме, $x = 0$, т. е. $x_1 = x_2$. □

Замечание. Следует отметить, что если в предгильбертовом пространстве X задана некоторая ортогональная система $\{e_n\}$, $e_n \neq 0$, и для некоторого $x \in X$ существует его представление в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

то оно единственно и коэффициенты x_n, $n = 1, 2, \ldots$, являются коэффициентами Фурье. В самом деле, если указанное представление существует, то для любого $m = 1, 2, \ldots$ в силу ортогональности системы $\{e_n\}$ получим:

$$(x, e_m) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, e_m\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (e_n, e_m) = x_m (e_m, e_m),$$

откуда

$$x_m = \frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)},$$

т. е. коэффициенты x_m, $m = 1, 2, \ldots$ определяются однозначно и совпадают с коэффициентами Фурье.

Итак, если в предгильбертовом пространстве имеется полная ортогональная система, то всякий элемент этого пространства раскладывается в ряд по этой системе (теорема 6) и притом единственным образом согласно сделанному замечанию. Иначе говоря, (см. определение 33 в п. 57.6) *всякая полная ортогональная система* $\{e_n\}$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *в частности, всякая полная ортонормированная система, предгильбертова пространства является его базисом.*

Например, согласно результатам п. 58.3 полиномы Лежандра (58.3) образуют базис в гильбертовом пространстве $L_2[-1, 1]$, а тригонометрическая система (58.2) — базис в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

Теперь дадим еще один подход к понятию полноты ортогональной системы в полном пространстве.

Определение 6. *Ортогональная система* (58.27) *называется замкнутой, если в пространстве X не существует элемента, отличного от нуля и ортогонального к каждому из элементов системы* (58.27).

Теорема 8. *Если пространство X полное, то ортогональная система* (58.27) *полна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Доказательство. Если система (58.27) полная, $x \in X$ и x ортогонален ко всем элементам системы (58.27), то все его коэффициенты Фурье по системе (58.27) равны нулю (см. (58.23)), следовательно (теорема 7), $x = 0$.

Обратно, пусть система (58.27) замкнутая, $x \in X$ и $x \sim \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Согласно теореме 4, ряд Фурье элемента x сходится, и если $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, то $x - x_0 \perp e_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому в силу замкнутости системы (58.27) $x - x_0 = 0$, т. е. $x = x_0$ и $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Поскольку x — произвольный элемент пространства X, то отсюда в силу теоремы 6 и следует полнота системы (58.27). $\square$

Задача 39. Выяснить, эквивалентны или нет понятие полной ортогональной системы и понятие замкнутой ортогональной системы во всяком предгильбертовом пространстве.

58.5. СУЩЕСТВОВАНИЕ БАЗИСА В СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ИЗОМОРФИЗМ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Теорема 9. *Во всяком сепарабельном линейном пространстве X со скалярным произведением существует ортонормированный базис e_n, $n = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. В случае, если пространство X n-мерное, теорема очевидна (см. п. 18.4 и 57.2), поэтому будем рассматривать только случай, когда пространство X бесконечномерно.

Поскольку пространство X сепарабельно, то в нем существует последовательность элементов

$$\varphi_n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

образующих полную систему. Отбрасывая последовательно те из элементов, которые являются линейной комбинацией остальных, получим последовательность элементов

$$\psi_n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

имеющих ту же линейную оболочку, что и исходная система $\{\varphi_n\}$ и линейно независимых (почему?). Применив к полученной системе процесс ортогонализации (см. п. 58.2) и нормирования (см. п. 58.1), получим ортонормированную систему

$$e_k, \quad \|e_k\|=1, \quad k=1, 2, \ldots,$$

имеющую ту же линейную оболочку, что и система $\{\psi_n\}$, а значит, ту же, что и система $\{\varphi_n\}$. Поскольку в силу полноты системы $\{\varphi_n\}$ эта линейная оболочка плотна в X, то система $\{e_n\}$ полная. В предыдущем же пункте (см. замечание после теоремы 7) было показано, что всякая полная ортонормированная система элементов предгильбертова пространства является его базисом. $\square$

Теорема 10. *Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изоморфны между собой* *).

Предварительно докажем две леммы. Первая из них обобщает равенство Парсеваля (58.36).

Лемма 4. *Пусть* X — *предгильбертово пространство*, e_n $(e_n \neq 0)$, $n=1, 2, \ldots,$ — *полная ортогональная система в* X, $x \in X$, $y \in X$, *и пусть*

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad y \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n;$$

тогда

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \|e_n\|^2, \tag{58.43}$$

в частности, если дополнительно предположить, что $\|e_n\|=1$, $n=1, 2, \ldots,$ то

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Формула (58.43) обобщает, очевидно, формулу для скалярного произведения в конечномерном пространстве (см. п. 18.4).

*) Определение бесконечномерности пространства см. в п. 57.2, а изоморфизма пространств — в п. 57.9 (определение 36).

Доказательство. По определению коэффициентов Фурье,

$$a_k = \frac{(x,\ e_k)}{\|e_k\|^2},\quad b_k = \frac{(y,\ e_k)}{\|e_k\|^2};$$

поэтому имеем

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,\ \ y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = (x,\ y) - \sum_{k=1}^{n} b_k (x,\ e_k) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} a_k (y,\ e_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k (e_k,\ e_k) = (x,\ y) - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \|e_k\|^2. \tag{58.44}$$

Из полноты системы e_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\left(y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = 0,$$

поэтому в силу непрерывности скалярного произведения при $n \to \infty$ левая часть равенства (58.44) стремится к нулю, следовательно, это имеет место и для правой части, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \|e_k\|^2 = (x,\ y).$$

Это равносильно равенству (58.43). □

Лемма 5. *Пусть X — гильбертово пространство, e_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ — ортонормированный базис в X и a_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ — последовательность чисел таких, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходится. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ сходится в пространстве X, и если $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, то a_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ — коэффициенты Фурье элемента x.*

Доказательство. Если $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, то

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k,\ \ \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k\right) =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2,\quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\quad p = 1,\ 2,\ \ldots,$$

и в силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ он удовлетворяет критерию Коши для сходящихся рядов. Отсюда следует, что последовательность $\{s_n\}$ является фундаментальной в пространстве X и, следовательно, сходится.

Пусть

$$x=\lim_{n\to\infty} s_n, \quad \text{т. е.} \quad x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n;$$

тогда в силу единственности разложения элемента пространства по базису (см. замечание к теореме 7)

$$(x,\ e_n)=a_n, \quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е. a_n коэффициенты Фурье элемента x. $\square$

Доказательство теоремы 10. Пусть X и Y — два сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространства. Согласно теореме 9, в них существуют ортонормированные базисы, соответственно e_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$, и f_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$.

Пусть $x\in X$ и $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, тогда a_n — коэффициенты Фурье элемента x и, следовательно, по равенству Парсеваля ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Положим $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n$. Согласно лемме 5, это имеет смысл.

Отображение пространства X в пространство Y, ставящее в соответствие каждому элементу $x\in X$ указанный элемент $y\in Y$, и осуществляет изоморфизм этих пространств. Действительно, при этом соответствии в силу единственности разложения элемента по базису разным элементам пространства X соответствуют разные элементы пространства Y. Далее, всякий элемент пространства Y поставлен в соответствие некоторому элементу пространства X (т. е. указанное отображение является отображением на пространство Y); в самом деле, если $y\in Y$, то, разложив его в Y по базису, получим

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n.$$

Пусть $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n e_n$ (такой элемент существует, см. лемму 5). Очевидно, что элементу x и соответствует при установленном соответствии элемент y. Покажем, наконец, что при этом соответствии сохраняется скалярное произведение. Это сразу следует из леммы 4. Действительно, если

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad x'=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n, \quad y=\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n,$$

то в силу указанной леммы

$$(x,\ x')=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=(y,\ y'). \ \square$$

В качестве модели сепарабельного бесконечномерного гильбертова пространства можно взять пространство, элементами которого являются последовательности действительных чисел

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots),$$

для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ сходится, т. е. пространство l_2 (см. пример 5 в п. 57.4). Скалярное произведение в этом пространстве вводится по следующему правилу:

если $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$ *и* $y=(y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots)$, *то*

$$(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Это определение имеет смысл, ибо из сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$ вытекает и сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Это, например, следует из неравенства Гёльдера для рядов при $p=2$ (оно в этом случае часто называется неравенством Коши—Шварца), но может быть получено и из элементарного неравенства

$$x_k y_k \leqslant \frac{x_k^2+y_k^2}{2}.$$

Норма в пространстве l_2 определяется согласно общему правилу по формуле

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}.$$

Теорема 11. *Пространство l_2 является сепарабельным гильбертовым пространством.*

Доказательство. Пространство l_2 сепарабельно, ибо последовательности e_k, $k=1,\ 2,\ \ldots$, у которых на всех местах стоят нули, кроме k-го, где стоит единица, образуют ортонормированный базис и, следовательно, их конечные линейные комбинации с рациональными коэффициентами образуют счетное плотное в пространстве l_2 множество (почему?).

Полнота пространства l_2 доказывается несколько сложнее. Пусть последовательность

$$x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)},\ \ldots\right),\quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{58.45}$$

является фундаментальной последовательностью пространства l_2. Тогда из неравенства

$$\|x^{(k+p)}-x^{(k)}\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^{(k+p)}-x_n^{(k)}\right)^2}\geqslant\left|x_n^{(k+p)}-x_n^{(k)}\right|,$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\quad p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

и фундаментальности последовательности (58.45) следует, что при любом фиксированном n числовая последовательность $x_n^{(k)}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, удовлетворяет критерию Коши (см. п. 3.7) и, следовательно, сходится. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty}x_n^{(k)}=x_n$. В силу фундаментальности последовательности (58.45) для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер k_ε, что при любом номере $k\geqslant k_\varepsilon$ и любом натуральном p выполняется неравенство

$$\|x^{(k+p)}-x^{(k)}\|<\varepsilon,$$

т. е.

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^{(k+p)}-x_n^{(k)}\right)^2}<\varepsilon.$$

Отсюда для любого фиксированного натурального числа m и подавно

$$\sum_{n=1}^{m}\left(x_n^{(k+p)}-x_n^{(k)}\right)^2<\varepsilon^2.$$

Переходя здесь к пределу при $p\to\infty$, получим

$$\sum_{n=1}^{m}\left(x_n-x_n^{(k)}\right)^2\leqslant\varepsilon^2,$$

и так как это верно при любом $m=1,\ 2,\ \ldots$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n-x_n^{(k)}\right)\leqslant\varepsilon^2,\quad k\geqslant k_\varepsilon. \tag{58.46}$$

Таким образом, точка $y^{(k)}=\left(x_1-x_1^{(k)},\ \ldots,\ x_n-x_n^{(k)},\ \ldots\right)$, $k\geqslant k_\varepsilon$, принадлежит пространству l_2, но тогда и точка $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)=x^{(k)}+y^{(k)}$ также принадлежит пространству l_2, а условие (58.46) означает, что

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x.$$

Итак, мы доказали, что последовательность (58.46) сходится. Следовательно, l_2 полное пространство. $\square$

В силу теоремы 10 пространство l_2 изоморфно каждому сепарабельному гильбертову пространству.

В п. 58.3 было показано, что пространство $L_2[a, b]$ сепарабельно (см. там теорему 2) для любого отрезка $[a, b]$, следовательно, оно также изоморфно пространству l_2. Можно показать, что и пространство $L_2(G)$, где G — измеримое положительной меры множество n-мерного пространства, также сепарабельно и, следовательно, изоморфно l_2. Таким образом, все гильбертовы пространства интегрируемых в квадрате функций независимо от числа переменных, от которых зависят эти функции, изоморфны между собой.

58.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ИНТЕГРИРУЕМЫМ КВАДРАТОМ В РЯД ФУРЬЕ

В § 55 изучались классические ряды Фурье, т. е. ряды Фурье по тригонометрической системе функций, для абсолютно интегрируемых функций. В этом пункте будет получен ряд следствий из общей теории рядов Фурье в гильбертовых пространствах и из свойства полноты системы тригонометрических функций в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ для тригонометрических рядов Фурье более узкого класса функций, чем абсолютно интегрируемые, а именно для функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом, т. е. для функций пространства $RL_2[-\pi, \pi]$ (см. пример 3 в п. 57.8).

Прежде всего заметим, что если в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ за ортогональную систему взять тригонометрическую систему

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots, \tag{58.2}$$

то коэффициенты Фурье элемента $f \in L_2[-\pi, \pi]$ по этой системе будут определяться согласно (58.23) по формулам

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}(f, 1), \quad a_n = \frac{1}{\pi}(f, \cos nx), \quad b_n = \frac{1}{\pi}(f, \sin nx), \tag{58.47}$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

ибо $\|1\|_{L_2} = \sqrt{2\pi}$, $\|\cos nx\|_{L_2} = \|\sin nx\|_{L_2} = \sqrt{\pi}$ (см. п. 58.1).

Если f — непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция, то $f \in CL_2[-\pi, \pi] \subset L_2[-\pi, \pi]$. Сравнивая формулы (58.47) для коэффициентов Фурье функции f с формулами (55.6) (скалярное произведение, как обычно, задается формулами (57.30)) видим, что все они совпадают, кроме формулы для коэффициента a_0, которая в (58.47) отличается от формулы в (55.6) множителем 1/2. Отдавая дань традиции будем в дальнейшем придерживаться формулы (55.6) для a_0, т. е. будет считать, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(f, 1) \tag{58.48}$$

и записывать тригонометрический ряд Фурье в виде

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Применяя теорему 6 к тригонометрической системе (58.2) в силу полноты этой системы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ (см. пример 3 в п. 58.3) получим следующую теорему.

Теорема 12. *Каждый элемент $f \in L_2[-\pi, \pi]$ раскладывается в этом пространстве в ряд Фурье по тригонометрической системе*

$$f=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{58.49}$$

причем справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2.$$

Следствие 1. *Каждая функция $f(x)$ с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом*

1) *является пределом в смысле среднего квадратичного* (*см. п.* 57.5) *своих частичных сумм Фурье $S_n(x)$ по тригонометрической системе функций при $n \to \infty$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=0; \tag{58.50}$$

2) *и для нее справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2. \tag{58.51}$$

Следствие 2. *Если функция f с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом и все ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе* (58.2) *равны нулю, то она эквивалентна нулю.*

Здесь везде коэффициенты Фурье при $n=1, 2, \ldots$ определяются по формулам (58.47), а коэффициент a_0 по формуле (58.48).

Поскольку сама теорема 12 вытекает из теоремы 6, то нуждаются в доказательстве только ее следствия.

Итак, пусть функция $f(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$, т. е. $f(x) \in RL_2[-\pi, \pi]$ (см. пример 8 в п. 57.4 и пример 3 в п. 57.8). Прежде всего заметим, что любая ей эквивалентная функция $g(x)$ (см. определение 38 в п. 57.10) имеет те же коэффициенты Фурье и, следовательно, тот же ряд Фурье. Это следует из того, что полускалярное произведение в пространстве $RL_2[-\pi, \pi]$ не меняется, если его сомножители заменить им эквивалентными (см. формулу (57.41)), и потому, если $f \sim g$, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(f,\ 1)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g,\ 1)_{RL_2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}(f,\ \cos nx)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g,\ \cos nx)_{RL_2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}(f,\ \sin nx)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g,\ \sin nx)_{RL_2},$$

$$n = 1,\ 2,\ \ldots\ ^{*)}.$$

Следовательно, если через F обозначить класс эквивалентных функций, содержащий функцию f, то в силу определения (57.41) скалярного произведения классов эквивалентных функций, т. е. скалярного произведения в пространстве $\widetilde{RL}_2[-\pi,\ \pi]$ (см. п. 57.10) будем иметь

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(F,\ 1)_{\widetilde{RL}_2},\quad a_n = \frac{1}{\pi}(F,\ \cos nx)_{\widetilde{RL}_2},\quad b_n = \frac{1}{\pi}(F,\ \sin nx)_{\widetilde{RL}_2},$$
$$n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е. ряд Фурье элемента $F \in \widetilde{RL}_2[-\pi,\ \pi] \subset L_2[-\pi,\ \pi]$ совпадает с рядом Фурье каждой функции $f \in F$. Согласно теореме 12 в пространстве $L_2[-\pi,\ \pi]$ имеет место разложение

$$F = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{58.52}$$

и равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\|F\|^2_{L_2} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{58.53}$$

Если $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — частичная сумма ряда Фурье (58.52), то сходимость этого ряда в пространстве $L_2[-\pi,\ \pi]$ к элементу F означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \|F - S_n(x)\|_{L_2} = 0. \tag{58.54}$$

Если, теперь, $f \in F$, то (см. (57.42))

$$\|F - S_n(x)\|_{L_2} = \|f(x) - S_n(x)\|_{RL_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx}, \tag{58.55}$$

---

*) Индекс у скалярных и полускалярных произведений указывает, в каких пространствах берутся рассматриваемые произведения.

где $\|f(x)-S_n(x)\|_{RL_2}$ — полунорма функции $f(x)-S_n(x)$ в пространстве $RL_2[-\pi, \pi]$, что имеет смысл, ибо $f(x)-S_n(x)\in F-S_n(x)$. Из (58.54) и (58.55) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\|f(x)-S_n(x)\|_{RL_2}=0,$$

т. е. равенство (58.50) доказано.

Далее, поскольку в силу той же формулы (57.42) имеют место равенства

$$\|F\|_{L_2}=\|f\|_{RL_2}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx}$$

и поскольку коэффициенты Фурье у F и f одинаковы, то (58.51) следует непосредственно из (58.53).

Для доказательства следствия 2 заметим, что если все коэффициенты Фурье функции $f\in RL_2[-\pi, \pi]$ по тригонометрической системе равны нулю, то из равенства Парсеваля (58.51) следует, что

$$\|f\|_{RL_2}^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=0,$$

а это согласно определению 38 из п. 57.10 эквивалентных функций и означает, что

$$f\sim 0.$$

Итак, обратим внимание на то, что если у функции с интегрируемым квадратом все коэффициенты Фурье равны нулю, то она не обязательно является тождественным нулем, а только эквивалентна ему.

Оба следствия доказаны.

Из равенства Парсеваля (58.51) еще раз (независимо от теоремы 2 п. 55.2) следует, что коэффициенты Фурье функции $f(x)$ стремятся к нулю (ибо общий член сходящегося ряда (58.51) всегда стремится к нулю), однако лишь для функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом. Поскольку всякая функция, непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ является и функцией с интегрируемым квадратом, то для нее также справедливо утверждение первого следствия теоремы 12: она раскладывается в ряд Фурье, сходящийся к ней в смысле среднего квадратичного, и для нее справедливо равенство Парсеваля (58.51).

Второе же следствие для непрерывных функций может быть существенно усилено. Сформулируем его в виде отдельной теоремы.

Теорема 13. *Если все коэффициенты Фурье непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции равны нулю, то сама эта функция тождественно равна нулю.*

Следствие (теорема единственности разложения непрерывной функции в ряд Фурье). *Если две непрерывные функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то они тождественно равны.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и все ее коэффициенты Фурье равны нулю, то из равенства Парсеваля (58.51) имеем $\|f\|_{RL_2}=0$. Но полунорма пространства $RL_2[-\pi, \pi]$ на множестве непрерывных функций является нормой (см. пример 9 в п. 57.4), поэтому $f(x)=0$ для всех $x\in[-\pi, \pi]$.

Следствие вытекает из того, что разность двух функций, у которых одинаковые коэффициенты Фурье, имеет коэффициенты Фурье, равные нулю и потому является тождественным нулем. $\square$

Замечание 1. Теоремы 12 и 13 были сформулированы применительно к тригонометрической системе функций. Подобные утверждения справедливы, конечно, для любой полной ортогональной системы функций, т. е. системы, образующей ортогональный базис в пространстве $L_2[a, b]$. В частности, аналогичные утверждения справедливы для разложений функций по полиномам Лежандра (см. пример 2 в п. 58.3) в пространстве $L_2[-1, 1]$. Например, если все коэффициенты Фурье непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции по системе полиномов Лежандра равны нулю, то эта функция равна нулю во всех точках отрезка $[-1, 1]$. Доказательства подобных утверждений могут быть проведены по той же схеме, что и выше.

Замечание 2. Основным и существенным фактом, позволившим доказать теорему 12, является полнота тригонометрической системы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, которая в свою очередь основывается на возможности сколь угодно точно в смысле среднего квадратичного приблизить на отрезке $[-\pi, \pi]$ всякую функцию с интегрируемым на этом отрезке квадратом непрерывной, периода 2π, функцией (см. лемму 16 из п. 57.10). Использование же общей теории о разложении по ортогональным системам в гильбертовом пространстве носило по существу лишь терминологический характер и позволило более кратко и наглядно проводить и записывать рассуждения. В качестве примера понятия, которое весьма удобно при рассмотрении изучаемых вопросов, отметим прежде всего понятие линейного нормированного пространства (в частности, предгильбертова пространства), а значит, и понятие нормы. Введение этих понятий позволило изложить теорию разложений по ортонормированным системам вне зависимости от их конкретного вида. Эти понятия имеют разнообразное применение и в различных других разделах математики.

В заключение, используя полученные результаты, докажем еще одну теорему.

Теорема 14. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если ее ряд Фурье сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, то его сумма равна функции f.*

Доказательство. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

— сумма ряда Фурье функции f.

Прежде всего функция $S(x)$, как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, также непрерывна. Далее, в силу теоремы 1 п. 55.1 коэффициентами Фурье функции $S(x)$ являются числа a_0, a_n, b_n, $n=1, 2, \ldots$.

Таким образом, две непрерывные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f и S имеют одинаковые коэффициенты Фурье, и поэтому в силу сказанного выше они совпадают во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$: $f(x) = S(x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. $\square$

58.7*. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ В КВАДРАТЕ ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМА ПЛАНШЕРЕЛЯ

Если квадрат функции f интегрируем на всей действительной оси, то сама функция f, вообще говоря, не абсолютно интегрируема на всей оси, как это видно на примере функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Поэтому на основании теории преобразования Фурье, изложенной в § 56, нельзя утверждать существование преобразования Фурье для функций из пространства $L_2(-\infty, \infty)$. Покажем, что в этом случае можно определить преобразование Фурье в некотором обобщенном смысле. Предварительно остановимся на определении пространства $L_2(-\infty, +\infty)$ для комплекснозначных функций.

Пусть f и g — две непрерывные функции с интегрируемым квадратом модуля на всей оси и принимающие, вообще говоря, комплексные значения. Их скалярное произведение определяется в этом случае по формуле

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} \, dx.$$

Легко проверяется, что все свойства, которыми должно обладать скалярное произведение в комплексном линейном пространстве (см. п. 57.7), в этом случае выполняются.

Пространство $L_2(-\infty, \infty)$, которое мы будем рассматривать в этом пункте, определим как пополнение предгильбертова пространства непрерывных и с интегрируемым на всей оси квадратом модуля комплекснозначных функций с указанным скалярным произведением (ср. с теоремой 6 в п. 57.10).

Через $\|f\|$ в настоящем параграфе обозначается норма элемента $f \in L_2(-\infty, +\infty)$; т. е.

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)},$$

а также и полунорма

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}\,dx}$$

для функций f с интегрируемым на всей оси квадратом модуля. Выше для случая действительных функций отмечалось без доказательства (см. п. 57.10), что каждый элемент пространства L_2 можно рассматривать как класс функций. Аналогичный факт справедлив и для пространства L_2 комплекснозначных функций, причем полунорма $\|f\|$ функций f совпадает с нормой элемента пространства L_2, которому принадлежит (в смысле, аналогичном указанному в п. 57.10) функция f. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих фактов и не будем их использовать в дальнейшем.

Комплекснозначную функцию $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — действительные функции, $-\infty < x < +\infty$, назовем финитной ступенчатой функцией, если финитными ступенчатыми функциями являются функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (см. определение 7 в п.55.2). В дальнейшем для краткости финитные ступенчатые функции будем называть просто ступенчатыми функциями.

Любые две ступенчатые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно представить в виде конечной линейной комбинации о д н и х и т е х ж е одноступенчатых функций (см. п. 55.2), принимающих значения 1 и 0. Для этого достаточно взять всевозможные непустые пересечения полуинтервалов постоянства функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Эти пересечения также являются полуинтервалами $[x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, на которых постоянны одновременно функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому если

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{k-1} \leqslant x < x_k, \\ 0, & \text{если } x < x_{k-1} \text{ или } x \geqslant x_k, \end{cases}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

— соответствующие одноступенчатые функции, то существуют такие действительные числа λ_k, $\mu_k = 1, 2, \ldots, n$, что

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \omega_k(x).$$

Отсюда следует, что любая комплекснозначная ступенчатая функция $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$ представима в виде

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\zeta_k\omega_k(x), \tag{58.56}$$

где $\zeta_k=\lambda_k+i\mu_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, — комплексные числа.

Лемма 6. *Пусть f — комплекснозначная ступенчатая функция и $F[f]$ — ее преобразование Фурье, тогда*

$$\|F[f]\|=\|f\|.$$

Доказательство. Если функция f задана формулой (58.56), то

$$\|f\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{f(x)}\,dx=$$

$$=\sum_{j,\,k=1}^{n}\zeta_j\bar{\zeta}_k\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_j(x)\overline{\omega_k(x)}\,dx=\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|^2(x_k-x_{k-1}). \tag{58.57}$$

Пусть теперь $0<\eta<+\infty$; тогда

$$\int_{-\eta}^{\eta}F[f]\overline{F[f]}\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ixy}\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(\xi)}\,e^{i\xi y}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{f(\xi)}\,dx\,d\xi\int_{-\eta}^{\eta}e^{iy(\xi-x)}\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{f(\xi)}\frac{\sin\eta(\xi-x)}{\xi-x}\,dx\,d\xi. \tag{58.58}$$

Все преобразования здесь законны, так как на самом деле все интегралы берутся в конечных пределах.

Поскольку действительная и мнимая части функции $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы о представлении функций с помощью интеграла Фурье (см. теорему 1 в п. 56.1), то для всех x, кроме $x=x_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, имеем (см. доказательство указанной теоремы),

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(\xi)}\frac{\sin\eta(\xi-x)}{\xi-x}\,d\xi=\overline{f(x)}.$$

Оказывается, что в силу этого при наших предположениях в последнем интеграле (58.58) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\eta\to+\infty$. Однако соответствующая теорема не была доказана в настоящем курсе, и потому нам придется сделать несколько дополнительных вычислений. Подставляя (58.56) в (58.58), получим

$$\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\overline{F[f]}\,dy=\frac{1}{\pi}\sum_{i,\,k=1}^{n}\zeta_j\overline{\zeta_k}\int_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\sin\eta(\xi-x)}{\xi-x}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{i,\,k=1}^{n}\zeta_j\overline{\zeta_k}\int_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}\,dt. \qquad (58.59)$$

Рассмотрим поведение каждого слагаемого получившейся суммы при $\eta\to+\infty$. Если $j=k$, то, меняя порядок интегрирования (рис. 230) и производя интегрирование по переменной x, получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\eta(x_k-x_{k-1})}\left(x_k-x_{k-1}-\frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{-\eta(x_k-x_{k-1})}^{0}\left(x_k-x_{k-1}+\frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}(x_k-x_{k-1})\int_{0}^{\eta(x_k-x_{k-1})}\frac{\sin t}{t}\,dt+\frac{2}{\pi\eta}[1-\cos\eta(x_k-x_{k-1})].$$

Поскольку

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

(см. п. 54.4), то

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{2}{\pi}(x_k-x_{k-1})\int_{0}^{\eta(x_k-x_{k-1})}\frac{\sin t}{t}\,dt=x_k-x_{k-1}.$$

Далее, очевидно,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{\pi\eta}[1-\cos\eta(x_k-x_{k-1})]=0,$$

поэтому

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}\,dt=x_k-x_{k-1},\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

Покажем теперь, что при $j \neq k$

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0.$$

Пусть для определенности $x_{j-1} < x_j \leqslant x_{k-1} < x_k$. При других расположениях полуинтервалов постоянства $[x_{j-1}, x_j)$ и $[x_{k-1}, x_k)$

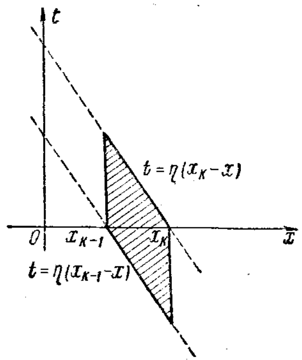

Рис. 230

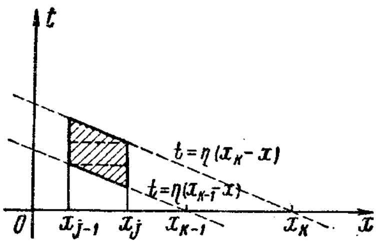

Рис. 231

доказательство аналогично. Меняя снова порядок интегрирования и производя интегрирование по x (рис. 231), с помощью аналогичных рассуждений получим

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int\limits_{\eta(x_k-x_j)}^{\eta(x_k-x_{j-1})} \left(x_k - x_{j-1} - \frac{t}{\eta}\right) \frac{\sin t}{t}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x_{j-1})}^{\eta(x_k-x_j)} (x_j - x_{j-1}) \frac{\sin t}{t}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x_j)}^{\eta(x_{k-1}-x_{j-1})} \left(x_j - x_{k-1} + \frac{t}{\eta}\right) \frac{\sin t}{t}\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty.$$

Теперь из (58.59) имеем

$$\|F[f]\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F[f]\overline{F[f]}\, dx = \lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_{-\eta}^{\eta} F[f] F\overline{[f]}\, dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 (x_k - x_{k-1}) = \|f\|^2. \;\square$$

Лемма 7. *Пусть f — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и равная нулю вне его, тогда существует последовательность таких ступенчатых функций φ_n, $n=1, 2, \ldots$, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi-\varphi_n\|=0.$$

Доказательство. Для действительных функций это следует из леммы 14 п. 57.10. Пусть теперь $\varphi=u+iv$ — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$; тогда действительные функции u и v также непрерывны на отрезке $[a, b]$. Поэтому существуют такие последовательности ступенчатых функций $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, что $\|u-u_n\|\to 0$ и $\|v-v_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Если $\varphi_n=u_n+iv_n$, то $\|\varphi-\varphi_n\|\leqslant\|u-u_n\|+\|v-v_n\|$, отсюда $\|\varphi-\varphi_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. □

Лемма 8. *Пусть комплекснозначная функция φ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и равна нулю вне его, тогда*

$$\|F[\varphi]\|=\|\varphi\|.$$

Доказательство. Пусть φ_n — последовательность ступенчатых функций таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi-\varphi_n\|=0$$

(см. лемму 7), тогда в силу непрерывности нормы

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|=\|\varphi\|. \tag{58.60}$$

Из неравенства же Коши — Буняковского получим

$$\int_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,dx\leqslant\left(\int_a^b dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}=$$
$$=(b-a)^{1/2}\left(\int_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,dx=0,$$

т. е. последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится в среднем к функции φ и в смысле L_1. Поэтому если

$$\psi=F[\varphi],\quad \psi_n=F[\varphi_n],\quad n=1, 2, \ldots,$$

то последовательность непрерывных (см. следствие леммы 4 в п. 56.7) функций $\{\psi_n\}$ равномерно сходится к функции ψ, которая в силу этого непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, в силу леммы 6

$$\|\psi_n\| = \|\varphi_n\|. \tag{58.61}$$

Отсюда следует, в частности, что непрерывные функции ψ_n являются функциями с интегрируемым квадратом модуля, т. е. принадлежат пространству $L_2(-\infty, +\infty)$. Далее, функции ψ_n, $n=1, 2, \ldots$, образуют фундаментальную последовательность в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$. Эго следует из сходимости в среднем в смысле L_2 последовательности $\{\varphi_n\}$ и из равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(y) - \varphi_m(y)|^2\,dy,$$

которое также вытекает из леммы 6, ибо разность ступенчатых функций также является ступенчатой функцией.

Покажем, что последовательность $\{\psi_n\}$ сходится к функции ψ и в пространстве L_2. Действительно, пусть фиксировано $\varepsilon > 0$, тогда в силу фундаментальности последовательности $\{\psi_n\}$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\|\psi_n - \psi_m\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2\,dy < \varepsilon.$$

Тем более, для любого числа $c > 0$ будем иметь

$$\int\limits_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2\,dy < \varepsilon. \tag{58.62}$$

При фиксированных n и c при $m \to \infty$ подынтегральное выражение в (58.62) равномерно стремится к функции $|\psi_n(y) - \psi(y)|^2$. Поэтому в неравенстве (58.62) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $m \to \infty$. В результате будем иметь

$$\int\limits_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2\,dy \leqslant \varepsilon.$$

Устремляя теперь c к $+\infty$, получим, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2\,dy \leqslant \varepsilon, \tag{58.63}$$

что и означает сходимость в среднем в смысле L_2 последовательности $\{\psi_n\}$ к функции ψ.

Из доказанного следует также, что $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$. Действительно, в силу (58.61) и (58.63)

$$\|\psi\| \leqslant \|\psi - \psi_n\| + \|\psi_n\| < +\infty.$$

Наконец, из неравенства (57.18) и того что $\lim\limits_{n\to\infty}\|\psi_n-\psi\|=0$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\|\psi_n\|=\|\psi\|. \tag{58.64}$$

Из (58.60), (58.61) и (58.64) следует, что

$$\|\psi\|=\|\varphi\|. \ \square$$

Теорема 15 (Планшерель *)). *Пусть функция φ непрерывна и с интегрируемым квадратом модуля на всей числовой оси и пусть*

$$\psi_M(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-M}^{M}\varphi(x)e^{-ixy}\,dx, \qquad M>0.$$

Тогда:

1) *функция $\psi_M(y)$ также непрерывна и с интегрируемым на всей числовой оси квадратом,*

2) *при $M\to+\infty$ функции ψ_M сходятся в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ к некоторому элементу $\psi\in L_2(-\infty, +\infty)$ и*

3) $\|\varphi\|=\|\psi\|$.

Доказательство. Если

$$\varphi_M(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если} \quad x\in[-M, M],\\ 0, & \text{если} \quad x\notin[-M, M],\end{cases}$$

то, очевидно,

$$\psi_M=F[\varphi_M],$$

$$\lim_{M\to+\infty}\varphi_M=\varphi \text{ в } L_2(-\infty, +\infty), \tag{58.65}$$

$$\lim_{M\to+\infty}\|\varphi_M\|=\|\varphi\|. \tag{58.66}$$

Согласно лемме 8,

$$\|\psi_M\|=\|\varphi_M\|, \quad M>0, \tag{58.67}$$

$$\|\psi_{M_1}-\psi_{M_2}\|=\|\varphi_{M_1}-\varphi_{M_2}\|, \quad M_1>0, \quad M_2>0. \tag{58.68}$$

Из (58.65) и (58.68) следует в силу полноты пространства $L_2(-\infty, \infty)$, что существует предел (почему?)

$$\lim_{M\to+\infty}\psi_M=\psi \text{ в } L_2(-\infty, +\infty).$$

В силу непрерывности нормы

$$\lim_{M\to+\infty}\|\psi_M\|=\|\psi\| \tag{58.69}$$

из (58.66), (58.67) и (58.69) имеем

$$\|\psi\|=\|\varphi\|. \ \square$$

---

*) М. Планшерель (1885—1967) — швейцарский математик.

Полученный в процессе доказательства элемент $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ мы будем также называть *преобразованием Фурье* заданной непрерывной функции $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ и писать

$$\psi = F[\varphi]. \tag{58.70}$$

Эта запись естественна, так как если функция φ, кроме того, и абсолютно интегрируема, то $\lim\limits_{M \to +\infty} \psi_M$ совпадает с обычным преобразованием Фурье. Действительно, в этом случае

$$\lim_{M \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_M(x) - \varphi(x)|\, dx = 0.$$

Следовательно, функции $\psi_M = F[\varphi_M]$ при $M \to \infty$ равномерно сходятся к преобразованию Фурье $F[\varphi]$ функции φ. Как мы видели, ψ_M сходится в среднем в смысле L_2 к функции ψ; отсюда нетрудно убедиться, что $\psi = F[\varphi]$ (сравнить аналогичное рассуждение в доказательстве леммы 8).

Преобразование Фурье (58.70) определено пока лишь для тех элементов $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$, которые являются непрерывными функциями с интегрируемым квадратом, однако по непрерывности оно может быть распространено на все пространство $L_2(-\infty, +\infty)$. Действительно, пусть φ — произвольный элемент из пространства $L_2(-\infty, +\infty)$. Согласно определению пространства $L_2(-\infty, +\infty)$ множество непрерывных функций плотно в нем. Следовательно, существует последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n \in L_2(-\infty, +\infty), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$.

Пусть $F[\varphi_n] = \psi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. В силу теоремы Планшереля

$$\|\psi_n - \psi_m\| = \|\varphi_n - \varphi_m\|, \qquad n, m = 1, 2, \ldots,$$

поэтому последовательность $\{\psi_n\}$ фундаментальна в L_2 и, следовательно, сходится. Пусть $\psi = \lim\limits_{n \to \infty} \psi_n$. По определению полагаем

$$\psi = F[\varphi]. \tag{58.71}$$

Если $\varphi_n^* \in L_2(-\infty, +\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$, — какая-либо другая последовательность непрерывных функций, сходящаяся в $L_2(-\infty, +\infty)$ к элементу φ, и если $\psi_n^* = F[\varphi_n^*]$, то из равенства

$$\|\varphi_n - \varphi_n^*\| = \|\psi_n - \psi_n^*\|$$

имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \psi_n^* = \psi$. Таким образом, определение (58.71) не зависит от выбора последовательности непрерывных функций, сходящейся к элементу φ.

Для любого $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|,$$

что сразу следует из того, что это равенство имеет место для непрерывных функций $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ и непрерывности нормы.

Далее, легко проверить, что преобразование Фурье F линейно на $L_2(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$F[\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2] = \lambda_1 F[\varphi_1] + \lambda_2 F[\varphi_2]$$

для любых φ_1 и φ_2 из $L_2(-\infty, +\infty)$ и любых чисел λ_1 и λ_2. Это верно для ступенчатых функций. Они образуют плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Отсюда предельным переходом указанное равенство получается для любых элементов пространства $L_2(-\infty, +\infty)$.

Наконец, преобразование Фурье отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, т. е. каков бы ни был элемент $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, существует такой элемент $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$, что $F[\varphi] = \psi$. Для того чтобы это показать, следует тем же методом, как это было сделано для преобразования Фурье, определить на пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ обратное преобразование Фурье F^{-1} и показать, что для любого элемента $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство $\|F^{-1}[\psi]\| = \|\psi\|$. Затем можно показать, что

$$F[F^{-1}[\psi]] = \psi \quad \text{и} \quad F^{-1}[F[\psi]] = \psi$$

для всех $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, исходя из того, что это верно на множестве ступенчатых функций, образующих плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Если теперь для элемента $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ взять элемент $\varphi = F^{-1}[\psi]$, то получим $F[\varphi] = \psi$, что и означает, что преобразование F отображает все пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя.

Суммируя все сказанное, получим следующую теорему.

Теорема 16 (Планшерель). *Преобразование Фурье F линейно и взаимно однозначно отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, при этом для любого элемента $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство*

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|.$$

§ 59. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

59. 1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

В этом параграфе мы рассмотрим одно обобщение классического понятия функции, а именно понятие обобщенной функции. Оно возникло при решении некоторых физических задач и в последние годы быстро и прочно вошло в математику. С помощью этого понятия можно распространить преобразование Фурье на существенно более широкий класс функций, чем абсолютно интегрируемые