# § 62. ПРЕДЕЛ ПО ФИЛЬТРУ

При изучении курса анализа нам встретились два понятия предела: предел функции, частным случаем которого является предел последовательности, и предел интегральных сумм. Оказывается, что существует более общее понятие предела, называемое пределом по фильтру, которое содержит в себе оба указанные понятия предела как частные случаи. Существование такого понятия доставляет, безусловно, эстетическое удовлетворение, поэтому в настоящем параграфе будет дано его определение. Однако для изучения математического анализа введение этого понятия не дает по существу никаких преимуществ, чем и объясняется, что оно помещено в конце курса.

## 62.1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

**Определение 1.** *Пусть $X$ — некоторое множество и в нем задана система $\Omega = \{G\}$ подмножеств, удовлетворяющих следующим условиям:*

1°. *Пересечение конечного числа множеств системы $\Omega$ принадлежит этой системе.*

2°. *Объединение любой совокупности множеств системы $\Omega$ принадлежит этой системе.*

3°. $X \in \Omega$, $\varnothing \in \Omega$.

*Тогда множество $X$ называется топологическим пространством, система $\Omega$ — его топологией, а множества системы $\Omega$ — его открытыми подмножествами.*

*Для любой точки $x \in X$ каждое содержащее ее множество $G \in \Omega$ называется ее окрестностью.*

*Если у любых двух точек топологического пространства существуют непересекающиеся окрестности, то пространство называется хаусдорфовым* *).

Примером хаусдорфова топологического пространства является всякое метрическое пространство, так как его открытые множества образуют систему, удовлетворяющую условиям 1°, 2°, 3° определения 1 (см. п. 57.1). Существуют и так называемые неметризуемые топологические пространства (см. об этом в книге П. С. Александров «Введение в теорию множеств и общую топологию». М., 1977).

Для любой точки $x \in X$ всякая ее окрестность заведомо не является пустым множеством, так как она содержит по крайней мере один элемент — саму точку $x$.

**Определение 2.** *Всякая подсистема $\mathfrak{B}$ системы $\Omega$ открытых множеств топологического пространства называется базой топо-*

---

*) Ф. Хаусдорф (1868—1942) — немецкий математик.

*логии этого пространства, если любое непустое открытое множество пространства (т. е. непустое множество из системы $\Omega$) является объединением некоторой совокупности множеств из $\mathfrak{B}$.*

Так, в метрическом пространстве базой топологии является множество $\mathfrak{B}$ всех $\varepsilon$-окрестностей всех точек этого пространства. Действительно, каково бы ни было непустое открытое множество $G$ данного метрического пространства, для каждой его точки $x \in G$ существует такое $\varepsilon > 0$, что ее $\varepsilon$-окрестность содержится в $G$: $U(x, \varepsilon) \subset G$. Выберем и зафиксируем для каждой точки $x \in G$ одну из таких окрестностей, тогда множество $G$ очевидно будет являться их объединением:

$$G = \bigcup_{x \in G} U(x, \varepsilon).$$

Упражнение 1. Доказать, что в любом метрическом пространстве множество всех $\varepsilon$-окрестностей с рациональным $\varepsilon$ всех точек этого пространства образует его базу топологии.

Топологию можно задавать с помощью базы топологии. Именно, если $\mathfrak{B} = \{A\}$ — база топологии $\Omega$ пространства $X$, то согласно определению 2 $\Omega$ является системой всех подмножеств пространства $X$, каждое из которых либо является объединением некоторой совокупности множеств из $\mathfrak{B}$, либо пусто.

**Определение 3.** *Система $\mathfrak{B}(x)$ окрестностей точки $x$ топологического пространства $X$ называется локальной базой топологии в этой точке, если какова бы ни была окрестность $V$ точки $x$ в пространстве $X$, то существует такая окрестность $U \in \mathfrak{B}(x)$, что*

$$U \subset V.$$

Очевидно, что совокупность всех окрестностей данной точки образует ее локальную базу топологии. Для любой точки метрического пространства ее локальную базу топологии образуют также, например, все ее $\varepsilon$-окрестности радиусов $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Объединение локальных баз топологии во всех точках образует базу топологии всего пространства, ибо каждое непустое открытое множество можно представить, как объединение входящих в него окрестностей его точек, где указанные окрестности берутся из рассматриваемых локальных баз топологии. Тем самым топологию во множестве можно задавать, определяя локальные базы топологии в каждой из его точек.

С помощью понятия окрестности для топологических пространств дословно так же, как для метрических (см. п. 57.1 и п. 18.2) вводятся понятия точек прикосновения, предельных и изолированных, а также понятие замкнутого множества.

## 62.2. ФИЛЬТРЫ

В дальнейшем через $\mathfrak{P}(X)$ будем обозначать множество всех подмножеств множества $X$.

**Определение 4.** *Пусть $X$ — непустое множество. Множество $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ называется фильтром (или, подробнее, фильтром на множестве $X$), если:*

1°. *Для любых $A' \in \mathfrak{F}$ и $A'' \in \mathfrak{F}$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что*
$$A \subset A' \cap A''.$$

2°. $\varnothing \notin \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \neq \varnothing$.

Из свойств 1° и 2° вытекает, что пересечение любого конечного числа множеств, принадлежащих фильтру, непусто.

Примеры. 1. Пусть $X \neq \varnothing$, $X \supset A_0 \neq \varnothing$. Тогда множество $\mathfrak{F} = \{A\colon A_0 \subset A \in \mathfrak{P}(X)\}$ является фильтром на $X$. Действительно, очевидно, что $A_0 \in \mathfrak{F}$, а если $A' \in \mathfrak{F}$ и $A'' \in \mathfrak{F}$, то $A' \cap A'' \supset A_0 \neq \varnothing$, т. е. оба условия 1° и 2° определения 4 выполнены.

2. Пусть $x \in X$. Тогда множество $\mathfrak{F} = \{A\colon x \in A \in \mathfrak{P}(X)\}$ есть фильтр на $X$. Этот фильтр является частным случаем фильтра, рассмотренного в предыдущем примере, когда множество $A_0$ состоит из одной точки $x$.

3. Пусть $X = N$ — множество натуральных чисел и
$$A_n = \{m\colon m \in N,\ m > n\}, \quad n \in \boldsymbol{N}. \tag{62.1}$$
Тогда множество всех $A_n$ образует фильтр, обозначаемый $F_N = \{A_n\}$ и называемый *натуральным фильтром*.

Проверим, что $F_N$ — фильтр. Действительно, $N \in F_N$, и следовательно $F_N \neq \varnothing$, все $A_n \neq \varnothing$, а если $m < n$, то $A_n \cap A_m = A_n \in F_N$.

4. Пусть снова $X = N$. Система подмножеств $\mathfrak{F}_N$ множества $N$, каждое из которых является дополнением к конечному подмножеству множества $N$ также образует фильтр на $N$, называемый *фильтром Фреше* и содержащий в себе натуральный фильтр $F_N$.

Покажем, что $\mathfrak{F}_N$ действительно фильтр. Если $A \in \mathfrak{F}_N$ и $B \in \mathfrak{F}_N$, то обозначим через $n \in N$ наибольшее из чисел, входящих в множество $(N \setminus A) \cup (N \setminus B)$. Такое число существует, так как указанное множество в силу определения $\mathfrak{F}_N$ состоит лишь из конечного множества чисел. Тогда множество $A_n \in F_N$ (см. (62.1)) содержится в $A \cap B$. Далее, поскольку множество натуральных чисел $N$ счетно, а $N \setminus A$, где $A \in \mathfrak{F}_N$, по определению множества $\mathfrak{F}_N$ конечно, то $A \neq \varnothing$. Наконец, $N \in \mathfrak{F}_N$ и, следовательно, $\mathfrak{F}_N \neq \varnothing$. Таким образом $\mathfrak{F}_N$ — фильтр.

5. Пусть $X$ — топологическое пространство и $x \in X$. Локальная база топологии $\mathfrak{B}(x)$ образует фильтр. Действительно, прежде всего, очевидно, что для каждой окрестности $U \in \mathfrak{B}(x)$ имеем $x \in U$ и потому $U \neq \varnothing$. Далее, для любых $U \in \mathfrak{B}(x)$ и $V \in \mathfrak{B}(x)$ пересечение $U \cap V$ является открытым множеством, содержащим точку $x$, поэтому по определению локальной базы топологии существует такая окрестность $W \in \mathfrak{B}(x)$, что $W \subset U \cap V$.

6. Пусть $X$ — топологическое пространство, $x$ — предельная точка пространства $X$, $\mathfrak{B}(x)$ — локальная база топологии в этой точке и $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ множество всех «проколотых окрестностей» этой локальной базы топологии, т. е. $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ состоит из множеств

$$\mathring{U}(x) \overset{\text{def}}{=} U(x) \diagdown \{x\}, \quad U(x) \in \mathfrak{B}(x).$$

Тогда $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ образует фильтр. В самом деле, если $\mathring{U} \in \mathring{\mathfrak{B}}(x)$, то поскольку точка $x$ является предельной для пространства $X$, то существует точка $y \in \mathring{U}$ и, следовательно, $\mathring{U} \neq \varnothing$. Далее, для любых $\mathring{U} \in \mathring{\mathfrak{B}}(x)$ и $\mathring{V} \in \mathring{\mathfrak{B}}(x)$ имеем согласно их определению: $\mathring{U} = U \diagdown \{x\}$, $\mathring{V} = V \diagdown \{x\}$, $U \in \mathfrak{B}(x)$, $V \in \mathfrak{B}(x)$. Пересечение $U \cap V$ является окрестностью точки $x$, поэтому существует такая окрестность $W \in \mathfrak{B}(x)$, что $W \subset U \cap V$ и потому $\mathring{W} = W \diagdown \{x\} \subset \mathring{U} \cap \mathring{V}$. Итак, $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ действительно фильтр.

**Определение 5.** *Фильтр $\mathfrak{F}_1 = \{A\}$ на множестве $X$ называется фильтром, который сильнее фильтра $\mathfrak{F}_2 = \{B\}$ на том же множестве, если для любого множества $B \in \mathfrak{F}_2$ существует такое $A \in \mathfrak{F}_1$, что $A \subset B$,*

**Определение 6.** *Если фильтр $\mathfrak{F}_1$ сильнее фильтра $\mathfrak{F}_2$, а $\mathfrak{F}_2$ сильнее $\mathfrak{F}_1$, то фильтры $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ называются эквивалентными.*

Пример 7. Пусть $\mathfrak{B}(x)$ — локальная база топологии точки $x$ метрического пространства, состоящая из всех ее $\varepsilon$-окрестностей, а $\mathfrak{B}_0(x)$ — ее локальная база топологии, содержащая только окрестности радиуса $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Фильтры $\mathfrak{B}(x)$ и $\mathfrak{B}_0(x)$ эквивалентны.

Упражнение 2. Доказать, что фильтры в примерах 3 и 4 эквивалентны.

**Определение 7.** *Фильтр $\mathfrak{F}_1$ называется подфильтром фильтра $\mathfrak{F}_2$, если каждый элемент фильтра $\mathfrak{F}_1$ является и элементом фильтра $\mathfrak{F}_2$, т. е. если $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$.*

Очевидно, что фильтр сильнее всякого своего подфильтра.

**Определение 8.** *Каждый подфильтр фильтра, эквивалентный самому фильтру, называется его базой.*

Например, в примере 7 фильтр $\mathfrak{B}_0(x)$ является базой фильтра $\mathfrak{B}(x)$, а натуральный фильтр $F_N$ — базой фильтра Фреше $\mathfrak{F}_N$, построенного в примере 4.

Иногда бывает удобно рассматривать фильтры, удовлетворяющие еще одному дополнительному условию.

**Определение 9.** *Фильтр $\mathfrak{F}$ на множестве $X$ называется полным, если из условий*

$$A \in \mathfrak{F}, \quad B \in \mathfrak{P}(X) \quad \text{и} \quad A \subset B$$

*следует, что*

$$B \in \mathfrak{F}.$$

В выше рассмотренных примерах 1, 2 и 4 фильтры являлись полными. Например, в примере 4 (фильтр Фреше) это вытекает из того, что если $A \in \mathfrak{F}_N$ и, следовательно, его дополнение в множестве натуральных чисел $N$ конечно, то любое подмножество натуральных чисел $B$, которое содержит $A$, также имеет конечное дополнение в $N$, ибо, если $A \subset B \subset N$, то $N \setminus B \subset N \setminus A$.

Фильтры же, рассмотренные в примерах 3, 5 и 6, уже не являются полными. В примере 3 натуральный фильтр $F_N$ не является полным, поскольку не всякое подмножество $A$ множества натуральных чисел, содержащее множество вида $A_n$ (см. (62.1)), само имеет такой вид, т. е. принадлежит натуральному фильтру $F_N$. Фильтры, рассмотренные в примерах 5 и 6, не являются полными, так как не всякое множество, содержащее открытое множество, является обязательно само открытым.

Иногда в математической литературе полный фильтр называется просто фильтром, а фильтр в смысле определения 4 базисом (или базой) фильтра. Это оправдано тем, что справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Всякий фильтр является базой некоторого полного фильтра.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \{A\}$ — фильтр на множестве $X$. Определим множество $\mathfrak{G}$, как множество всех таких подмножеств $B$ множества $X$, что каждое из них имеет в качестве своего подмножества некоторый элемент фильтра $\mathfrak{F}$. Короче, $B \in \mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда существует такое $A \subset \mathfrak{F}$, что $A \subset B$. Покажем, что $\mathfrak{G}$ является полным фильтром, а фильтр $\mathfrak{F}$ — его базой.

Если $B' \in \mathfrak{G}$, $B'' \in \mathfrak{G}$, то существуют такие $A' \in \mathfrak{F}$ и $A'' \in \mathfrak{F}$, что $A' \subset B'$, $A'' \subset B''$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — фильтр, то найдется такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \in A' \cap A''$. Заметив, что $A' \cap A'' \subset B' \cap B''$, получим $A \subset B' \cap B''$ и, следовательно, согласно определению $\mathfrak{G}$ множество $B' \cap B''$ является его элементом: $B' \cap B'' \in \mathfrak{G}$. Тем самым выполняется условие $1^0$ определения 4.

Если бы $\varnothing \in \mathfrak{G}$, то снова, согласно определению $\mathfrak{G}$, нашлось бы такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset \varnothing$, но тогда $A = \varnothing$, т. е. пустое множество оказалось бы элементом $\mathfrak{F}$, что противоречило бы тому, что $\mathfrak{F}$ — фильтр. Следовательно, $\varnothing \notin \mathfrak{G}$. Кроме того, так как $A \subset A$, то каждое множество $A \in \mathfrak{F}$ является и элементом $\mathfrak{G}$, т. е. $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, а поскольку $\mathfrak{F}$, как всякий фильтр, не пуст: $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, то не пусто и множество $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{G} \neq \varnothing$. Таким образом $\mathfrak{G}$ удовлетворяет всем условиям определения 4, т. е. является фильтром. Его полнота тоже сразу вытекает из его определения. В самом деле, если $B \in \mathfrak{G}$, то существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset B$. Поэтому для каждого множества $B'$, такого, что $B \subset B' \subset X$, также справедливо включение $A \subset B'$, которое и означает, что $B' \in \mathfrak{G}$.

Наконец, $\mathfrak{F}$ является базой полного фильтра $\mathfrak{G}$. Действительно, с одной стороны, как было показано, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, т. е. фильтр $\mathfrak{F}$

является подфильтром $\mathfrak{S}$; а выше отмечалось, что всякий фильтр сильнее любого своего подфильтра. С другой стороны, определение фильтра $\mathfrak{S}$ как раз и означает, что фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее фильтра $\mathfrak{S}$: каково бы ни было $B \in \mathfrak{S}$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset B$ (см. определение 5). Итак, фильтры $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{S}$ эквивалентны. $\square$

**Лемма 2.** *Пусть $\mathfrak{F}_1$ — фильтр на множестве $X_1$, $\mathfrak{F}_2$ — фильтр на множестве $X_2$ и*

$$\mathfrak{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{C: C = A \times B, \ A \in \mathfrak{F}_1, \ B \in \mathfrak{F}_2\}; . \tag{62.2}$$

*тогда $\mathfrak{F}$ является фильтром на произведении $X_1 \times X_2$ множеств $X_1$ и $X_2$.*

Фильтр $\mathfrak{F}$, определенный равенством (62.2), называется *произведением фильтров* $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Если $\mathfrak{F}$ является произведением фильтров $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, то пишется $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$.

Доказательство. Пусть $C_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $C_2 \in \mathfrak{F}_2$, тогда, согласно определению (62.3) существуют такие $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_1$ и $B_1 \in \mathfrak{F}_2$, $B_2 \in \mathfrak{F}_2$, что $C_1 = A_1 \times B_1$, а $C_2 = A_2 \times B_2$. Поскольку $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — фильтры, то найдутся такие $A \in \mathfrak{F}_1$ и $B \in \mathfrak{F}_2$, что

$$A \subset A_1 \cap A_2, \quad B \subset B_1 \cap B_2. \tag{62.3}$$

В силу того же определения (62.2): $A \times B \in \mathfrak{F}$, причем из (62.3) следует, что

$$A \times B \subset (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2),$$

ибо, если $(x, y) \in A \times B$, то $x \in A$, $y \in B$. Следовательно в силу (62.3) $x \in A_1 \cap A_2$, $y \in B_1 \cap B_2$, поэтому $(x, y) \in A_1 \times B_1$ и $(x, y) \in \in A_2 \times B_2$, т. е.

$$(x, y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2).$$

Наконец, каждое $C = A \times B \neq \varnothing$, $A \in \mathfrak{F}_1$, $B \in \mathfrak{F}_2$, ибо в силу определения фильтра $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Из того, что $\mathfrak{F}_1 \neq \varnothing$ и $\mathfrak{F}_2 \neq \varnothing$, следует, что и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \neq \varnothing$.

Таким образом $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ удовлетворяет определению фильтра. $\square$

**Лемма 3.** *Пусть $X$ и $Y$ — некоторые множества, $f: X \to Y$ — отображение $X$ в $Y$ и $\mathfrak{F} = \{A\}$ — фильтр на множестве $X$. Тогда совокупность всех образов $f(A)$ множеств из фильтра $\mathfrak{F}$ является фильтром на множестве $Y$.*

Фильтр $\{f(A)\}$, $A \in \mathfrak{F}$, называется *образом фильтра $\mathfrak{F}$ при отображении $f$* и обозначается через

$$f(\mathfrak{F}) = \{f(A)\}, \quad A \in \mathfrak{F}. \tag{62.4}$$

Докажем, что $f(\mathfrak{F})$ действительно является фильтром. Пусть $f(A) \in f(\mathfrak{F})$, $f(B) \in f(\mathfrak{F})$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$. Тогда существует такой элемент $C$ фильтра $\mathfrak{F}: C \in \mathfrak{F}$, что $C \subset A \cap B$. Поскольку $f(C) \subset \subset f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, и по определению системы $f(\mathfrak{F})$ имеем $f(C) \in f(\mathfrak{F})$, то первое условие определения фильтра (см. определение 4) выполнено. Второе условие также выполнено, поскольку $f(\mathfrak{F})$ состоит только из элементов вида $f(A)$, где $A \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $f(A) \neq \varnothing$, поскольку $A \neq \varnothing$. Наконец, из того, что $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, следует, что и $f(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$. □

## 62.3. ПРЕДЕЛ ФИЛЬТРА

**Определение 10.** *Пусть $X$ — топологическое пространство, $x \in X$ и $\mathfrak{F}$ — фильтр на $X$. Точка $x$ называется пределом фильтра $\mathfrak{F}$, или его предельной точкой, если фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее фильтра $\mathfrak{B}(x)$, являющегося локальной базой топологии в этой точке.*

*Если точка $x$ является пределом фильтра $\mathfrak{F}$, то пишется*

$$x = \lim \mathfrak{F}.$$

Примеры. 1. Пусть $X = N$ — множество натуральных чисел, рассматриваемое, как обычно, с дискретной топологией: каждая точка $n \in N$ считается открытым множеством (иначе говоря, каждая точка является изолированной точкой), тогда натуральный фильтр $F_N$ (см. пример 3 в п. 62.2) не имеет предела в $N$.

Действительно, никакое число $n \in N$ не является пределом фильтра $F_N$, ибо у любого числа $n_0 \in N$ существует локальная база топологии, состоящая только из этого числа $n_0$ и не существует $A \in F_N$, содержащегося в одноточечном множестве $\{n_0\}$, поскольку любое $A \in F_N$ содержит бесконечно много элементов. Таким образом, фильтр $F_N$ не сильнее локальной базы топологии любого числа $n_0 \in N$.

2. Пусть $X = N \cup \{+\infty\}$, т. е. множество $X$ получено добавлением к множеству натуральных чисел $N$ «бесконечно удаленной точки» $+\infty$, причем локальная база топологии $\mathfrak{B}(+\infty)$ состоит из всевозможных множеств $A_n$ (см. (61.1)), а локальные базы $\mathfrak{B}(n)$, $n \in N$, по-прежнему из одной точки $n$. База топологии в $X$ определяется как объединение локальных баз всех его точек.

В пространстве $N \cup \{+\infty\}$ натуральный фильтр $F_N$ имеет своим пределом $+\infty$. Действительно, для любой окрестности $A_n \in \mathfrak{B}(+\infty)$ в качестве элемента $A \in F_N$ такого, что $A \subset A_n$ (см. определение 10), можно взять само $A_n$, ибо $A_n \in F_N$.

**Задача 44.** *Доказать, что для того чтобы любой фильтр топологического пространства имел не более одного предела, необходимо и достаточно, чтобы пространство было хаусдорфовым.*

**Теорема 1.** *Для того чтобы точка $x$ являлась пределом фильтра $\mathfrak{F}$ топологического пространства $X$, необходимо, чтобы эта точка являлась пределом каждой его базы, и достаточно, чтобы она являлась пределом по крайней мере одной его базы.*

Доказательство необходимости. Пусть подфильтр $\mathfrak{F}_0$ является базой фильтра $\mathfrak{F}$ пространства $X$ и

$$x = \lim \mathfrak{F},$$

т. е. фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее локальной базы топологии $\mathfrak{B}(x)$ в точке $x$. Это означает, что для любой окрестности $U \in \mathfrak{B}(x)$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset U$. Поскольку $\mathfrak{F}_0$ является базой фильтра $\mathfrak{F}$, то для указанного $A \in \mathfrak{F}$ найдется такое $B \in \mathfrak{F}_0$, что $B \subset A$ и, следовательно, $B \subset U$, т. е. подфильтр $\mathfrak{F}_0$ также сильнее локальной базы топологии $\mathfrak{B}(x)$, и потому $x = \lim \mathfrak{F}_0$.

Доказательство достаточности. Пусть подфильтр $\mathfrak{F}_0$ фильтра $\mathfrak{F}$ является его базой и $x = \lim \mathfrak{F}_0$, т. е. $\mathfrak{F}_0$ сильнее локальной базы топологии $\mathfrak{B}(x)$, тогда сам фильтр $\mathfrak{F}$ тем более сильнее $\mathfrak{B}(x)$, ибо каждый элемент подфильтра является и элементом фильтра. Следовательно $x = \lim \mathfrak{F}$. $\square$

### 62.4. ПРЕДЕЛ ОТОБРАЖЕНИЯ ПО ФИЛЬТРУ

Общее понятие предела дается следующим определением.

**Определение 11.** *Пусть $X$ — некоторое множество, $Y$ — топологическое пространство, $f$: $X \to Y$ — отображение $X$ в $Y$, $\mathfrak{F}$ — фильтр на $X$.*

*Точка $b \in Y$ называется пределом отображения $f$ по фильтру $\mathfrak{F}$ и пишется*

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = b,$$

*если фильтр $f(\mathfrak{F})$ имеет своим пределом в пространстве $Y$ точку $b$.*

Таким образом

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim f(\mathfrak{F}). \tag{62.5}$$

Примеры. 1. Пусть $X = N$ — множество натуральных чисел, $Y$ — топологическое пространство, $f: N \to Y$, $y_n \overset{\text{def}}{=} f(n)$, $n \in N$, и пусть $F_N$ — натуральный фильтр, построенный в примере 3, п. 62.2, т. е. $F_N$ состоит из множеств (62.1). Тогда предел отображения $f$ по фильтру $F_N$ совпадает с обычным пределом последовательности $\{y_n\}$ в $Y$. Действительно, условие $\lim_{F_N} f(n) = b$ равносильно, согласно (62.5), условию $\lim f(F_N) = b$, где $f(F_N) = \{f(A_n)\}$, $f(A_n) = \{y_m : m > n\}$. Равенство предела фильтра $f(F_N)$ точке $b$ означает, что для любой окрестности $U \in \mathfrak{B}(b)$, где $\mathfrak{B}(b)$ — локальная база топологии в точке $b$, существует содержащийся в $U$ элемент $f(A_{n_0})$ фильтра $f(F_N): f(A_{n_0}) \subset U$. Поскольку при $n > n_0$ выполняется включение $n \in A_{n_0}$, а следовательно, и включение $y_n = f(n) \in f(A_{n_0})$, то при $n > n_0$ имеет место включение $y_n \in U$. Это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$.

2. Пусть $X = N \times N$, $F_N$ — натуральный фильтр, $\mathfrak{F} = F_N \times F_N$ (см. (62.2)), $Y$ — топологическое пространство, $f: N \times N \to Y$, $y_{mn} \overset{\text{def}}{=} f(m, n)$, $m \in N$, $n \in N$; тогда предел $\lim_{\mathfrak{F}} f(m, n)$ совпадает с обычным пределом двойной последовательности $\{y_{mn}\}$: точка $b$ называется пределом $\lim\limits_{(m, n) \to \infty} y_{mn}$ последовательности $\{y_{mn}\}$, если

для любой окрестности $U$ точки $b$ существуют такие $m_0$ и $n_0$, что при $m > n_0$ и $n > n_0$ выполняется включение $y_{mn} \in U$. Таким образом,

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(m, n) = \lim_{(m, n) \to \infty} y_{mn}.$$

3. Пусть $E$ — измеримое по Жордану множество в $R^n$, $\tau$ — какое-либо его разбиение: $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$, $\xi_i \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть элементами множества $X$ являются в свою очередь всевозможные множества вида

$$x = \{\tau, \xi_1, \ldots, \xi_k\}. \tag{62.6}$$

Для любого $\eta > 0$ обозначим через $A_\eta$ подмножество множества $X$, состоящее из всех таких элементов $x$, у которых мелкости $\delta_\tau$, входящих в них разбиений $\tau$ меньше $\eta$, т. е. $\delta_\tau < \eta$.

Система $\mathfrak{F} = \{A_\eta\}$ является фильтром на $X$.

Всякая действительная функция $f$: $E \to \boldsymbol{R}$ порождает отображение $\varphi_f$: $X \to \boldsymbol{R}$ по формуле

$$\varphi_f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\, \mu E_i, \quad x = \{\tau, \xi_1, \ldots, \xi_k\}.$$

Таким образом, $\varphi_f(x)$ является значением соответствующей интегральной суммы Римана функции $f$.

Предел отображения $\varphi_f$: $X \to \boldsymbol{R}$ по фильтру $\mathfrak{F} = \{A_\eta\}$ совпадает с обычным пределом интегральных сумм Римана функции $f$ при условии, что мелкости рассматриваемых разбиений стремятся к нулю:

$$\lim_{\mathfrak{F}} \varphi_f(x) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\, \mu E_i.$$

4. Пусть $X$ и $Y$ топологические пространства, $f$: $X \to Y$, $a \in X$ и $\mathfrak{F}$ — такой фильтр на $X$, что $\lim \mathfrak{F} = a$ (т. е. фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее некоторой локальной базы топологии $\mathfrak{B}(a)$ в точке $a$).

Предел $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ в данном случае называется *пределом отображения $f$ по фильтру $\mathfrak{F}$ в точке $a$.*

При соответствующих выборах фильтров $\mathfrak{F}$ будут получаться в частности пределы в данной точке по различным множествам. Например, если фильтр $\mathfrak{F}$ состоит из окрестностей некоторой локальной базы топологии $\mathfrak{B}(a)$ точки $a$, то существование предела $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ в точке $a$ по такому фильтру означает непрерывность отображения $f$ в точке $a$, причем $\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Если точка $a$ является предельной точкой множества $X$, а фильтр $\mathfrak{F}$ состоит из проколотых окрестностей некоторой локальной базы топологии в этой точке (см. пример 6 в п. 62.2), то предел $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ совпадает с обычным пределом $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Заметим, что раньше символ $x \to a$ не имел для нас самостоятельного смысла: было определено лишь все обозначение $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ в целом. Теперь, в конце курса мы видим, что символ $x \to a$ можно рассматривать как обозначение фильтра $\mathring{\mathfrak{B}}(a)$ или фильтра $\mathfrak{B}(a)$, по которому берется предел отображения (в первом случае получится обычное определение предела отображения в точке $a$, во втором — определение его непрерывности в этой точке).

Итак, действительно все встретившиеся нам раньше понятия предела являются частным случаем предела отображения по фильтру.