ДОБАВЛЕНИЕ

§ 60. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

60.1. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛОВ

Для вычисления значений функций очень удобно пользоваться формулой или рядом Тейлора. Поясним это на примерах.

1. Вычисление значения синуса.

Формула Тейлора для функции $\sin x$ имеет вид

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_n(x),$$

где

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{(2n+1)} \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

(мы взяли остаточный член в форме Лагранжа). Поэтому

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{60.1}$$

Пусть требуется найти $\sin 20°$ с точностью до 10^{-3}. В радианной мере $20°$ соответствует $\frac{\pi}{9}$, поэтому выберем номер n так, чтобы

$$\left| r_n\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| < \frac{1}{10^3}; \tag{60.2}$$

тогда значение многочлена Тейлора порядка n в точке $x = \frac{\pi}{9}$ и даст нам искомое приближение $\sin 20°$. В силу неравенства (60.1) для выполнения условия (60.2) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+1} < \frac{1}{10^3}. \tag{60.3}$$

При $n = 1$ это неравенство не выполняется:

$$\frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 > \frac{1}{6} \frac{1}{3^3} = \frac{1}{162} > \frac{1}{10^3},$$

но уже при $n = 2$ оно выполняется:

$$\frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^5 < \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840} < \frac{1}{10^3}.$$

Поэтому $\sin 20°$ с точностью до 10^{-3} находится по формуле

$$\sin 20° \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 {}^{*)}. \tag{60.4}$$

Беря значение π из таблиц с точностью до 10^{-4}, подставляя в формулу (60.4), произведя указанные там действия и округляя результат с точностью до 10^{-3}, получим искомое приближение $\sin 20°$:

$$\sin 20° \approx 0{,}343\ {}^{**)}.$$

При вычислении значений синуса можно воспользоваться не формулой, а рядом Тейлора, который для действительного аргумента является знакочередующимся и потому допускает простую оценку остатка: он не превышает по абсолютной величине абсолютной величины первого члена остатка (см. п. 35 9). Это дает, естественно, тот же результат, что и выше, так как приводит к оценке (60.3), которую мы получили из других соображений.

2. Вычисление значений натуральных логарифмов. Ряд Тейлора для логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1, \tag{60.5}$$

может быть непосредственно использован лишь для вычисления логарифмов чисел, не превышающих двух. Однако из ряда (60.5) можно получить другие разложения, позволяющие вычислить логарифмы любых чисел. Заменяя в (60.5) x на $-x$ и вычитая получившийся ряд из (60.5), получим

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad |x| < 1. \tag{60.6}$$

Когда x изменяется от -1 до 1, то $\frac{1+x}{1-x}$ принимает все положительные значения. Поэтому формула (60.6) может быть использована для вычисления логарифмов любых чисел. Естественно, возникает вопрос о том, сколько надо взять членов в ряде (60.6),

---

*) Знаком $\approx$ обозначается приближенное равенство с указанной степенью точности.

**) Заметим, что в нашем случае легко устанавливается и более сильное неравенство $r_2\left(\frac{\pi}{9}\right) < \frac{1}{3}10^{-3}$, а при указанном выборе числа знаков π ошибка при вычислении правой части формулы (60.4) во всяком случае не будет превышать $\frac{2}{3}\cdot 10^{-3}$, поэтому суммарная ошибка и будет не больше 10^{-3}.

чтобы получить логарифм числа с заданной точностью. Для этого надо оценить остаток ряда (60.6). Имеем

$$|r_n(x)| = 2|x| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} < \frac{2|x|^{2n+1}}{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} =$$

$$= \frac{2|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}, \quad |x| < 1. \tag{60.7}$$

Применим эту оценку для вычисления $\ln 2$ с точностью 10^{-3}. Решая уравнение

$$\frac{1+x}{1-x} = 2,$$

находим $x = \frac{1}{3}$. Полагая в (60.6) $x = \frac{1}{3}$, находим

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, 3^{2n}}. \tag{60.8}$$

Оценка же (60.7) в этом случае дает

$$\left| r_n\left(\frac{1}{3}\right) \right| < \frac{2}{(2n+1)\, 3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4(2n+1)\, 3^{2n-1}}.$$

Отсюда при $n = 3$ имеем

$$r_3\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 3^5} = \frac{1}{28 \cdot 243} < \frac{1}{10^3}.$$

Поэтому для вычисления $\ln 2$ с точностью до 10^{-3} достаточно взять первые три члена ряда (60.8):

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^4}\right) \approx 0{,}693.$$

При более грубых вычислениях значений функции с помощью формулы Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x)$$

часто бывает достаточно ограничиться лишь ее линейной частью, т. е. первыми двумя членами

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

иначе говоря, заменить приращение функции ее дифференциалом

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\,\Delta x,$$

где $\Delta x = x - x_0$.

Формула Тейлора позволяет приближенно вычислять и значения определенных интегралов. Рассмотрим один пример такого рода.

3. Вычисление с точностью до 0,0001 интеграла

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Напишем для подынтегральной функции формулу Тейлора. Для этого воспользуемся известной нам формулой Тейлора для функции $\sin x$ (см. (60.1)), тогда получим

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!}+\frac{r_n(x)}{x};$$

поэтому

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\int_0^1 x^{2k-2}\,dx+\int_0^1 \frac{r_n(x)}{x}\,dx.$$

В силу оценки (60.1)

$$\left|\int_0^1 \frac{r_n(x)}{x}\,dx\right|\leqslant\int_0^1 \frac{|r_n(x)|}{x}\,dx\leqslant\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}\,dx=\frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)}.$$

Поскольку при $n=3$

$$\frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)}=\frac{1}{7!\,7}=\frac{1}{35\,280}<\frac{1}{3}\,10^{-4},$$

то с точностью до 0,0001 имеем

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx\approx\int_0^1 dx-\frac{1}{6}\int_0^1 x^2\,dx+\frac{1}{120}\int_0^1 x^4\,dx=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}\approx 0{,}9961\ ^{*)}.$$

Отметим, что на практике для приближенного вычисления интегралов применять формулу Тейлора обычно оказывается нецелесообразным, поскольку в нее входят производные заданной функции и их вычисление приводит к дополнительному накоплению ошибок. Целесообразнее применять приближенные формулы интегрирования, в которые входят только значения самой функции. Подобные методы приближенного интегрирования будут рассмотрены в п. 60.4.

З а м е ч а н и е. Для проведения фактических вычислений значений функций или интегралов от них с помощью разложений функций в ряды годятся далеко не всякие разложения рассмат-

---

*) При переводе простых дробей в десятичные была сделана ошибка, не превышающая $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$, поэтому суммарная ошибка при выполненном приближенном вычислении рассматриваемого интеграла, действительно не превышает 10^{-4}.

риваемых функций в ряды. Может случиться, что полученный ряд будет сходиться столь «медленно», что практически он либо совсем будет не пригоден для вычислений, либо потребует неоправданно большого их объема (образно говоря, в этом случае ряд «практически расходится», хотя и «теоретически сходится»). В такой ситуации надо попытаться получить какой-то другой ряд, который будет сходиться достаточно быстро («улучшить сходимость ряда», как обычно говорят) и сумма которого позволит найти значения рассматриваемой функции. Именно так и было сделано выше при рассмотрении метода вычисления логарифмов. Было бы, например, нецелесообразно вычислять даже значение $\ln\frac{3}{2}$ с помощью ряда (60.5), хотя ряд и сходится при $x=\frac{1}{2}$, а следует для этого воспользоваться рядом (60.6) при $x=\frac{1}{5}$, так как этот ряд сходится быстрее.

60.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу решения уравнения

$$f(x)=0. \tag{60.9}$$

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разного знака, то метод, которым в п. 6.2 была доказана теорема о существовании в этом случае точки x_0, в которой функция обращается в ноль, дает и приближенный метод вычисления этого значения x_0, т. е. корня уравнения (60.9). Для этого достаточно последовательно делить отрезок $[a, b]$ пополам, выбирая каждый раз тот отрезок, на концах которого функция f принимает значения разного знака (если, конечно, не случится, что в одном из получившихся концов функция f обратится в ноль — в этом случае искомый корень будет уже найден). Если требуется найти корень уравнения (60.9) с точностью до заданного $\varepsilon>0$, то после n шагов таких, что

$$\frac{b-a}{2^n}<\varepsilon,$$

концы получившегося отрезка и будут давать искомое приближение некоторого корня уравнения (60.9) (левый — с недостатком, правый — с избытком). Такой способ приближенного решения уравнения (60.9), носящий название «метода вилки», принципиально очень прост, хотя и достаточно трудоемок. Он большей частью применяется лишь для «грубой прикидки» результата, т. е. для «грубого» определения интервала, на котором лежит искомый корень рассматриваемого уравнения, а затем на этом интервале для отыскания «более точного» значения корня используются другие, быстрее сходящиеся методы; обычно применяется нижеописанный метод касательных («метод Ньютона»). Как правило, по такой схеме действуют при проведении вычислений на быстродействующих вычислительных машинах. Конечно, такой путь целесообразен и при проведении вычислений «вручную», в частности при помощи логарифмической линейки или миникомпьютера.

Мы рассмотрим методы решения уравнения, носящие названия **метода хорд** и **метода касательных**. Последний из них хорошо обобщается и на случай систем уравнений.

В дальнейшем будем всегда предполагать, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке первую и вторую производные*[1], причем обе они знакопостоянны (в частности, отличны от нуля).

Мы будем предполагать также, что функция f принимает на концах отрезка значения разного знака. В силу законопостоянства первой производной функция f строго монотонна, поэтому при сделанных предположениях уравнение (60.9) имеет в точности один корень на интервале (a, b).

Метод хорд

Этот метод состоит в следующем. График функции f заменяется его хордой, т. е. отрезком, соединяющим концевые точки графика функции f: точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Абсцисса x_1 точки пересечения этой хорды с осью Ox и рассматривается как первое приближение искомого корня (рис. 234). Далее берется тот из отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$, на концах которого функция f принимает значения разного знака (далее будет показано, что при сделанных предположениях $f(x_1) \neq 0$ и, следовательно, такой отрезок всегда существует), и к нему применяется тот же прием; получается второе приближение корня x_2 и т. д. В результате образуется последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, которая, как это будет показано, при сделанных ограничениях на функцию f сходится к корню уравнения (60.9).

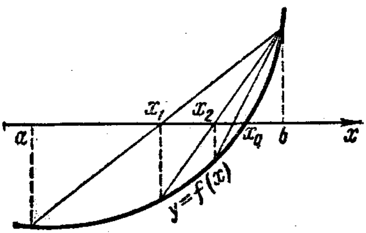

Рис. 234

Легко получить рекуррентные формулы для указанных чисел x_n, $n = 1, 2, \ldots$. Уравнение прямой, проходящей через крайние точки графика функции f, имеет вид

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \tag{60.10}$$

---

*[1] Для метода хорд достаточно требовать существования первой и второй производных лишь на интервале (a, b). Существование производной в концах отрезка $[a, b]$ будет использовано только в методе касательных.

Обозначим его правую часть через $l(x)$, т. е. запишем уравнение (60.10) в виде

$$y = l(x).$$

Найдем абсциссу x_1 точки пересечения прямой (60.10) с осью Ox, т. е. решим уравнение $l(x) = 0$; получим

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{60.11}$$

Легко убедиться, что

$$a < x_1 < b \tag{60.12}$$

(это, например, следует из строгой монотонности и непрерывности функции $l(x)$ и того, что на концах отрезка $[a, b]$ она принимает значения разного знака: $l(a) = f(a)$ и $l(b) = f(b)$).

Аналогично находим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{60.13}$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к корню уравнения (60.9) монотонно. Предположим для определенности, что $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $a < x < b$ (см. рис. 234). В этом случае функция f строго монотонно возрастает и строго выпукла вниз. Следовательно, любая внутренняя точка хорды, соединяющей крайние точки графика функции f, лежит над соответствующей точкой графика функции f, т. е.

$$l(x) > f(x), \quad a < x < b.$$

В частности, если x_0 — корень уравнения (60.9): $f(x_0) = 0$, то отсюда следует, что

$$l(x_0) > 0.$$

Имеем (см. (60.11) и (60.12)):

$$l(x_1) = 0, \quad a < x_1 < b.$$

Таким образом,

$$l(x_1) < l(x_0), \tag{60.14}$$

но линейная функция $l(x)$ строго монотонно возрастает, ибо

$$l(b) = f(b) > f(a) = l(a),$$

поэтому из (60.14) следует

$$x_1 < x_0.$$

Заменяя теперь отрезок $[a, b]$ отрезком $[x_1, b]$ и замечая, что $f(x_1) < 0$, аналогично докажем, что

$$x_1 < x_2 < x_0.$$

Далее по индукции получим

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < x_0.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$, будучи монотонной и ограниченной, сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (60.13), получим $f(c)=0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню уравнения (60.9).

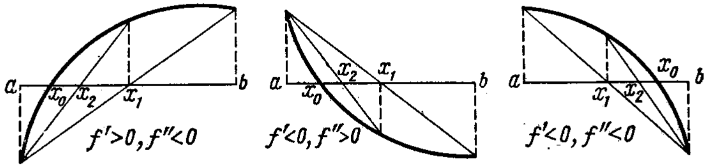

Рис. 235

Если $|f'(x)| \geqslant m > 0$, $a < x < b$, то нетрудно получить оценку скорости сходимости последовательности $\{x_n\}$ через значения самой функции f в точках x_n. Действительно,

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x_0) = f'(\xi_n)(x_n - x_0),$$

$$x_n < \xi_n < x_0, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

отсюда

$$|x_n - x_0| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Остальные случаи, т. е. случаи

$$f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0,$$

$$f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0,$$

$$f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0,$$

рассматриваются аналогично разобранному (рис. 235).

Метод касательных (метод Ньютона)

Будем предполагать, что функция f удовлетворяет тем же условиям, что и при рассмотрении метода хорд. Проведем касательную к графику функции f в одной из его концевых точек, например, в точке $(b, f(b))$. Абсцисса x_1 точки ее пересечения с осью Ox и считается первым приближением корня уравнения (60.9). Далее, если $x_1 \in (a, b)$ (а это всегда имеет место для одной из касательных в концевых точках графика см. ниже), то из двух отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ выбирается тот, на концах которого функция f принимает значения разного знака (далее будет показано, что $f(x_1) \neq 0$). Затем проводится касательная к графику функции f в точке $(x_1, f(x_1))$; точка ее пересечения с осью Ox обозначается x_2 и т. д. (рис. 236).

Легко получаются рекуррентные формулы для указанных чисел x_n, $n=1, 2, \ldots$. Уравнение касательной, проходящей через точку $(b, f(b))$, имеет вид

$$y=f'(b)(x-b)+f(b).$$

Обозначим его правую часть через $L(x)$, т. е. запишем это уравнение в виде

$$y=L(x).$$

Найдем абсциссу x_1 точки пересечения этой касательной с осью Ox, т. е. решим уравнение $L(x)=0$; получим

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

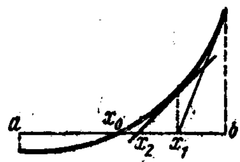

Рис. 236

Точка x_1 может лежать, вообще говоря, вне отрезка $[a, b]$, т. е. вне области определения функции f. Однако если $f(b)$ одного знака с f'', то $x_1 \in (a, b)$. Рассмотрим подробно, как и для метода хорд, случай, когда $f'>0$, $f''>0$ на $[a, b]$. В этом случае функция f строго монотонно возрастает, следовательно, $f(b)>0$; кроме того, функция f выпукла вниз на (a, b), следовательно,

$$L(x)<f(x)$$

(см. п. 14.3).

Если $f(x_0)=0$, $a<x_0<b$, то

$$L(x_0)<0,$$

но $L(b)=f(b)>0$, следовательно,

$$x_0<x_1<b.$$

При этом $f(x_1)>L(x_1)=0$.

Применяя те же рассуждения к отрезку $[a, x_1]$, получим точку x_2, такую, что

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \qquad x_0<x_2<x_1,$$

и, далее,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_0<x_{n+1}<x_n. \tag{60.15}$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ монотонна и ограничена, а потому сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$. Переходя к пределу в (60.15), получим $f(c)=0$, т. е. последовательность (60.15) сходится к корню уравнения (60.9).

Когда $|f'(x)| \geqslant m \geqslant 0$, $a < x < b$, то тем же способом, что и в случае метода хорд, получаем оценку

$$|x_n - c| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Подобным же образом разбираются и оставшиеся случаи различных комбинаций знаков первой и второй производных (рис. 237).

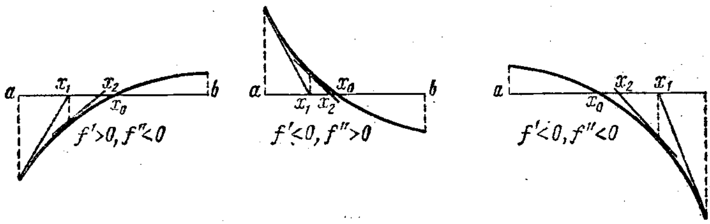

Рис. 237

Дадим еще одну оценку скорости сходимости метода касательных, из которой будет хорошо видно достоинство этого метода. Пусть для функции f на рассматриваемом интервале выполняются неравенства

$$|f'(x)| \geqslant m > 0, \quad |f''(x)| \leqslant M, \qquad a < x < b.$$

Разложим функцию f в окрестности точки x_n по формуле Тейлора, например, с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_n)^2,$$

где $\xi = x_n + \theta(x - x_n)$, $0 < \theta < 1$. Если $f(c) = 0$, то, подставляя $x = c$ в написанную формулу, получим

$$f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(c - x_n)^2 = 0.$$

Отсюда

$$x_n - c = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2,$$

или в силу формулы (60.15)

$$x_{n+1} - c = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2.$$

Следовательно,

$$|x_{n+1} - c| \leqslant \frac{M}{2m}|x_n - c|^2,$$

откуда

$$\frac{M}{2m}|x_{n+1} - c| \leqslant \left(\frac{M}{2m}|x_n - c|\right)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Применяя последовательно это неравенство, будем иметь:

$$\frac{M}{2m}|x_n-c|\leqslant\left(\frac{M}{2m}|x_{n-1}-c|\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant\left[\left(\frac{M}{2m}|x_{n-2}-c|\right)^2\right]^2\leqslant\ldots\leqslant\left(\frac{M}{2m}\ |b-c|\right)^{2^n}.$$

Если выбрать первоначальное приближение b так, чтобы $q\overset{\text{def}}{=}$ $=\frac{M}{2m}|b-c|<1$, то получим

$$|x_n-c|<\frac{2m}{M}q^{2^n},$$

т. е. скорость сходимости приближенных решений x_n к корню $x=c$ значительно превышает скорость убывания геометрической прогрессии со знаменателем по абсолютной величине меньшим единицы.

Пример. Применим метод Ньютона для приближенного вычисления корня k-ой степени из числа $a>0$, k — целое положительное. В этом случае речь идет о приближенном решении уравнения $x^k-a=0$, т. е. формулу (60.15) следует применить к функции $f(x)=x^k-a$.

Имеем $f'(x)=kx^{k-1}$, и потому для последовательных приближенных значений x_n корня $\sqrt[k]{x}$ имеем рекуррентную формулу

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}},$$

или

$$x_{n+1}=\frac{1}{k}\left[(k-1)x_n+\frac{a}{x_n^{k-1}}\right].$$

В случае $k=2$ мы встречались с этой формулой в п. 3.9.

60.3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и пусть фиксированы $n+1$ значений аргумента x_i, $i=1, 2, \ldots, n+1$:

$$a\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}\leqslant b. \tag{60.16}$$

Одна из простейших интерполяционных задач состоит в отыскании многочлена $P(x)$ не выше некоторой данной степени m, который при значениях аргумента $x=x_i$, $i=1, 2, \ldots, n+1$, называемых *узлами интерполяции*, принимает те же значения, что и данная функция, т. е. имеют место равенства

$$f(x_i)=P(x_i),\ i=1, 2, \ldots, n+1. \tag{60.17}$$

Такой многочлен $P(x)$ называется *интерполяционным многочленом*, интерполирующим функцию f в данных узлах интерполяции.

Для того чтобы исследовать вопрос о существовании интерполяционного многочлена $P(x)$, удовлетворяющего условиям (60.17), запишем его с неопределенными коэффициентами a_j, $j=0, 1, \ldots, m$;

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m$$

и подставим его в систему (60.17). Получим систему из $(n+1)$-го линейного уравнения с $m+1$ неизвестными $a_0, a_1, \ldots, a_m$:

$$\begin{gathered} a_0+a_1x_1+\ldots+a_mx_1^m=f(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_{n+1}+\ldots+a_mx_{n+1}^m=f(x_{n+1}). \end{gathered} \tag{60.18}$$

Определитель, составленный из коэффициентов этой системы, стоящих в первых k строчках и первых k столбцах, $k \leqslant \min\{m+1, n+1\}$ (число строчек равно $n+1$, число столбцов $m+1$), является так называемым определителем Вандермонда, известным из курса алгебры:

$$W(x_1, \ldots, x_k)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 \ldots x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 \ldots x_2^{k-1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1 & x_k \ldots x_k^{k-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant k}(x_j-x_i).$$

В данном случае этот определитель не равен нулю, ибо все узлы интерполяции различны. Поэтому ранг матрицы коэффициентов системы (60.18) равен наименьшему из двух чисел $m+1$ и $n+1$. Если $n>m$, то система (60.18), вообще говоря, не имеет решения. Если $n \leqslant m$, то решение системы (60.18) всегда существует, причем в случае $n=m$ решение единственно, а при $n<m$ решений бесконечно много. Таким образом, *какие бы ни задать значения в $(n+1)$-м узлах* (60.16), *всегда существует и притом единственный многочлен степени не выше чем n, принимающий в этих узлах заданные значения.*

Для отыскания интерполяционного многочлена $P(x)$ можно решить систему (60.18). Однако можно найти его и другим, более коротким путем. Рассмотрим многочлен

$$P_i(x)=\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})}, \quad i=1, 2, \ldots, n+1.$$

Очевидно, что $P_i(x)$ — многочлен степени n и что

$$P_i(x_i)=1, \quad P_i(x_j)=0,$$
$$i=1, 2, \ldots, n+1, \; j=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1. \tag{60.19}$$

Поэтому искомый интерполяционный многочлен может быть записан в виде

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)P_i(x). \tag{60.20}$$

Действительно, написанное выражение является многочленом степени не выше n и в силу (60.19) удовлетворяет условиям (60.17).

Интерполяционный многочлен, записанный в виде (60.20), называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

Исследуем теперь разность между функцией и интерполяционным многочленом

$$R(x) = f(x) - P(x),$$

называемую *остаточным членом интерполяции.* Предположим, что функция f $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда этим же свойством обладает и остаток $R(x)$, причем

$$R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{60.21}$$

ибо $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$. Положим

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1}),$$

зафиксируем $x \in [a, b]$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = R(t) - \frac{R(x)}{\omega(x)} \omega(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Функция $\varphi(t)$, очевидно, также $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем из (60.21) и того, что $\omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!$, имеем

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \frac{R(x)}{\omega(x)}. \tag{60.22}$$

Далее, функция $\varphi(t)$ обращается в ноль в $n+2$ точках x, x_1, x_2, ..., x_{n+1}; поэтому в силу теоремы Ролля ее производная обращается в ноль по крайней мере в $n+1$ точке отрезка $[a, b]$, вторая производная — в n точках и т. д. По индукции получим, что $(n+1)$-я производная функции φ обращается по крайней мере один раз в ноль внутри отрезка $[a, b]$. Пусть $\varphi^{(n+1)}(\zeta) = 0$, $a < \zeta < b$, тогда из (60.22) получим

$$R(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\zeta),$$

или, подробнее,

$$R(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad a < \zeta < b.$$

Отсюда следует оценка остаточного члена

$$|R(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})| \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Заметим, что, вообще говоря, даже для аналитических на отрезке $[a, b]$ функций остаточный член интерполяции не стремится к нулю на отрезке $[a, b]$ при $n \to \infty$, т. е. интерполяционные полиномы не сходятся к самой функции. Построение соответствующих примеров достаточно громоздко, поэтому мы не будем на этом останавливаться.

60.4. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим теперь некоторые способы приближенного интегрирования функций. Формулы для приближенных значений интегралов называются *квадратурными формулами.*

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками x_k, $k=1, 2, \ldots, n-1$:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b;\ x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n},\quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Квадратурные формулы, которые мы рассмотрим, будут получаться посредством замены при интегрировании функции f на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ интерполяционным многочленом степени n. Мы изучим случаи $n=0$, 1, 2. Соответствующие приближенные значения интеграла от функции f будем обозначать символом $L_n(f)$, $n=0$, 1, 2. В первом случае (при $n=0$) соответствующая квадратурная формула называется *формулой прямоугольников*, во втором (при $n=1$) — *формулой трапеций*, в третьем (при $n=2$) — *параболической формулой* или, *чаще*, *формулой Симпсона*.

Формула прямоугольников

Для интерполяции функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, многочленом нулевой степени достаточно задать лишь один узел. Возьмем в качестве узла середину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\xi_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}.$$

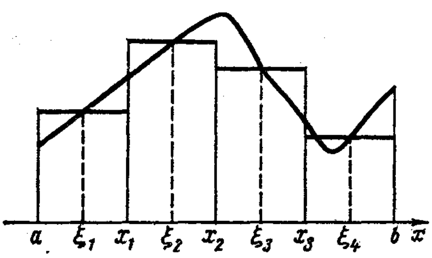

Рис. 238

Интерполяционным многочленом является постоянная

$$P_k(x)=f(\xi_k),$$
$$k=1, 2, \ldots, n.$$

При такой интерполяции мы заменяем данную функцию f «ступенчатой функцией», точнее набором функций, постоянных на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ и равных значению функции f в центре этого отрезка (рис. 238). Вместо интеграла $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ возьмем интеграл $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx$, т. е. заменим площадь криволинейной трапеции площадью соответствующего прямоугольника.

Напишем теперь квадратурную формулу прямоугольников:

$$L_0[f]=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\,dx=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k), \quad (60.23)$$

итак,

$$L_0[f]=\frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{a+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+b}{2}\right)\right].$$

Формула трапеций

На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, возьмем интерполяционный многочлен $P_k(x)$ первой степени, определяемый узлами интерполяции x_{k-1} и x_k. Полагая $y_i=f(x_i)$, $i=0, 1, \ldots, n$, получим (см. (60.20))

$$P_k(x)=\frac{x-x_k}{x_{k-1}-x_k}y_{k-1}+\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}y_k,$$
$$k=1, 2, \ldots, n.$$

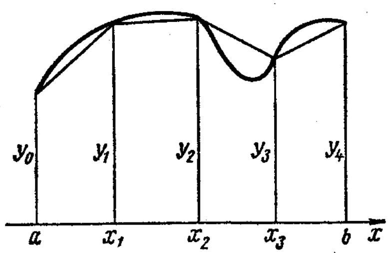

Рис. 239

Таким образом, мы заменяем данную функцию f кусочно-линейной функцией. Вместо интеграла $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ возьмем интеграл $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx$, т. е. заменим площадь криволинейной трапеции соответствующей площадью обыкновенной трапеции (рис. 239). Замечая, что

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\,\frac{b-a}{n}, \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

получим квадратурную формулу трапеций

$$L_1[f]=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{k-1}+y_k}{2}, \quad (60.24)$$

или

$$L_1[f]=\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right].$$

Формула Симпсона

На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, возьмем интерполяционный многочлен $P_k(x)$ второй степени, определяемый узлами интерполяции x_{k-1}, $\xi_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ и x_k. Тогда

$$P_k(x)=\frac{(x-\xi_k)(x-x_k)}{(x_{k-1}-\xi_k)(x_{k-1}-x_k)}f(x_{k-1})+$$
$$+\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(\xi_k-x_{k-1})(\xi_k-x_k)}f(\xi_k)+\frac{(x-x_{k-1})(x-\xi_k)}{(x_k-x_{k-1})(x_k-\xi_k)}f(x_k).$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{(x-\xi_k)(x-x_k)}{(x_{k-1}-\xi_k)(x_{k-1}-x_k)}\,dx=\frac{1}{6}(x_k-x_{k-1})=\frac{1}{6}\frac{b-a}{n},$$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(\xi_k-x_{k-1})(\xi_k-x_k)}\,dx=\frac{2}{3}(x_k-x_{k-1})=\frac{2}{3}\frac{b-a}{n},$$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{(x-x_{k-1})(x-\xi_k)}{(x_k-x_{k-1})(x_k-\xi_k)}\,dx=\frac{1}{6}(x_k-x_{k-1})=\frac{1}{6}\frac{b-a}{n},$$

поэтому

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}P_k(x)\,dx=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6}f(x_{k-1})+\frac{2}{3}f(\xi_k)+\frac{1}{6}f(x_k)\right].$$

Теперь нетрудно написать квадратурную формулу Симпсона:

$$L_2[f]=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}P_k(x)\,dx=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{6}f(x_{k-1})+\frac{2}{3}f(\xi_k)+\frac{1}{6}f(x_k)\right],\tag{60.25}$$

или

$$L_2[f]=\frac{b-a}{6n}\{f(a)+f(b)+2[f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})]+4[f(\xi_1)+\ldots+f(\xi_n)]\}.$$

60.5. ПОГРЕШНОСТЬ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ *)

Мы видели, что всех трех рассмотренных нами случаях квадратурные формулы (см. (60.23), (60.24), (60.25)) имеют вид

$$L(f)=\sum_{k=1}^{n}l_k(f),\tag{60.26}$$

*) В этом пункте мы следуем идеям, развитым в монографии С. М. Никольского «Квадратурные формулы». М., 1974.

где

$$l_k(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{m} p_i f(\xi_{ki}), \tag{60.27}$$

$$x_{k-1}\leqslant\xi_{ki}\leqslant x_k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ m,$$

а p_i — некоторые числа.

В случае формулы прямоугольников мы имели

$$m=0,\ p_0=1,\ \xi_{k0}=\frac{x_{k-1}+x_k}{2};$$

в случае формулы трапеций

$$m=1,\quad p_0=p_1=\frac{1}{2},\quad \xi_{k0}=x_{k-1},\quad \xi_{k1}=x_k;$$

в случае формулы Симпсона

$$m=2,\quad p_0=p_2=\frac{1}{6},\quad p_1=\frac{2}{3},\quad \xi_{k0}=x_{k-1},\quad \xi_{k1}=\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\quad \xi_{k2}=x_k,$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Пусть теперь заданы какие-либо числа p_i, называемые *весами*, и пусть на отрезке $[0, 1]$ задана какая-либо система точек ξ_i, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, называемых *узлами*. Пусть, как и раньше, отрезок $[a, b]$ разделен точками x_k, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, на n равных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и пусть точки ξ_{ki} получаются из узлов ξ_i при линейном отображении отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, при котором точка ноль переходит в точку x_{k-1}, т. е. при отображении $x=(x_k-x_{k-1})t+x_{k-1}$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

Формула (60.26) в этом случае называется квадратурной формулой, соответствующей узлам ξ_i и весам p_i, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m$.

Всякая квадратурная формула (60.26) обладает свойством линейности: для любых двух функций f и g, определенных на отрезке $[a, b]$, и для любых двух чисел λ и μ, очевидно, справедливо равенство

$$L(\lambda f+\mu g)=\lambda L(f)+\mu L(g).$$

Определение. *Формула* $L(f)=\sum_{k=1}^{n} l_k(f)$ *называется точной для многочленов степени r, если для любого многочлена $P(x)$ степени не выше чем r, для любого отрезка $[a, b]$ и для любого числа n (т. е. для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на равные отрезки) справедливо разенство*

$$L(P(x))=\int_a^b P(x)\,dx.$$

Упражнение. Доказать, что, для того чтобы квадратурная формула $L[f]$, соответствующая узлам ξ_i и весам p_i, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, была точной для многочленов степени r, необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена $P(x)$ степени не выше r было справедливо равенство

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m} p_i P(\xi_i).$$

Поскольку интерполяционный многочлен порядка r совпадает для многочлена степени r с самим многочленом, то квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона точны соответственно для многочленов нулевой, первой и второй степени.

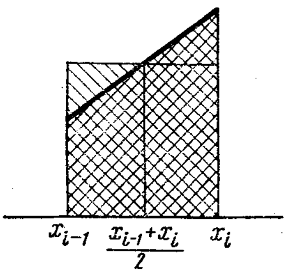

Рис. 240

Однако, более того, квадратурная формула прямоугольников точна для многочленов первой степени, а формула Симпсона — для многочленов третьей степени. Докажем это. Действительно, в случае формулы прямоугольников (см. (60.23) и (60.27))

$$l_k(f) = f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)(x_k - x_{k-1}).$$

Простой подсчет дает, что для любой линейной функции справедливо равенство

$$l_k(Ax+B) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (Ax+B)\,dx. \tag{60.28}$$

Это наглядно видно и на рис. 240. Суммируя равенства (60.28) по k от 1 до n, получим

$$L_0(Ax+B) = \int_a^b (Ax+B)\,dx,$$

что и означает точность квадратурной формулы прямоугольников для многочленов первой степени.

В случае формулы Симпсона (см. (60.25) и (60.27))

$$l_k(f) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6} f(x_{k-1}) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + \frac{1}{6} f(x_k)\right]. \tag{60.29}$$

Достаточно показать, что для любого многочлена третьей степени $P(x)$ в этом случае

$$l_k(P(x)) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{60.30}$$

В самом деле, если эти равенства будут доказаны, то, суммируя их по k от 1 до n, получим

$$L_2(P(x)) = \int_a^b P(x)\,dx,$$

т. е. что формула Симпсона точна для многочленов третьей степени.

Пусть $P(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. Положим $Q(x)=Bx^2+Cx+D$, тогда $P(x)=Ax^3+Q(x)$. Поэтому

$$l_k(P(x))=Al_k(x^3)+l_k(Q(x)),$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)\,dx=A\int_{x_{k-1}}^{x_k} x^3\,dx+\int_{x_{k-1}}^{x_k} Q(x)\,dx,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{60.31}$$

В силу того, что формула Симпсона точна для многочленов второй степени, имеем

$$l_k(Q(x))=\int_{x_{k-1}}^{x_k} Q(x)\,dx,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

С другой стороны, непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} x^3\,dx=\frac{x_k^4-x_{k-1}^4}{4},$$

$$l_k(x^3)=(x_k-x_{k-1})\left[\frac{x_{k-1}^3}{6}+\frac{2}{3}\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)^3+\frac{x_k^3}{6}\right]=\frac{x_k^4-x_{k-1}^4}{4}.$$

Это и доказывает равенство (60.30).

Порядок погрешности квадратурных формул оказывается связан со степенью многочленов, относительно которых точна рассматриваемая квадратурная формула.

Теорема. *Пусть функция f r раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,\ b]$ и пусть число $M>0$ таково, что*

$$|f^{(r)}(x)|\leqslant M,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Если квадратурная формула (60.26) *точна для многочленов степени $r-1$ ($r=1,\ 2,\ \ldots$), то существует постоянная $c_r>0$, не зависящая от функции f, такая, что*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-L(f)\right|\leqslant\frac{c_rM(b-a)^{r+1}}{n^r}. \tag{60.32}$$

Доказательство. Представим функцию f на каждом отрезке $[x_{k-1},\ x_k]$, согласно формуле Тейлора, в виде

$$f(x)=P_k(x)+r_k(x),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где

$$P_k(x)=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{f^{(j)}(x_{k-1})}{j!}(x-x_{k-1})^j$$

— многочлен Тейлора степени $r-1$, и, следовательно, $r_k(x)$ — остаточный член формулы Тейлора, который мы запишем в форме Лагранжа:

$$r_k(x)=\frac{f^{(r)}[x_{k-1}+\theta_k(x-x_{k-1})]}{r!}(x-x_{k-1})^r, \tag{60.33}$$

$$0<\theta_k<1, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx-L(f)=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx-\sum_{k=1}^{n} l_k(f)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx-l_k(P_k(x))\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} r_k(x)\,dx-l_k(r_k(x))\right]. \tag{60.34}$$

В силу того, что данная квадратурная формула точна для многочленов степени $r-1$, справедливо равенство

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)\,dx-l_k(P_k(x))=0, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\,^{*)}.$$

Поэтому из (60.34) следует, что

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-L(f)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|r_k(x)|\,dx+\sum_{k=1}^{n}|l_k(r_k(x))|. \tag{60.35}$$

Далее, из (60.33) имеем

$$|r_k(x)|\leqslant\frac{M}{r!}\left(\frac{b-a}{n}\right)^r, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Применяя это неравенство, получим

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}|r_k(x)|\,dx\leqslant\frac{M(b-a)^r}{r!\,n^r}\int_{x_{k-1}}^{x_k}dx=\frac{M(b-a)^{r+1}}{r!\,n^{r+1}}.$$

Полагая $p=\max\limits_{i=0,\ 1,\ \ldots,\ m}|p_i|$ (см. (60.27)), имеем

$$|l_k(r_k(x))|\leqslant\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{m}|p_i|\,|r_k(\xi_{ki}|\leqslant\frac{(m+1)(b-a)^{r+1}pM}{r!\,n^{r+1}}.$$

*) Действительно, это следует из определения точности квадратурной формулы относительно многочленов данной степени, приведенного на стр. 559, если в этом определении в качестве отрезка $[a,\ b]$ взять отрезок $[x_{k-1},\ x_k]$ и положить $n=1$.

Подставляя эти оценки в (60.35) и введя обозначение

$$c_r = \frac{1+(m+1)\,p}{r!},$$

мы и получим неравенство (60.32). □

Из формулы (60.32) следует, в частности, что при вычислении интегралов с помощью квадратурных формул прямоугольников и трапеций (они, как мы знаем, точны для многочленов первого порядка, и потому для них можно взять $r=2$) ошибка имеет порядок $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, а при вычислении интегралов с помощью формулы Симпсона (она точна уже для многочленов третьего порядка и можно взять $r=4$) ошибка составляет уже всего лишь величину $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Отметим, что при приведенном подсчете постоянных c_r мы не получили для них минимальных значений. Этого можно достичь, усовершенствовав методы их подсчета.

Задача 43. Доказать, что для формулы прямоугольников можно взять $c_2=\frac{1}{24}$, для формулы трапеций $c_2=\frac{1}{12}$, а для формулы Симпсона $c_4=\frac{1}{2880}$.

60.6. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Приближенное вычисление производных производится на основе формул, которыми они определяются. Например, поскольку

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

то так называемое разностное отношение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{60.36}$$

дает приближенное значение производной. При этом эта формула позволяет вычислить производную с любой степенью точности за счет выбора соответствующего h — это следует из определения предела.

Оценим порядок приближения производной, вычисляемой по формуле (60.36), относительно h. Предположим, что функция f имеет в окрестности точки x ограниченную вторую производную. Тогда по формуле Тейлора

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + \frac{h^2}{2} f''(x+\theta h), \quad 0<\theta<1;$$

отсюда

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(x+\theta h), \quad 0<\theta<1,$$

т. е.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+O(h),\quad h\to 0. \ \square$$

Очевидно, что если в точке x существует производная, то

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x).$$

Оказывается, что приближенное вычисление производной в точке по приближенной формуле

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \tag{60.37}$$

обеспечивает более высокий порядок малости погрешности относительно h. Покажем это. Пусть функция f имеет в окрестности точки x третью ограниченную производную. Тогда по формуле Тейлора

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(x+\theta_1 h)h^3,\quad 0<\theta_1<1,$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-\frac{1}{6}f'''(x+\theta_2 h)h^3,\quad 0<\theta_2<1.$$

Вычитая второе равенство из первого и деля на $2h$, получим:

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)+\frac{1}{6}[f'''(x+\theta_1 h)+f'''(x+\theta_2 h)]h^2=$$
$$=f'(x)+O(h^2),\quad h\to 0.$$

Таким образом, разностное отношение (60.37) аппроксимирует производную на порядок лучше чем (60.36).

Для приближенного вычисления второй производной в точке x можно поступить следующим образом: приближенно вычислить первую производную в точках x и $x+h$, например, по формулам (60.36):

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad f'(x+h)\approx\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h};$$

тогда

$$\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\approx\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}.$$

Разностное отношение, стоящее в правой части полученной формулы и принимается за приближенное значение второй производной в точке x.

В случае, когда у функции f в окрестности точки x существует третья ограниченная производная, то раскладывая числитель по формуле Тейлора, получим

$$\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=f''(x)+O(h),\ h\to 0. \tag{60.38}$$

Аналогично случаю первой производной можно показать (в предположении ограниченности четвертой производной в окрестности точки x), что

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)+O(h^2),\quad h\to 0, \tag{60.39}$$

т. е. у приближенной формулы (60.39) для вычисления второй производной погрешность на порядок лучше, чем у формулы (60.38).

Аналогичным образом вычисляются производные более высоких порядков и частные производные функций многих переменных.

§ 61. РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА НА КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Много раз в нашем курсе мы сталкивались с понятием эквивалентности: эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие функции (п. 8.3), эквивалентные отображения отрезка (п. 16.2) и области (п. 50.1), эквивалентные фундаментальные последовательности метрических пространств (п. 57.1), эквивалентные функции при построении пространства $\widetilde{RL}_2$ (п. 57.10) и т. д. Во всех этих случаях отношение эквивалентности обладало следующими тремя свойствами: если элементы рассматриваемого множества обозначить буквами x, y, z, ..., а эквивалентные элементы x и y обозначить символом $x\sim y$, то:

1. Каждый элемент рассматриваемого множества эквивалентен самому себе: $x\sim x$ (рефлексивность).
2. Если $x\sim y$, то $y\sim x$ (симметричность).
3. Если $x\sim y$ и $y\sim z$, то $x\sim z$ (транзитивность).

Всегда предполагалось само собой разумеющимся, что множество тех или иных элементов, в котором введено понятие эквивалентности, обладающее свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности, распадается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов. В действительности так и есть. Сформулируем и докажем это утверждение в общем случае.

Пусть задано множество $A=\{x, y, z, \ldots\}$ и некоторое подмножество множества его упорядоченных пар, обладающее следующими свойствами: если пара (x, y) принадлежит этому подмножеству, то элементы x и y называются эквивалентными и пишется $x\sim y$, при этом выполняются условия рефлексивности, симметричности и транзитивности. В этом случае говорится, что в множестве A задано отношение эквивалентности.

Теорема. *Если в некотором множестве задано отношение эквивалентности, то это множество является суммой своих попарно не пересекающихся подмножеств эквивалентных между собой элементов.*

Доказательство. Пусть $A=\{x, y, z, \ldots\}$ — множество, в котором задано отношение эквивалентности. Для каждого