Аналогично случаю первой производной можно показать (в предположении ограниченности четвертой производной в окрестности точки x), что

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)+O(h^2),\quad h\to 0, \tag{60.39}$$

т. е. у приближенной формулы (60.39) для вычисления второй производной погрешность на порядок лучше, чем у формулы (60.38).

Аналогичным образом вычисляются производные более высоких порядков и частные производные функций многих переменных.

§ 61. РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА НА КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Много раз в нашем курсе мы сталкивались с понятием эквивалентности: эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие функции (п. 8.3), эквивалентные отображения отрезка (п. 16.2) и области (п. 50.1), эквивалентные фундаментальные последовательности метрических пространств (п. 57.1), эквивалентные функции при построении пространства $\widetilde{RL}_2$ (п. 57.10) и т. д. Во всех этих случаях отношение эквивалентности обладало следующими тремя свойствами: если элементы рассматриваемого множества обозначить буквами x, y, z, ..., а эквивалентные элементы x и y обозначить символом $x\sim y$, то:

1. Каждый элемент рассматриваемого множества эквивалентен самому себе: $x\sim x$ (рефлексивность).
2. Если $x\sim y$, то $y\sim x$ (симметричность).
3. Если $x\sim y$ и $y\sim z$, то $x\sim z$ (транзитивность).

Всегда предполагалось само собой разумеющимся, что множество тех или иных элементов, в котором введено понятие эквивалентности, обладающее свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности, распадается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов. В действительности так и есть. Сформулируем и докажем это утверждение в общем случае.

Пусть задано множество $A=\{x, y, z, \ldots\}$ и некоторое подмножество множества его упорядоченных пар, обладающее следующими свойствами: если пара (x, y) принадлежит этому подмножеству, то элементы x и y называются эквивалентными и пишется $x\sim y$, при этом выполняются условия рефлексивности, симметричности и транзитивности. В этом случае говорится, что в множестве A задано отношение эквивалентности.

Теорема. *Если в некотором множестве задано отношение эквивалентности, то это множество является суммой своих попарно не пересекающихся подмножеств эквивалентных между собой элементов.*

Доказательство. Пусть $A=\{x, y, z, \ldots\}$ — множество, в котором задано отношение эквивалентности. Для каждого элемента $x \in A$ через A_x обозначим множество всех элементов множества A, эквивалентных элементу x. Покажем, что

$$A = \bigcup_{x \in A} A_x \tag{61.1}$$

и что это представление множества A в виде суммы подмножеств A_x является искомым, т. е. что слагаемые A_x попарно не пересекаются.

Прежде всего в силу рефлексивности отношения эквивалентности для каждого $x \in A$ имеем $x \sim x$ и, следовательно, $x \in A_x$, т. е. каждый элемент множества A принадлежит некоторому A_x, поэтому

$$A \subset \bigcup_{x \in A} A_x. \tag{61.2}$$

С другой стороны, каждый элемент множества A_x в силу самой конструкции является элементом множества A. Следовательно, $A_x \subset A$ и потому

$$\bigcup_{x \in A} A_x \subset A. \tag{61.3}$$

Из включений (61.2) и (61.3) вытекает равенство (61.1).

Докажем теперь, что любые два элемента каждого из множеств A_x эквивалентны между собой. В самом деле, пусть $y \in A_x$, $z \in A_x$; это означает, что $y \sim x$ и $z \sim x$. В силу симметричности отношения эквивалентности отсюда следует, что $x \sim z$, откуда согласно транзитивности — $y \sim z$.

Покажем, наконец, что слагаемые в правой части равенства (61.1) попарно не пересекаются. Именно, покажем, что для любых двух элементов x' и x'' множества $A_{x'}$ и $A_{x''}$ либо совпадают, либо не пересекаются. В самом деле, пусть у множества $A_{x'}$ и $A_{x''}$ найдется хотя бы один общий элемент: $y \in A_{x'} \cap A_{x''}$ и пусть $z \in A_{x'}$. Поскольку было доказано, что для каждого множества A_x любые два его элемента эквивалентны, то $z \sim y$, $y \sim x''$ и, следовательно, $z \sim x''$, т. е. $z \in A_{x''}$. Элемент z являлся произвольным элементом из множества $A_{x'}$, поэтому

$$A_{x'} \subset A_{x''}; \tag{61.4}$$

аналогично

$$A_{x''} \subset A_{x'}. \tag{61.5}$$

Из (61.4) и (61.5) следует, что

$$A_{x'} = A_{x''}.$$

Таким образом, если у множеств $A_{x'}$ и $A_{x''}$ имеется хотя бы один общий элемент, то они совпадают; если же такового элемента нет, то эти множества, очевидно, не пересекаются.

Итак, представление (61.2) действительно обладает всеми сформулированными в теореме свойствами. $\square$