

Для любого $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|,$$

что сразу следует из того, что это равенство имеет место для непрерывных функций $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ и непрерывности нормы.

Далее, легко проверить, что преобразование Фурье F линейно на $L_2(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$F[\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2] = \lambda_1F[\varphi_1] + \lambda_2F[\varphi_2]$$

для любых φ_1 и φ_2 из $L_2(-\infty, +\infty)$ и любых чисел λ_1 и λ_2 . Это верно для ступенчатых функций. Они образуют плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Отсюда предельным переходом указанное равенство получается для любых элементов пространства $L_2(-\infty, +\infty)$.

Наконец, преобразование Фурье отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, т. е. каков бы ни был элемент $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, существует такой элемент $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$, что $F[\varphi] = \psi$. Для того чтобы это показать, следует тем же методом, как это было сделано для преобразования Фурье, определить на пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ обратное преобразование Фурье F^{-1} и показать, что для любого элемента $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство $\|F^{-1}[\psi]\| = \|\psi\|$. Затем можно показать, что

$$F[F^{-1}[\psi]] = \psi \quad \text{и} \quad F^{-1}[F[\psi]] = \psi$$

для всех $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, исходя из того, что это верно на множестве ступенчатых функций, образующих плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Если теперь для элемента $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ взять элемент $\varphi = F^{-1}[\psi]$, то получим $F[\varphi] = \psi$, что и означает, что преобразование F отображает все пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя.

Суммируя все сказанное, получим следующую теорему.

Теорема 16 (Планшерель). Преобразование Фурье F линейно и взаимно однозначно отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, при этом для любого элемента $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|.$$

§ 59. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

59. 1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

В этом параграфе мы рассмотрим одно обобщение классического понятия функции, а именно понятие обобщенной функции. Оно возникло при решении некоторых физических задач и в последние годы быстро и прочно вошло в математику. С помощью этого понятия можно распространить преобразование Фурье на существенно более широкий класс функций, чем абсолютно интегрируемые

или интегрируемые в квадрате функции. Оно позволяет сформулировать на математическом языке такие идеализированные понятия, как, например, плотность точечного заряда, плотность материальной точки, мгновенный импульс и т. п.

Поясним это подробнее. При изучении физических явлений с помощью математического аппарата нам неизбежно приходится пользоваться различными математическими абстракциями, в частности понятием точки. Мы говорим, например, о массе, сосредоточенной в данной точке пространства, о силе, приложенной в данный момент времени (т. е. в данной точке оси отсчета времени), о точечном источнике того или иного физического поля и т. п. Это удобно при использовании математического аппарата, хотя при этом мы воспроизводим не вполне точную реальную картину: всякая масса имеет определенный объем, всякая сила действует определенный промежуток времени, всякий источник поля имеет определенные размеры и т. д. Оказывается, что при таком подходе к изучению физических явлений недостаточно методов классической математики. Иногда приходится вводить новые математические понятия, создавать новый математический аппарат.

Рассмотрим в качестве примера действие «мгновенной» силы. Пусть в момент времени $t=0$ на тело массы $m \neq 0$ подействовала сила, сообщившая ему скорость $v \neq 0$, после чего действие силы прекратилось. Обозначая через $F(t)$ силу, действующую на тело в момент времени t , получим $F(t)=0$ при $t \neq 0$. Попытаемся найти, чему же равна сила $F(t)$ при $t=0$. По второму закону Ньютона сила равна скорости изменения количества движения относительно времени

$$F(t) = \frac{d(mv)}{dt}$$

и, следовательно, для любого момента времени τ , $0 < \tau < +\infty$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\tau} F(t) dt = mv. \quad (59.1)$$

В качестве нижнего предела интегрирования взята $-\infty$; можно, конечно, вместо нее взять и любое число $a < 0$, поскольку до момента времени $t=0$ тело находилось в покое.

Обратим внимание на то, что с точки зрения классической математики, т. е. с точки зрения того понятия интеграла, которое было нами изучено, равенство (59.1) лишено смысла: функция $F(t)$ равна нулю во всех точках, кроме $t=0$ и потому стоящий в левой части формулы (59.1) интеграл, рассматриваемый как несобственный, равен нулю, в то время как правая часть этого равенства не равна нулю. Вместе с тем, исходя из физических соображений, естественно ожидать, что написанное равенство имеет определен-

ный смысл. Это противоречие означает, что мы оказались за пределами возможности использования известного нам математического аппарата, что необходимо ввести какие-то новые математические понятия.

Предположим, для простоты, что количество движения, которое получило тело, равно единице, т. е. что $mv = 1$. В этом случае силу $F(t)$, действующую на тело, будем обозначать через $\delta(t)$, следовательно, формула (59.1) будет теперь иметь вид

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) dt = 1, \quad \tau > 0. \quad (59.2)$$

Функция $\delta(t)$ называется обычно дельта-функцией (δ -функцией), или функцией Дирака*).

Чтобы лучше проникнуть в сущность вопроса, предположим, что на тело действует не мгновенная сила, а что в течение промежутка времени от $-\varepsilon$ до 0 ($\varepsilon > 0$) на тело действует некоторая постоянная сила, которую мы обозначим через $\delta_\varepsilon(t)$. Предположим также, что эта сила сообщает нашему телу то же самое количество движения, равное единице. Короче говоря, распределим искомую силу $\delta(t)$ на интервал длины ε . Найдем силу $\delta_\varepsilon(t)$.

По закону сохранения времени для любого времени $\tau \geq 0$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Поскольку сила $\delta_\varepsilon(t)$ равна нулю вне отрезка $[-\varepsilon, 0]$, а на этом отрезке постоянна, то

$$1 = \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) dt = \int_{-\varepsilon}^0 \delta_\varepsilon(t) dt = \varepsilon \delta_\varepsilon(t), \quad -\varepsilon \leq t \leq 0.$$

Поэтому

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & \text{если } -\varepsilon \leq t \leq 0, \\ 0, & \text{если } t < -\varepsilon \text{ или } t > 0. \end{cases} \quad (59.3)$$

Естественно предположить, что мгновенная сила $\delta(t)$ получается из «распределенной силы» $\delta_\varepsilon(t)$ предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t),$$

тогда

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } t = 0, \\ 0, & \text{если } t \neq 0. \end{cases} \quad (59.4)$$

*) П. Дирак (род. 1902 г.) — английский физик.

Эта формула не дает нам возможности, используя известные определения интеграла (собственного или несобственного), получить формулу (59.2). Равенство нулю функции во всех точках, кроме одной, где она равна бесконечности, и одновременное равенство интеграла от этой функции единице противоречат друг другу в рамках той математики, которая в настоящее время называется классической. Это приводит к мысли о необходимости введения нового определения — определения «интеграла» (59.2).

Физически естественно считать, что количество движения, приданное телу мгновенной силой $\delta(t)$, т. е. интеграл (59.2) является пределом количества движения, приданного телу распределенными во времени силами $\delta_\varepsilon(t)$, когда время их действия стремится к нулю, т. е. когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому положим, по определению

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) dt, \quad \tau > 0.$$

Отсюда в силу равенства $\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) dt \equiv 1$, $\tau > 0$ для всех $\varepsilon > 0$ и следует непосредственно равенство (59.2).

Таким образом, когда говорится, что интеграл (59.2) от дельта-функции равен единице, то этот интеграл следует понимать как предел соответствующих обычных интегралов от δ_ε -функций при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Оказывается полезным дать аналогичным образом определение и более общих «интегралов», а именно интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t) dt, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad (59.5)$$

где $f(t)$ — некоторая непрерывная функция. Именно, определим символ (59.5) равенством

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt. \quad (59.6)$$

Чтобы доказать, что это определение корректно, надо доказать, что предел (59.6) всегда существует. Покажем, более того, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt = \begin{cases} f(0) & \text{при } \tau \geq 0, \\ 0 & \text{при } \tau < 0. \end{cases} \quad (59.7)$$

Пусть сначала $\tau \geq 0$. Используя (59.3), получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt - f(0) \right| &= \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 f(t) dt - \frac{f(0)}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 |f(t) - f(0)| dt. \end{aligned} \quad (59.8)$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ при $x = 0$ для любого $\eta > 0$ существует такое $\epsilon_\eta > 0$, что для всех t , удовлетворяющих условию $|t| < \epsilon_\eta$, выполняется неравенство

$$|f(t) - f(0)| < \eta.$$

Поэтому для всех $\epsilon < \epsilon_\eta$ из неравенства (59.8) следует, что

$$\left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\epsilon(t) f(t) dt - f(0) \right| < \frac{\eta}{\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt = \eta.$$

Равенство (59.7) при $\tau \geq 0$ доказано. Еще проще оно доказывается при $\tau < 0$. Итак, из определения (59.6) следует, что для любой непрерывной функции $f(t)$ справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t) dt = \begin{cases} f(0) & \text{при } \tau \geq 0, \\ 0 & \text{при } \tau < 0. \end{cases} \quad (59.9)$$

Формула (59.2) следует отсюда при $f(t) \equiv 1$.

Если положить

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (59.10)$$

то формула (59.9) при $f(t) \equiv 1$ переписывается в виде

$$\theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) dt. \quad (59.11)$$

Функция $\theta(t)$ имеет специальное название — она называется функцией Хевисайда*). Вычисляя производную функции $\theta(t)$ согласно классическому определению производной из (59.10) получим

$$\theta'(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases} \quad (59.12)$$

На основании этого было бы неверно утверждать, что $\theta'(t)$ является дельта-функцией, так как одной лишь формулой (59.4) функция $\delta(t)$ не определяется, поскольку даже физически ясно, что только из этой формулы не может следовать, что сила $\delta(t)$ сообщает рассматриваемому телу именно единичное количество движения. Однако, удобно положить, по определению

$$\theta'(t) = \delta(t).$$

Это помимо равенства (59.12) оправдывается тем, что в этом случае сохраняется основная формула интегрального исчисления, восстанавливающая функцию по ее производной — формула

*) О. Хевисайд (1850—1925) — английский физик.

Ньютона — Лейбница. Действительно, теперь формула (59.11) может быть переписана в виде

$$\theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \theta'(t) dt, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

(отметим, что $\theta(-\infty) = 0$).

Заметим, что мы не дали четкого математического определения самой функции $\delta(t)$ как функции точки (выше отмечалось, что формула (59.4) не является таким определением); это вообще невозможно сделать, так как дельта-функция является понятием другой природы. Мы же определили не функцию $\delta(t)$, а «интеграл» (59.5). Это не случайно. Характерным для многих задач физики является то обстоятельство, что вводимые для описания того или иного объекта функции имеют смысл лишь постольку, поскольку непосредственный физический смысл имеют некоторые интегралы от этих функций. Обобщенные функции и возникают как некоторое обобщение семейств интегралов от произведения двух функций, одна из которых фиксирована, а другая может выбираться произвольно из некоторой совокупности.

Итак, нами определено новое понятие — понятие интеграла от дельта-функции (и даже более общее понятие интеграла от произведения непрерывной функции на дельта-функцию). Это не обычный интеграл, т. е. не предел интегральных сумм, а предел соответствующих интегралов, или, образно выражаясь, «предел пределов интегральных сумм». Иначе говоря, для определения

интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx$ надо к предельному переходу, дающему

значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x) dx$, добавить еще один предель-

ный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь наблюдается своеобразная аналогия с определением несобственного интеграла: исходя из известного определения интеграла, мы с помощью дополнительного предельного перехода получаем новое математическое понятие. Конечно, дополнительные предельные переходы в этих случаях различны, это приводит к различным понятиям.

При новом определении символа (59.5) мы находимся в кругу привычных нам математических определений, расширяющих запас понятий, с которыми имели дело раньше; нам удалось выявить одно интересное свойство дельта-функции $\delta(t)$ (см. (59.9)): она ставит в соответствие каждой непрерывной функции $f(t)$ число $f(0)$; т. е. дельта-функцию можно рассматривать как функцию, определенную на множестве всех непрерывных функций. Образования, области определения которых представляют собой некоторые множества функций, называются *функционалами*. Дельта-функ-

ция является одним из простейших примеров функционалов. Обобщенными функциями, которые упоминались в начале этого пункта, называются функционалы определенного вида (см. п. 59.2).

Как мы видели, свойства дельта-функции определяются свойствами функций $\delta_\varepsilon(x)$. Если взять $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, то получится последовательность функций, которая, как и аналогичные ей в определенном смысле, называется дельта-образной последовательностью (точное определение дельта-образных последовательностей будет дано ниже: см. упражнение 6 в п. 59.3). Всякая дельта-образная последовательность может служить для определения свойства (59.9) дельта-функции. Следует отметить, что мы уже встречались раньше с дельта-образными последовательностями: примером такой последовательности является последовательность ядер Фейера $\Phi_n(n)$, $n = 1, 2, \dots$. Однако мы не акцентировали внимания на последовательностях такого рода, поскольку они, не являясь самостоятельным объектом изучения, играли вспомогательную роль.

Теперь мы перейдем к систематическому изучению обобщенных функций. Отдельные обобщенные функции возникли первоначально в работах П. Дирака и других физиков в качестве символического способа описания определенных физических явлений. Для использования этих понятий в качестве метода теоретического исследования возникла необходимость создания теории обобщенных функций, что и было сделано. Теория обобщенных функций является весьма полезным математическим аппаратом. С ее помощью удалось решить ряд задач, не поддававшихся решению старыми методами. Ныне обобщенные функции широко применяются как в прикладных, так и в чисто математических исследованиях.

В следующих пунктах этого параграфа мы изложим основы общей теории обобщенных функций, построенной С. Л. Соболевым и Л. Шварцем*.

59.2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СХОДИМОСТЬЮ. ФУНКЦИОНАЛЫ. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. Пусть X — некоторое множество и пусть в совокупности всех последовательностей $\{x_n\}$ его элементов, $x_n \in X$, выделен некоторый класс последовательностей, названных сходящимися, и каждой сходящейся последовательности поставлен в соответствие элемент $x \in X$, называемый ее пределом.

Если при этом выполняются три условия:

1) каждая последовательность элементов множества X может иметь не более одного предела;

* С. Л. Соболев (род. в 1908 г.) — советский математик; Л. Шварц (род. в 1915 г.) — французский математик.

2) всякая последовательность вида $\{x, x, x, \dots, x, \dots\}$ является сходящейся, и ее пределом является элемент x ;

3) всякая подпоследовательность сходящейся последовательности также является сходящейся и имеет тот же предел, что и вся последовательность,

то множество X называется пространством со сходимостью. Условия 1, 2 и 3 называются аксиомами Фреше^{*}).

Если x является пределом последовательности $\{x_n\}$, то, как обычно, пишется

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Определение 2. Линейное пространство X называется линейным пространством со сходимостью, если оно является пространством со сходимостью, относительно которой операции сложения элементов пространства и умножения их на число являются непрерывными.

Это означает, что для любых сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов из X , имеющих своими пределами соответственно $x \in X$ и $y \in X$, и любых чисел λ и μ последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ также сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y.$$

Кроме того, если $\{\lambda_n\}$ — числовая последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x = \lambda x$ для любого $x \in X$.

Примером линейных пространств со сходимостью являются нормированные линейные пространства; однако существуют линейные пространства со сходимостью, в которых нельзя ввести норму, порождающую заданную сходимую последовательностей.

Определение 3. Отображения линейного пространства X во множество действительных чисел \mathbb{R} (или во множество комплексных чисел \mathbb{C}) называются функционалами, определенными на этом пространстве или функционалами над этим пространством. Значение функционала f в точке x линейного пространства X обозначается через (f, x) , т. е. так же как скалярное произведение элементов f и x в линейном пространстве X со скалярным произведением.

Это обозначение оправдывается, в частности, тем, что скалярное произведение (y, x) при фиксированном элементе y является функционалом, определенным на указанном пространстве X .

Определение 4. Пусть X — линейное пространство. Функционал f , определенный на этом пространстве, называется линейным (точнее, линейным однородным), если для любых элементов $x \in X$, $y \in X$ и любых чисел λ , μ выполняется условие

$$(f, \lambda x + \mu y) = \lambda (f, x) + \mu (f, y).$$

^{*} М. Фреше (1878 — 1973) — французский математик.

Определение 5. Функционал f , определенный на линейном пространстве X со сходимостью, называется непрерывным, если для любой сходящейся последовательности $x_n \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, x_n) = (f, x).$$

Функционалы, как и всякие числовые функции, можно складывать, умножать друг на друга, в частности на число. Например, если f и g — функционалы, то значение функционала $\alpha f + \beta g$ (α и β — числа) в точке $x \in X$ определяется по формуле

$$(\alpha f + \beta g, x) = \alpha (f, x) + \beta (g, x).$$

Лемма 1. Линейные непрерывные функционалы образуют линейное пространство.

Доказательство. Пусть f и g — линейные функционалы, α и β — числа. Покажем, что $\alpha f + \beta g$ — также линейный функционал:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g, \lambda x + \mu y) &= \alpha (f, \lambda x + \mu y) + \beta (g, \lambda x + \mu y) = \\ &= \alpha [\lambda (f, x) + \mu (f, y)] + \beta [\lambda (g, x) + \mu (g, y)] = \\ &= \lambda [\alpha (f, x) + \beta (g, x)] + \mu [\alpha (f, y) + \beta (g, y)] = \\ &= \lambda (\alpha f + \beta g, x) + \mu (\alpha f + \beta g, y), \end{aligned}$$

т. е. $\alpha f + \beta g$ — линейный функционал.

Пусть теперь f и g — непрерывные функционалы. Покажем, что тогда и $\alpha f + \beta g$ — также непрерывный функционал. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha f + \beta g, x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha (f, x_n) + \beta (g, x_n)] = \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} (f, x_n) + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} (g, x_n) = \alpha (f, x) + \beta (g, x) = (\alpha f + \beta g, x). \end{aligned}$$

Таким образом, во множестве линейных непрерывных функционалов естественным образом определены операции их сложения и умножения на число. Выполнение для этих операций аксиом линейного пространства проверяется безо всякого труда. \square

В линейном пространстве линейных непрерывных функционалов пространства X понятие сходимости последовательностей определяется следующим образом.

Определение 6. Последовательность функционалов f_n , $n = 1, 2, \dots$, называется сходящейся к функционалу f , если последовательность значений функционалов f_n сходится в каждой точке $x \in X$ к значению в ней функционала f , иначе говоря, если для любого элемента $x \in X$ числовая последовательность $\{(f_n, x)\}$ сходится к числу (f, x) .

Таким образом, утверждение $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ равносильно утверждению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, x) = (f, x) \text{ для всех } x \in X.$$

При таком определении сходимости функционалов операции их сложения и умножения на число непрерывны (это непосредственно следует из линейности функционалов и из свойств пределов числовых последовательностей), и, следовательно, если ввести понятие сходимости функционалов согласно определению 6, то будет справедливым следующее утверждение, которое мы сформулируем в виде отдельной леммы.

Лемма 2. *Линейные непрерывные функционалы, определенные на пространстве со сходимостью, также образуют линейное пространство со сходимостью.*

Определение 7. *Линейное пространство со сходимостью, элементами которого являются линейные непрерывные функционалы, определенные на пространстве X , называется пространством сопряженным X .*

Пусть X и Y — линейные пространства со сходимостью, причем каждый элемент пространства X является элементом пространства Y и пусть всякая последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся в X к элементу x , сходится к x и в Y . В этом случае будем писать

$$X \subset Y.$$

Определение 8. *Говорят, что линейный непрерывный функционал f , определенный на пространстве $X \subset Y$, продолжаем на пространство Y в линейный непрерывный функционал, если существует такой линейный непрерывный функционал F , определенный на пространстве Y , что $(F, x) = (f, x)$ для всех $x \in X$ (т. е. $F = f$ на Y). В этом случае функционал F называется продолжением функционала f .*

Упражнение 1. Пусть X и Y — линейные пространства со сходимостью. Доказать, что если $X \subset Y$ и множество X плотно в пространстве Y (т. е. каждый элемент из пространства Y является пределом в этом пространстве последовательности элементов из X), то всякий линейный непрерывный функционал пространства X , продолжаемый в линейный непрерывный функционал пространства Y , продолжаем единственным образом.

Как и для отображений любых линейных пространств, для пространств со сходимостью имеет смысл понятие линейного отображения (линейного оператора) одного пространства со сходимостью в другое такое же пространство (см. определение 17 в п. 57.2). Введем еще понятие непрерывного отображения одного линейного пространства со сходимостью в другое.

Определение 9. *Пусть X_1 и X_2 — два линейных пространства со сходимостью. Отображение Φ пространства X_1 в X_2 (в этом случае отображение называется также и оператором) называется*

непрерывным в точке $x_0 \in X_1$, если, какова бы ни была последовательность $x_n \in X_1$, $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся в пространстве X_1 к точке x_0 , последовательность $\Phi(x_n) \in X_2$, $n = 1, 2, \dots$, сходится в X_2 к элементу $\Phi(x_0)$.

Иначе говоря, отображение Φ является непрерывным в точке x_0 , если из $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0)$.

Лемма 3. Если линейное отображение Φ линейного пространства со сходимостью X_1 в линейное пространство со сходимостью X_2 непрерывно в нуле пространства X_1 , то оно непрерывно и всюду в X_1 .

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$; тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0) = 0$. В силу непрерывности отображения Φ в нуле

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n - x_0) = 0.$$

Поскольку отображение Φ линейно, то

$$\Phi(x_n - x_0) = \Phi(x_n) - \Phi(x_0)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\Phi(x_n) - \Phi(x_0)] = 0, \quad \text{откуда} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0).$$

Таким образом, отображение Φ непрерывно в каждой точке $x_0 \in X_1$. \square

Определение 10. Отображение Φ линейного пространства со сходимостью X_1 в линейное пространство со сходимостью X_2 называется непрерывным на X_1 , если оно непрерывно в каждой точке пространства X_1 .

Для всякого линейного пространства X со сходимостью имеют смысл понятие ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, сходящегося ряда и его суммы. Эти понятия вводятся аналогично случаю линейных нормированных пространств. Это возможно, поскольку в соответствующих определениях из свойств нормы используется лишь то, что во всяком нормированном пространстве определено понятие сходящейся последовательности.

Примеры линейных и непрерывных отображений пространств со сходимостью будут даны в п. 59.6 и в п. 59.7.

59.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ. ПРОСТРАНСТВА D И D'

Определим прежде всего основное для нас линейное пространство функций D . Для этого рассмотрим функции, заданные на множестве действительных чисел \mathcal{R} и принимающие комплексные значения.

Интересующее нас пространство D состоит из бесконечно дифференцируемых финитных функций (определение финитных функций см. в п.55.2). Все финитные функции при естественным образом определенных операциях их сложения и умножения на число образуют линейное пространство, а бесконечно дифференцируемые финитные функции — его подпространство. Введем в этом подпространстве понятие сходимости последовательностей.

Определение 11. Последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций φ_n , $n = 1, 2, \dots$, называется сходящейся к бесконечно дифференцируемой финитной функции φ , если:

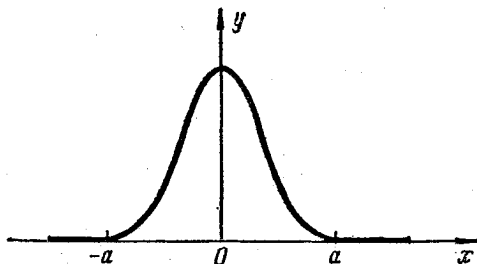


Рис. 232

1) существует отрезок $[a, b]$, вне которого все функции φ_n , $n = 1, 2, \dots$, и φ обращаются в ноль*).

2) на этом отрезке последовательность функций φ_n , $n = 1, 2, \dots$, и последовательности всех их производных $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \dots$, равномерно сходятся соответственно к функции φ и к ее соответствующим производным $\varphi^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$.

Совокупность бесконечно дифференцируемых финитных функций с введенной операцией предельного перехода является линейным пространством со сходимостью. Это непосредственно следует из свойств пределов функций и свойств равномерно сходящихся последовательностей.

Определение 12. Пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций с введенной сходимостью называется основным пространством D .

Очевидно, что если $\varphi \in D$, то и любая производная функции φ принадлежит пространству D .

Заметим еще, что если $\{\varphi_n\}$ сходится к φ в D , то и последовательность $\{\varphi_n^{(k)}\}$ производных любого порядка $k = 1, 2, \dots$ сходится к $\varphi^{(k)}$ в D . Это непосредственно следует из определения сходимости в пространстве D .

Тривиальным примером функции пространства D является функция, равная нулю на всей оси, менее тривиальным — функция (рис. 232).

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & \text{если } |x| < a, \\ 0, & \text{если } |x| \geq a. \end{cases} \quad (59.13)$$

*1) Отрезок $[a, b]$ содержит носители всех функций φ , φ_n , $n = 1, 2, \dots$.

У п р а ж н е н и я. 2. Доказать, что функция (59.13) бесконечно дифференцируема на всей числовой оси (ср. с (37.25)).

3. Доказать, что для того, чтобы для функции $\varphi \in D$ существовала функция $\psi \in D$ такая, что $\varphi = \psi'$ необходимо и достаточно, чтобы $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 0$.

Определение 13. Всякий линейный непрерывный функционал f , определенный на D , называется обобщенной функцией.

Определение 14. Функция f , определенная на всей действительной оси, называется локально интегрируемой, если она абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке.

Если f — локально интегрируемая функция, а $\varphi \in D$, то произведение $f\varphi$ абсолютно интегрируемо на всей оси. Действительно, пусть $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$ (определение носителя $\text{supp } \varphi$ функции φ см. в п. 55.2); функция φ , очевидно, ограничена: $|\varphi(x)| \leq C$, $-\infty < x < +\infty$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(x)| dx = \int_a^b |f(x)\varphi(x)| dx \leq C \int_a^b |f(x)| dx.$$

Определим для локально интегрируемой функции f функционал (f, φ) на D равенством

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx. \quad (59.14)$$

Этот функционал линеен и непрерывен. Линейность его очевидна; докажем его непрерывность. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ в D . Тогда существует такой отрезок $[a, b]$, что для всех $n = 1, 2, \dots$, имеют место включения $\text{supp } \varphi_n \subset [a, b]$ и $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$; поэтому

$$\begin{aligned} |(f, \varphi) - (f, \varphi_n)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |\varphi(x) - \varphi_n(x)| dx = \\ &= \int_a^b |f(x)| |\varphi(x) - \varphi_n(x)| dx \leq \sup_{[a, b]} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \int_a^b |f(x)| dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, всякой локально интегрируемой функции $f(x)$ соответствует обобщенная функция (f, φ) *); в этом смысле всякую локально интегрируемую функцию можно рассматривать как обобщенную функцию.

Постоянная, т. е. такая обобщенная функция f , что $(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx$, c — постоянная, $\varphi \in D$ (в частности, нулевая функция) порождается локально интегрируемой функцией $f(x) = c$, $-\infty < x < +\infty$.

*) В этом случае говорится также, что обобщенная функция (f, φ) порождается функцией f .

Напомним, что под линейным функционалом всегда понимается линейный однородный функционал. Поэтому функционал f , равный одной и той же постоянной c , на всех элементах некоторого линейного пространства X , хотя и является линейной функцией, но не является однородной: если $x \in X$, $y \in X$, λ и μ — числа, то для указанного функционала будем иметь $f(x) = f(y) = c = f(\lambda x + \mu y) = c$. Если бы он был линейным однородным, то должно было бы иметь место $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = (\lambda + \mu)c$. Поскольку при $\lambda + \mu \neq 1$ $f(\lambda x + \mu y) \neq \lambda f(x) + \mu f(y)$, то функционал f не линейно однородный. Следовательно, функционал, равный постоянной, не принадлежит к рассматриваемому нами классу функционалов.

У п р а ж н е н и е 4. Доказать, что две непрерывные на числовой оси функции различны тогда и только тогда, когда различны порожденные ими обобщенные функции.

Иногда обобщенные функции обозначаются символом $f(x)$. Это обозначение чисто символическое; оно отнюдь не обозначает значения обобщенной функции в точке $x \in \mathbf{R}$, а отражает лишь тот факт, что обобщенные функции являются в вышеуказанном смысле обобщением обычных (локально интегрируемых) функций; никакое значение обобщенной функции в точке x здесь не подразумевается.

Для обозначения значения обобщенной функции f в точке $\varphi = \varphi(x)$ пространства D наряду с записью (f, φ) употребляется также запись

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx. \quad (59.15)$$

Таким образом, по определению,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = (f, \varphi).$$

Это равенство является определением символа (59.15), который формально читается как «интеграл от произведения f на φ ». Эта запись отражает собой тот факт, что обобщенные функции являются обобщением функционалов (59.14), где f — локально интегрируемая функция.

У п р а ж н е н и е 5. Доказать, что функционал *в.р.* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$, $\varphi \in D$, является обобщенной функцией (она обычно обозначается $\mathcal{F}^0 \frac{1}{x}$).

В качестве другого примера обобщенной функции рассмотрим функционал, обозначаемый $\delta = \delta(x)$ и называемый δ -функцией (см. 59.1).

Определение 15. Функционал, определяемый формулой

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D,$$

называется δ -функцией.

Его линейность и непрерывность легко проверяются. Он не может быть представлен в виде (59.14) ни при какой локально интегрируемой функции f . Действительно, если бы нашлась такая локально интегрируемая функция f , что

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D,$$

то для этой функции f и для функции φ , заданной формулой (59.13), мы имели бы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) = \frac{1}{e}. \quad (59.16)$$

Но в силу абсолютной интегрируемости функции f

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^a |f(x)| dx = 0$$

(почему?).

Далее, замечая, что $e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} < \frac{1}{e}$, $-a \leq x \leq a$, получим

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx \right| = \left| \int_{-a}^a f(x) e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} dx \right| \leq \frac{1}{e} \int_{-a}^a |f(x)| dx,$$

поэтому левая часть равенства (59.16) при $a \rightarrow 0$ стремится к нулю, а правая нет. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. Таким образом, запас обобщенных функций в указанном смысле больше, чем запас обычных.

Определение 16. *Функционал, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi \in D$ число $\varphi(x_0)$, где x_0 фиксировано, называется δ -функцией и обозначается $\delta(x - x_0)$.*

Применяя запись (59.15), можно написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \varphi \in D.$$

Определение 17. *Совокупность обобщенных функций, как и всякая совокупность функционалов, определенных на линейном пространстве со сходимостью (см. п. 59.2), образует линейное пространство со сходимостью, сопряженное к D . Оно называется пространством обобщенных функций и обозначается D' .*

Таким образом, сходимость последовательности обобщенных функций f_n , $n = 1, 2, \dots$, к обобщенной функции f означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$$

для любой функции $\varphi \in D$.

Задача 40. Пусть $f_n \in D'$, $n=1, 2, \dots$, и пусть для любой функции $\varphi \in D$ существует предел числовой последовательности (f_n, φ) . Положим, $F(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi)$. Доказать, что $F(\varphi)$ является обобщенной функцией.

В п. 59.1 мы рассматривали функции $\delta_\varepsilon(x)$, которые очевидно, локально интегрируемы. Мы видели, что они обладают тем свойством, что для любой непрерывной на всей оси функции φ и, следовательно, для любой функции $\varphi \in D$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\delta_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

С точки зрения обобщенных функций это означает, что в D'

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \delta_\varepsilon = \delta^*.$$

Таким образом, δ -функция в пространстве D' является пределом последовательности обобщенных функций, порожденных локально интегрируемыми функциями.

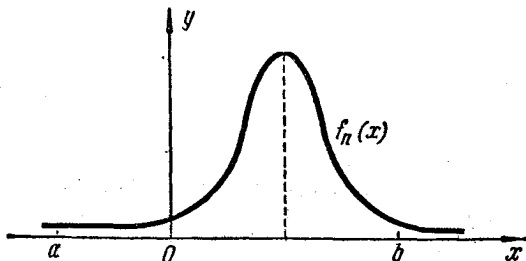


Рис. 233

Упражнение 6. Пусть последовательность абсолютно интегрируемых функций $f_n(x)$, $n=1, 2, \dots$, такова, что

а) каково бы ни было число $M > 0$, при $|a| < M$, $|b| < M$, величины

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right|, \quad n=1, 2, \dots$$

ограничены постоянной, не зависящей от a, b, n (она зависит только от M);

б) при любых фиксированных a и b , отличных от нуля,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } a < b < 0 \text{ и } 0 < a < b, \\ 1 & \text{при } a < 0 < b. \end{cases}$$

Такие последовательности $f_n(x)$ (рис. 233) называются *дельта-образными*.

*¹ Как и для обычных функций, символ $\varepsilon \rightarrow +0$ означает, что указанное предельное соотношение имеет место для любой последовательности $\varepsilon_n > 0$, $n=1, 2, \dots$, стремящейся к нулю,

Доказать, что для любой непрерывной функции φ и любой дельта-образной последовательности $f_n(x)$, $n=1, 2, \dots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0);$$

иначе говоря, $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (\delta, \varphi)$.

7. Пусть $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t}}$. Доказать, что в пространстве D' справедливо равенство $\lim_{t \rightarrow +0} f_t(x) = \delta(x)$.

8. Доказать, что в пространстве D' существует предел $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm iy}$ (он обозначается $\frac{1}{x \pm i0}$) и что справедливы формулы

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}.$$

(Они называются формулами Сохоцкого *).)

Задача 41. Доказать, что всякая сигулярная обобщенная функция является пределом регулярных (в этом смысле пространство обобщенных функций является «пополнением» пространства обычных функций).

Как мы видели, понятие обобщенной функции не сводится к понятию функции точки и поэтому говорить о значении обобщенной функции в данной точке, в частности об обращении ее в ноль в этой точке, вообще говоря, не имеет смысла. Однако можно ввести естественное понятие обращения в ноль обобщенной функции на интервале.

Определение 18. Будем говорить, что обобщенная функция f обращается в ноль на интервале (a, b) , если $(f, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in D$, которые имеют носитель, содержащийся в интервале (a, b) .

Упражнение 9. Доказать, что, для того, чтобы непрерывная функция обращалась в ноль в каждой точке интервала, необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в ноль на этом интервале как обобщенная функция.

Определение 19. Обобщенные функции f и g называются равными на интервале (a, b) , если $f - g = 0$ на (a, b) .

59.4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Определим теперь производную обобщенной функции. Выясним, прежде всего, что представляет собой производная обычной непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции f , рассматриваемая как функционал (f', φ) на D . Это имеет смысл, поскольку производная f' , будучи непрерывной на всей числовой оси является локально интегрируемой функцией.

* Ю. В. Сохоцкий (1842—1929) — русский математик.

Интегрируя по частям, в силу финитности функции $\varphi \in D$, получим

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -(f, \varphi'), \quad (59.17)$$

причем, как известно, $\varphi' \in D$. Таким образом, производная f' является функционалом на D , значения которого выражаются через значения функции f , рассматриваемой как функционал, с помощью формулы (59.17). Это делает естественным следующее определение.

Определение 20. Производной обобщенной функции f называется функционал на D , обозначаемый f' и определяемый равенством

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in D. \quad (59.18)$$

Иначе говоря, значение функционала f' в любой точке φ пространства D равно значению функционала f в точке $\varphi' \in D$, взятому с противоположным знаком.

Таким образом, любая обобщенная функция имеет производную. Отсюда следует, что и любая локально интегрируемая функция имеет в смысле определения 20 производную!

Из формулы (59.17) следует, что производная в обычном смысле непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции, рассматриваемая как функционал над D , совпадает с ее производной в смысле обобщенных функций.

Операцию вычисления производной обобщенной функции называют по аналогии со случаем обычных функций дифференцированием.

Лемма 4. Функционал f' является линейным непрерывным функционалом и, следовательно, обобщенной функцией.

Доказательство. Проверим линейность:

$$\begin{aligned} (f', \lambda\varphi + \mu\psi) &= -(f, (\lambda\varphi + \mu\psi)') = -(f, \lambda\varphi' + \mu\psi') = \\ &= -\lambda(f, \varphi') - \mu(f, \psi') = \lambda(f', \varphi) + \mu(f', \psi), \quad \varphi \in D, \psi \in D. \end{aligned}$$

Для того чтобы проверить непрерывность функционала f' вспомним, что если $\varphi \in D$, $\varphi_k \in D$, $k=1, 2, \dots$, и $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi$ в D , то в силу определения сходимости в пространстве D и $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k' = \varphi'$ в D ; поэтому если $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в D , то $\lim_{k \rightarrow \infty} (f', \varphi_k) = - \lim_{k \rightarrow \infty} (f, \varphi_k') = - (f, \varphi') = (f', \varphi)$.

Таким образом, если $f \in D'$, то f' всегда существует и $f' \in D'$. \square

Производные высших порядков обобщенной функции определяются последовательно, как и для обычных функций:

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad \dots,$$

вообще

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})' \quad k = 1, 2, \dots, f^{(0)} = f.$$

По индукции легко проверить, что

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}), \quad \varphi \in D, \quad k = 0, 1, \dots$$

Согласно этому определению, обобщенные функции имеют производные любых порядков, или, как иногда говорят, бесконечно дифференцируемы.

Примеры. 1. Пусть

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Функция $\theta(x)$ называется *функцией Хевисайда* (см. (59.10)) или единичной функцией. Она локально интегрируема и потому может рассматриваться как обобщенная функция. Найдем ее производную. Согласно определению (59.18),

$$\begin{aligned} (\theta', \varphi) &= -(\theta, \varphi') = - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \\ &= \varphi(0) = (\delta, \varphi), \quad \varphi \in D, \end{aligned}$$

т. е. $\theta' = \delta$ (сравните с п. 59.1).

2. В качестве другого примера вычислим производные δ -функции

$$(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

У п р а ж н е н и я 10. Пусть f и g — обобщенные функции, λ и μ — числа. Доказать, что

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

11. Доказать, что $\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right) \theta(x) e^{-\lambda x} = \delta(x)$.

12. Доказать, что $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) \frac{\theta(x) \sin \omega x}{\omega} = \delta(x)$.

13. Если $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{при } |x| < \frac{\varepsilon}{2}; \\ 0 & \text{при } |x| \geq \frac{\varepsilon}{2}; \end{cases}$ то в пространстве обобщенных

функций

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x) \quad \text{и} \quad \delta'_\varepsilon(x) = \frac{\delta\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \delta\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}.$$

14. Пусть $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{при } x < x_0, \\ f_2(x) & \text{при } x > x_0, \end{cases}$ где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывно дифференцируемы и существуют пределы $f'(x_0 \pm 0)$. Найти производную $f'(x)$ в пространстве D' .

15. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на всей числовой оси. Найти производную $(\theta f)'$ в пространстве D' .

16. Доказать, что в пространстве D' справедлива формула $\mathcal{F} \frac{1}{x} = (\ln |x|)'$ (см. упражнение 5).

17. Доказать, что в пространстве D' справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Указание: воспользоваться формулой (см. пример 3 в п. 55.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Лемма 5. Пусть $f_n \in D'$, $f \in D'$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f; \quad (59.19)$$

тогда и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f', \quad (59.20)$$

т. е. для любой сходящейся в D' последовательности обобщенных функций производная предельной функции равна пределу последовательности производных.

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in D$

$$(f', \varphi) - (f'_n, \varphi) = -[(f, \varphi') - (f_n, \varphi')] \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad \text{ибо } \varphi' \in D. \quad \square$$

Можно рассматривать и ряды обобщенных функций

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (59.21)$$

где $u_n \in D'$, $n = 1, 2, \dots$. Сумма

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

называется *частичной суммой n -го порядка* ($n = 1, 2, \dots$) ряда (59.21). Ряд (59.21) называется *сходящимся*, если в D' существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Обобщенная функция s называется *суммой ряда* (59.21); при этом пишется

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Лемма 6. *Сходящийся ряд обобщенных функций можно почленно дифференцировать любое число раз:*

$$s^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}, \quad k=1, 2, \dots$$

Это следует из леммы 5.

59.5. ПРОСТРАНСТВО ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ S И ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ S'

Обозначим через S множество всех бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси комплекснозначных функций, которые вместе со всеми своими производными стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{x}$. Иначе говоря, множество S состоит из тех и только тех бесконечно дифференцируемых функций φ , для которых при любых целых неотрицательных n и m выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \varphi^{(m)}(x) = 0. \quad (59.22)$$

Условие принадлежности функции φ к множеству S можно сформулировать и несколько иначе: бесконечно дифференцируемая функция φ принадлежит S тогда и только тогда, когда для любых целых неотрицательных n и m имеем

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |x^n \varphi^{(m)}(x)| = c_{n,m} < \infty. \quad (59.23)$$

Действительно, если это так, то, заменяя в (59.23) n на $n+1$, получим $|x^{n+1} \varphi^{(m)}(x)| \leq c_{n+1,m}$, поэтому

$$|x^n \varphi^{(m)}(x)| \leq \frac{c_{n+1,m}}{|x|},$$

откуда и следует (59.22). Обратное, из (59.22) и из ограниченности $x^n \varphi^{(m)}(x)$ на любом отрезке следует (59.23).

Очевидно, что множество S является линейным пространством. При этом, если $\varphi \in S$, то и любая производная функции φ принадлежит пространству S .

Определение 21. *Последовательность функций $\varphi_k(x) \in S$, $k=1, 2, \dots$, называется сходящейся в S к функции $\varphi(x) \in S$, если для всех целых неотрицательных n и m каждая последовательность $x^n \varphi_k^{(m)}(x)$, $k=1, 2, \dots$, равномерно на всей оси сходится к функции $x^n \varphi^{(m)}(x)$.*

Очевидно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi$ в S тогда и только тогда, когда при любых целых неотрицательных n и m

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < x < +\infty} |x^n [\varphi_k^{(m)}(x) - \varphi^{(m)}(x)]| = 0. \quad (59.24)$$

Отметим, что если $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в S , то для производных любого порядка $\varphi_k^{(m)} \rightarrow \varphi^{(m)}$ в S , $m=1, 2, \dots$. Линейное пространство S с введенной операцией предельного перехода является линейным пространством со сходимостью.

Очевидно, что $D \subset S$, в частности, последовательность функций $\varphi_k \in D$, $k=1, 2, \dots$, сходящаяся в D к функции φ , сходится к функции φ и в S . Вместе с тем $D \neq S$, ибо $e^{-x^2} \in S$, но $e^{-x^2} \notin D$.

Задача 42. Доказать, что пространство D плотно в S , т. е. что любая функция $\varphi \in S$ является пределом в S некоторой последовательности функций $\varphi_k \in D$, $k=1, 2, \dots$.

Определение 22. *Линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве S , называется обобщенной функцией медленного роста. Множество всех таких функционалов называется пространством обобщенных функций медленного роста и обозначается S' .*

Каждый функционал $f \in S'$, рассматриваемый только на множестве D , является обобщенной функцией, следовательно, элемент множества S' можно интерпретировать как продолжение некоторого линейного непрерывного функционала с множества D на S (см. п. 59.2). Например, функционал δ , определенный нами в п. 59.3 на пространстве D формулой $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in D$, может быть продолжен с помощью той же формулы на пространство S .

Можно показать, что не всякая обобщенная функция из D' продолжаема на S , в этом смысле можно сказать, что S' составляет строгую часть D' .

Упражнение 18. Доказать, что обобщенная функция, порожденная локально интегрируемой функцией e^x , не продолжаема в элемент пространства S' .

Всякая локально интегрируемая функция $f(x)$, для которой в некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$|f(x)| \leq A|x|^k \quad (59.25)$$

(A и k — неотрицательные постоянные)*), в частности любой многочлен, порождает функционал пространства D , продолжаемый в линейный непрерывный функционал на S . Он определяется формулой

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in S. \quad (59.26)$$

*) Такие функции называются функциями медленного роста, откуда и термин «обобщенные функции медленного роста».

Действительно, из условий (59.22) и (59.25) следует, что $f(x) \times \varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{x}$, и, следовательно, интеграл (59.26) существует.

Заметим еще, что всякая абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция $f(x)$ также порождает по формуле (59.26) линейный непрерывный функционал над S . Действительно, поскольку всякая функция $\varphi \in S$ ограничена, то в этом случае существование интеграла (59.26) следует из неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) \varphi(x)| dx \leq \sup_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

Упражнения. 19. Доказать, что функционал (59.26) линеен и непрерывен на пространстве S (как в случае, когда функция f медленного роста на бесконечности, так и в случае, когда она абсолютно интегрируема на всей числовой оси).

20. Доказать, что обобщенная функция $\frac{1}{x+i0} \in D'$ (см. упражнение 8) продолжаема в элемент пространства S' .

Множество S' образует линейное пространство со сходимостью, сопряженное с S (см. п. 59.2).

Поскольку для любой функции $\varphi \in S$ будем иметь $\varphi' \in S$, то для обобщенных функций пространства S' , как и для обобщенных функций из D' , можно определить производную f' по формуле

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in S.$$

Таким образом, для любой обобщенной функции $f \in S'$ производная f' всегда существует и $f' \in S'$. При этом на элементе $\varphi \in D$ производные обобщенной функции f , рассматриваемые соответственно как производные в пространствах D' и S' , совпадают. Как и в случае пространства D' , в пространстве S' производная от предела всегда существует и равна пределу производных.

59.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ S

Каждая функция $\varphi \in S$ абсолютно интегрируема. Более того, если $\varphi \in S$, то при любом $k=1, 2, \dots$ функция $x^k \varphi(x)$ также абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Действительно, поскольку для функции $\varphi \in S$ выполняется условие (59.23), то

$$\begin{aligned} |x^k \varphi(x)| &\leq c_{k,0}, \\ x^2 |x^k \varphi(x)| &= |x^{k+2} \varphi(x)| \leq c_{k+2,0} \end{aligned}$$

и потому

$$|x^k \varphi(x)| \leq \frac{c_{k,0} + c_{k+2,0}}{1+x^2}. \quad (59.27)$$

Здесь справа стоит абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, следовательно по признаку сравнения для несобственных интегралов функция $x^k \varphi(x)$ также абсолютно интегри-

руема при всех $k=0, 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что для функций $\varphi \in S$ существует классическое преобразование Фурье

$$\hat{\varphi} = F[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx, \quad \varphi \in S, \quad (59.28)$$

а также обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy} dy, \quad \varphi \in S.$$

Классичность преобразования Фурье здесь понимается в том смысле, что написанные интегралы являются обычными абсолютно сходящимися интегралами, а не интегралами в смысле главного значения (см. п. 56.3). При этом на S справедливы формулы обращения для прямого и обратного преобразования Фурье (см. п. 56.5):

$$F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi, \quad F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi, \quad \varphi \in S. \quad (59.29)$$

Отметим, что, например, вторая из этих формул в интегральной форме принимает вид

$$F^{-1}[\hat{\varphi}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(y) e^{ixy} dy = \varphi(x).$$

Теорема 1. Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье отображают взаимно однозначно, линейно и непрерывно пространство S на себя.

Доказательство. Покажем, что если $\varphi \in S$, то и $\hat{\varphi} \in S$.

Прежде всего, из того, что для каждой функции $\varphi \in S$ при любом $k=0, 1, 2, \dots$ функция $x^k \varphi(x)$ является, как показано выше, абсолютно интегрируемой на всей числовой оси, следует согласно теореме 4 из п. 56.10, что преобразование Фурье $\hat{\varphi} = F[\varphi]$ функции φ существует и представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию.

Оценим теперь функцию $|y^n \hat{\varphi}^{(m)}(y)|$, где n и m — целые неотрицательные числа. Применяя формулы для производной преобразования Фурье (см. п. 56.10) и для преобразования Фурье производной (см. п. 56.8), получим:

$$\begin{aligned} |y^n \hat{\varphi}^{(m)}(y)| &= |y^n F^{(m)}[\varphi]| = |y^n F[x^m \varphi]| = \\ &= |F[(x^m \varphi)^{(n)}]| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^m \varphi(x))^{(n)} e^{-ixy} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |(x^m \varphi(x))^{(n)}| dx. \end{aligned}$$

Заметим, что выражение $[x^m \varphi(x)]^{(n)}$ в силу правил дифференцирования представляет собой линейную комбинацию выражений вида $x^p \varphi^{(q)}(x)$, где p и q — неотрицательные целые и, как это было отмечено выше, $\varphi^{(q)} \in S$. Поэтому (см. (59.27)) функции $(1+x^2)x^p \varphi^{(q)}(x)$ ограничены на всей числовой оси, следовательно ограничена и функция $(1+x^2)[x^m \varphi(x)]^{(n)}$, т. е.

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} (1+x^2) |[x^m \varphi(x)]^{(n)}| < +\infty.$$

Разделим и умножим теперь получившееся выше подынтегральное выражение на $1+x^2$, тогда, принимая во внимание, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, получим:

$$\begin{aligned} |y^n \hat{\varphi}^{(m)}(y)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_x (1+x^2) |(x^m \varphi(x))^{(n)}| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1+x^2) |(x^m \varphi(x))^{(n)}|. \end{aligned} \quad (59.30)$$

Поскольку справа стоит конечная величина, то $\hat{\varphi} \in S$.

Итак, преобразование Фурье отображает S в S , при этом это отображение взаимно однозначно (см. лемму 3 п. 56.5).

Аналогично доказывается и то, что обратное отображение Фурье F^{-1} отображает S в S и притом взаимно однозначно. Легко убедиться, что на самом деле эти отображения происходят на пространство S , т. е. являются биекциями. Это сразу следует из формул взаимности (59.29) для прямого и обратного преобразований Фурье*).

Действительно, покажем, что $F(S)$ совпадает со всем пространством S . Пусть $\psi \in S$, положим $\varphi = F^{-1}[\psi]$.

Тогда

$$F[\varphi] = F[F^{-1}[\psi]] = \psi.$$

Подобным же образом доказывается и то, что

$$F^{-1}(S) = S.$$

Линейность преобразования Фурье отмечалась раньше (см. лемму 2 в п. 56.5).

Докажем теперь непрерывность отображения F .

*1) Заметим еще, что из того, что $F(S) = F^{-1}(S) = S$, следует, что в формулах (59.29) все интегралы существуют в обычном смысле, а не только в смысле главного значения (сравните с п. 56.5).

Сначала докажем его непрерывность в нуле. Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = 0$ в S . Тогда из (59.30) следует, что

$$|y^n \hat{\varphi}_k^{(m)}(y)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1+x^2) |(x^m \varphi_k(x))^{(n)}|, \quad k=1, 2, \dots$$

Но из (59.24) (при $\varphi(x)=0$) имеем

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_x (1+x^2) |(x^m \varphi_k(x))^{(n)}| = 0;$$

поэтому

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_y |y^n \hat{\varphi}_k^{(m)}(y)| = 0, \quad \text{т. е. } \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_k = 0 \text{ в } S.$$

Поскольку преобразование Фурье является линейным отображением линейного пространства S в себя, непрерывным в нуле, то оно непрерывно и во всех точках этого пространства (см. лемму 3 в п. 59.2).

Таким образом, преобразование Фурье F непрерывно отображает S на S .

Совершенно аналогично доказывается непрерывность обратного преобразования Фурье F^{-1} . \square

59.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Предварительно докажем одно интегральное равенство. Пусть функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой оси и пусть $\varphi \in S$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx. \quad (59.31)$$

Это следует из теоремы 7 п. 54.3. Действительно, повторный интеграл, стоящий слева, существует, ибо существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy \right| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy.$$

Если $[a, b]$ — произвольный отрезок, то функция f в силу ее непрерывности ограничена на $[a, b]$: $|f(y)| \leq M$; поэтому

$$|f(y) \varphi(x) e^{-ixy}| \leq M |\varphi(x)|, \quad a \leq y \leq b.$$

Отсюда в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)| dx$ следует равномерная сходимость интеграла $f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx$ на отрезке $[a, b]$.

Далее, $|\varphi(x)| \leq c_{0,0}$, $-\infty < x < +\infty$ (см. 59.23); поэтому $|\varphi(x)f(y)e^{-ixy}| \leq c_{0,0}|f(y)|$, и так как интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy$ сходится, то интеграл

$$\varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-ixy} dy$$

равномерно сходится на всей оси.

Наконец, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)f(y)e^{-ixy}| dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy$$

конечен, поэтому в рассматриваемом случае выполнены все условия теоремы 7 п. 54.3 и, следовательно, можно переставить порядок интегрирования. Равенство (59.31) доказано.

Если функция $F[f]$ порождает некоторый функционал на S (например, удовлетворяет условию (59.25) или абсолютно интегрируема на всей числовой оси), то, умножив равенство (59.31) на $1/\sqrt{2\pi}$, получим

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \varphi \in S. \quad (59.32)$$

Эту формулу и примем за определение преобразования Фурье, обобщенных функций из пространства S' .

Определение 23. Преобразованием Фурье обобщенной функции $f \in S'$ называется функционал $F[f]$, определяемый формулой (59.32).

Итак, для любой обобщенной функции f из S' определено ее преобразование Фурье $F[f]$: значение функционала $F[f]$ в любой точке φ пространства S равно значению функционала f в точке $F[\varphi] \in S$.

В качестве примера найдем преобразование Фурье единицы, рассматриваемой как обобщенная функция. Очевидно $1 \in S'$. Имеем:

$$\begin{aligned} (\hat{1}, \varphi) &= (1, \hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-ixy} dx = \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{iy(t-x)} dx \Big|_{t=0} = \\ &= \sqrt{2\pi} \varphi(t) \Big|_{t=0} = \sqrt{2\pi} (\delta, \varphi) \end{aligned}$$

(мы воспользовались здесь леммой 1 п. 56.5. Таким образом, $\hat{1} = \sqrt{2\pi} \delta$).

Отметим, что преобразование Фурье $F[\varphi]$ функции $\varphi \in D$, вообще говоря, не принадлежит пространству D , поскольку $F[\varphi]$

не всегда является финитной функцией. Поэтому формула (59.32) имеет смысл не для всех $f \in D'$. Из-за этого обстоятельства при рассмотрении преобразования Фурье обобщенных функций нам и пришлось сузить класс обобщенных функций, введенных раньше, ограничившись только обобщенными функциями медленного роста.

Преобразование Фурье $F[f]$ обобщенной функции f будем обозначать также символом \hat{f} или символом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx.$$

Таким образом, равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx = F[f] \quad (59.33)$$

в случае, когда f — обобщенная функция, является определением символа, стоящего в левой части этого равенства.

Определив преобразование Фурье для всех обобщенных функций из S' , мы, в частности, определили и преобразование Фурье для обычных функций f , удовлетворяющих условию (59.25), т. е. функций существенно более широкого класса, чем это было сделано раньше (см. п. 56.5 и 58.7*). Это является одним из весьма существенных обстоятельств, оправдывающих целесообразность введения понятия обобщенных функций.

Покажем, что преобразование Фурье обобщенных функций обладает рядом свойств, аналогичных свойствам классического преобразования Фурье, т. е. преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Лемма 7. Преобразование Фурье $F[f]$ обобщенной функции $f \in S'$, также является обобщенной функцией класса S' , т. е. $F[f]$ — линейный и непрерывный функционал над пространством S .

Доказательство. Проверим линейность преобразования Фурье, т. е. покажем, что, какова бы ни была обобщенная функция $f \in S'$, для любых функций $\varphi \in S$, $\psi \in S$ и любых чисел λ и μ справедливо равенство

$$(F[f], \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(F[f], \varphi) + \mu(F[f], \psi).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (F[f], \lambda\varphi + \mu\psi) &= (f, F[\lambda\varphi + \mu\psi]) = \\ &= (f, \lambda F[\varphi] + \mu F[\psi]) = \lambda(f, F[\varphi]) + \mu(f, F[\psi]) = \\ &= \lambda(F[f], \varphi) + \mu(F[f], \psi). \end{aligned}$$

Проверим непрерывность преобразования Фурье. Пусть $f \in S'$, $\varphi \in S$, $\varphi_n \in S$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ и, следовательно

(см. теорему 1 п. 59.6),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F[\varphi_n] = F[\varphi].$$

Тогда в силу непрерывности функционала f на S получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F[f], \varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f, F[\varphi_n]) = (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi).$$

Итак, мы показали, что если $f \in S'$, то и $F[f] \in S'$. \square

Естественно определяется и обратное преобразование Фурье $F^{-1}[f]$ элемента $f \in S'$ как функционал пространства S' , задаваемый формулой

$$(F^{-1}[f], \varphi) = (f, F^{-1}[\varphi]), \varphi \in S.$$

Если f — абсолютно интегрируемая непрерывная функция, это равенство выполняется для нее в обычном смысле. Это проверяется так же, как и в случае формулы (59.31). По определению, полагается также (ср. (59.33))

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx = F^{-1}[f]. \quad (59.34)$$

Как и в случае прямого преобразования Фурье F , показывается, что если $f \in S'$, то и $F^{-1}[f] \in S'$.

Теорема 2. Преобразование Фурье F и обратное преобразование Фурье F^{-1} отображают линейно, взаимно однозначно и непрерывно пространство S' на себя; при этом для любого элемента $f \in S'$ справедливы равенства

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f. \quad (59.35)$$

Доказательство. Докажем сначала формулы (59.35). Для любого элемента $\varphi \in S$ имеем

$$(F^{-1}[F[\varphi]], \varphi) = (F[\varphi], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) = (f, \varphi).$$

Аналогично,

$$(F[F^{-1}[f]], \varphi) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (f, \varphi).$$

Покажем теперь, что преобразование Фурье F отображает пространство S' на все пространство S' : $F(S') = S'$. Пусть $g \in S'$, тогда если $f = F^{-1}[g]$, то $F[f] = F[F^{-1}[g]] = g$, т. е. в любой элемент из S' при преобразовании Фурье F отображается некоторый элемент из S' .

Покажем, что F взаимно однозначно. Если $f_1 \in S'$, $f_2 \in S'$ и $F[f_1] = F[f_2]$, то и $F^{-1}[F[f_1]] = F^{-1}[F[f_2]]$, откуда в силу (59.35) имеем $f_1 = f_2$.

Покажем, что отображение F линейно, т. е. для любых обобщенных функций $f \in S'$, $g \in S'$ и любых чисел λ и μ справед-

ливо равенство

$$F[\lambda f + \mu g] = \lambda F[f] + \mu F[g].$$

Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, проверим его для любого, но фиксированного элемента $\varphi \in S$:

$$\begin{aligned} (F[\lambda f + \mu g], \varphi) &= (\lambda f + \mu g, F[\varphi]) = \lambda (f, F[\varphi]) + \mu (g, F[\varphi]) = \\ &= \lambda (F[f], \varphi) + \mu (F[g], \varphi) = (\lambda F[f] + \mu F[g], \varphi). \end{aligned}$$

Наконец, докажем, что F является непрерывным отображением. Действительно, пусть $f \in S'$, $f_n \in S'$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim f_n = f$ и, следовательно, для любого $\varphi \in S$ справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F[f_n], \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, F[\varphi]) = (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi).$$

Аналогично доказывается, что и F^{-1} непрерывно взаимно однозначно отображает S' на S' . \square

Примеры. Найдем $F[\delta] = \hat{\delta}$. Имеем

$$\begin{aligned} (\hat{\delta}, \varphi) &= (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx \Big|_{y=0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi \right), \quad \varphi \in S, \end{aligned}$$

поэтому $F[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и, следовательно, $F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi} \delta$ (заметим, что обратное классическое преобразование Фурье $F^{-1}[1]$, так же как и прямое $F[1]$, не существуют). С помощью интегралов (59.33) и (59.34) эти формулы можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ixy} dx = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} dx = \delta(y).$$

Подобным же образом находится и обратное преобразование Фурье δ -функции:

$$F^{-1}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = F[\delta],$$

отсюда

$$F[1] = F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi} \delta.$$

Используя способ записи, основанный на равенствах (59.33) и (59.34), эти формулы можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} dx = \delta(y), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{ixy} dx = 1.$$

Вычислим, далее, преобразование Фурье производной обобщенной функции и производную от преобразования Фурье. Предварительно нам придется ввести понятие произведения обобщенной функции $f \in S'$ на обычную бесконечно дифференцируемую функцию $\psi(x)$, обладающую тем свойством, что для любой ее производной $\psi^{(n)}(x)$ существуют постоянные $\beta_n > 0$ и $\alpha_n > 0$, $n = 0, 1, \dots$, такие, что для всех x справедливо неравенство

$$|\psi^{(n)}(x)| \leq \beta_n (1 + |x|)^{\alpha_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (59.36)$$

Заметим, что все многочлены удовлетворяют этому условию.

Если функция ψ — типа (59.36) и $\varphi \in S$, то $\psi\varphi \in S$. Если функция f локально суммируема и удовлетворяет условию (59.25), а функция ψ — условию (59.36), то ψf также удовлетворяет условию (59.25) и

$$(f, \psi\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi(x) \varphi(x) dx = (\psi f, \varphi).$$

Пусть ψ удовлетворяет условию (59.36), а $f \in S'$. Определим теперь функционал на S , равный произведению ψf , формулой

$$(\psi f, \varphi) = (f, \psi\varphi), \quad \varphi \in S.$$

Легко проверить, что $\psi f \in S'$ **, т. е. что ψf является линейным непрерывным функционалом, определенным на пространстве S .

Упражнение 21. Пусть функция $\psi = \psi(x)$ удовлетворяет условию (59.36), а обобщенная функция $f \in S'$. Доказать, что $\psi f \in S'$.

Докажем в заключение формулы]

$$F[f^{(n)}] = (ix)^n F[f], \quad (59.37)$$

$$i^n F^{(n)}[f] = F[x^n f], \quad f \in S'. \quad (59.38)$$

Имеем (см. п. 56.8):

$$\begin{aligned} (F[f^{(n)}], \varphi) &= (f^{(n)}, F[\varphi]) = (-1)^n (f, F^{(n)}[\varphi]) = \\ &= (-1)^n \left(f, \frac{1}{i^n} F[x^n \varphi] \right) = i^n (F[f], x^n \varphi) = ((ix)^n F[f], \varphi), \quad \varphi \in S. \end{aligned}$$

Формула (59.37) доказана.

Докажем (59.38) (см. п. 56.10):

$$\begin{aligned} (F^{(n)}[f], \varphi) &= (-1)^n (F[f], \varphi^{(n)}) = (-1)^n (f, F[\varphi^{(n)}]) = \\ &= (-1)^n (f, (ix)^n F[\varphi]) = \frac{1}{i^n} (x^n f, F[\varphi]) = \left(\frac{1}{i^n} F[x^n f], \varphi \right). \quad \square \end{aligned}$$

* В силу этого условия (при $n=0$) можно рассматривать $\psi(x)$ как обобщенную функцию пространства S' (см. (59.25)).

** Затруднения при определении произведения обобщенных функций связаны с тем, что произведение линейных функционалов в обычном смысле как произведение функций (т. е. как произведение значений сомножителей в каждой точке) не является линейным функционалом.

Пример. Найдем преобразование Фурье функции $f(x) = x$:

$$F[x] = F[x \cdot 1] = iF'[1] = i\sqrt{2\pi}\delta'.$$

Упражнение 22. Найти преобразование Фурье многочлена.

При вычислении преобразования Фурье обобщенных функций иногда удобно выбрать последовательность обычных функций стремящихся в пространстве S' к заданной (обобщенной) функции, найти преобразование Фурье членов этой последовательности, а затем вычислить искомое преобразование Фурье заданной функции с помощью предельного перехода, используя непрерывность преобразования Фурье. Так, например, для того чтобы вычислить преобразование Фурье $F[\theta]$ функции Хевисайда $\theta(x)$, найдем сначала преобразование Фурье функции $\theta(x)e^{-tx}$ ($t > 0$).

$$\begin{aligned} F[\theta(x)e^{-tx}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x(t+iy)} dx = -\frac{e^{-x(t+iy)}}{\sqrt{2\pi}(t+iy)} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t+iy)} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}(y-it)}. \end{aligned} \quad (59.39)$$

Покажем теперь, что в S'

$$\lim_{t \rightarrow +0} \theta(x)e^{-tx} = \theta(x) \quad (59.40)$$

Действительно, для каждой функции $\varphi \in S$ и любого числа A имеем:

$$\begin{aligned} |(\theta(x), \varphi(x)) - (\theta(x)e^{-tx}, \varphi(x))| &= \left| \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx}) \varphi(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^A (1 - e^{-tx}) \varphi(x) dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} (1 - e^{-tx}) \varphi(x) dx \right|. \end{aligned} \quad (59.41)$$

Зафиксируем функцию $\varphi \in S$ и какое-либо число $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной интегрируемости функции φ существует число $A > 0$, такое, что

$$\int_A^{+\infty} |\varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2};$$

тогда

$$\left| \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx}) \varphi(x) dx \right| \leq \int_A^{+\infty} |\varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (59.42)$$

Выберем теперь $t_0 > 0$ так, чтобы при $0 < t < t_0$ было справедливо неравенство

$$(1 - e^{-tA}) \int_0^A |\varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно,

$$\left| \int_0^A (1 - e^{-tx}) \varphi(x) dx \right| < (1 - e^{-tA}) \int_0^A |\varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (59.43)$$

Тогда при $0 < t < t_0$ из (59.41), (59.42) и (59.43) получим

$$|(\theta(x), \varphi(x)) - (\theta(x) e^{-tx}, \varphi(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Формула (59.40) доказана.

В силу непрерывности преобразования Фурье

$$\lim_{t \rightarrow +0} F[\theta(x) e^{-tx}] = F[\theta(x)]; \quad (59.44)$$

отсюда и из (59.39) имеем

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{i}{y - it},$$

причем из (59.44) следует, что предел, стоящий в правой части, существует (в пространстве S'), он обычно обозначается $\frac{i}{y - i0}$ (см. упражнение 8).

Таким образом,

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{y - i0}.$$

Упражнение 23. Найти преобразование Фурье функций $x^k \theta(x)$, $k = 1, 2, \dots$.