Глава 10

Двойственность и ее приложения

10.1. Векторные топологии

10.1.1. Определение. Пусть $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство над основным полем $\mathbb{F}$. Топологию τ в X называют *согласованной со структурой векторного пространства* или, короче, *векторной топологией*, если непрерывны следующие отображения:

$$+ : (X \times X,\ \tau \times \tau) \to (X,\ \tau),$$
$$\cdot : (\mathbb{F} \times X,\ \tau_{\mathbb{F}} \times \tau) \to (X,\ \tau).$$

О пространстве $(X,\ \tau)$ в этом случае говорят как о *топологическом векторном пространстве.*

10.1.2. *Пусть τ_X — векторная топология. Отображения*

$$x \mapsto x + x_0, \quad x \mapsto \alpha x \quad (x_0 \in X,\ \alpha \in \mathbb{F} \setminus 0)$$

суть гомеоморфизмы $(X,\ \tau_X)$. ◁▷

10.1.3. Замечание. Несомненно, что векторная топология τ в пространстве X обладает следующим свойством «линейности»:

$$\tau(\alpha x + \beta y) = \alpha\tau(x) + \beta\tau(y) \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{F} \setminus 0;\ x,\ y \in X),$$

где в соответствии с общими соглашениями (ср. 1.3.5 (1))

$$U_{\alpha x+\beta y} \in \alpha\tau(x) + \beta\tau(y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists\, U_x \in \tau(x)\ \&\ U_y \in \tau(y))\ \alpha U_x + \beta U_y \subset U_{\alpha x+\beta y}.$$

В этой связи векторную топологию часто называют *линейной*, а топологическое векторное пространство — *линейным топологическим пространством.* Эту терминологию следует употреблять лишь понимая, что топология может обладать свойством «линейности», но не быть линейной. Такова, например, дискретная топология ненулевого векторного пространства.

10.1.4. *Теорема о строении векторной топологии.* *Пусть X — векторное пространство и $\mathscr{N}$ — фильтр в X. Существует векторная топология τ на X такая, что $\mathscr{N} = \tau(0)$, в том и только в том случае, если*

(1) $\mathscr{N} + \mathscr{N} = \mathscr{N}$;

(2) *$\mathscr{N}$ состоит из поглощающих множеств;*

(3) *$\mathscr{N}$ имеет базис из уравновешенных множеств. При этом $\tau(x) = x + \mathscr{N}$ для всех $x \in X$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Пусть τ — векторная топология и $\mathscr{N} = \tau(0)$. Из 10.1.2 получаем, что $\tau(x) = x + \mathscr{N}$ для $x \in X$. Ясно также, что (1) есть другая запись непрерывности сложения в нуле (пространства X^2). Условие (2) можно записать в виде $\tau_{\mathbb{F}}(0)x \supset \mathscr{N}$ для каждого $x \in X$, т. е. как условие непрерывности отображений $\alpha \mapsto \alpha x$ в нуле (пространства $\mathbb{R}$) при каждом фиксированном x из X. Условие (3) с учетом (2), в свою очередь, можно записать в виде $\tau_{\mathbb{F}}(0)\mathscr{N} = \mathscr{N}$, т. е. как условие непрерывности умножения на скаляр в нуле (пространства $\mathbb{F} \times X$).

$\Leftarrow$: Пусть $\mathscr{N}$ — фильтр, удовлетворяющий (1)–(3). Видно, что $\mathscr{N} \subset \operatorname{fil}\{0\}$. Положим $\tau(x) := x + \mathscr{N}$. Тогда τ — предтопология. Из определения τ и (1) вытекает, что τ — топология, причем сдвиги непрерывны, а сложение непрерывно в нуле. Таким образом, сложение непрерывно в каждой точке X^2. Справедливость (2) и (3) означает, что отображение $(\lambda,\ x) \mapsto \lambda x$ непрерывно в нуле по совокупности переменных и непрерывно в нуле по первому переменному при фиксированном втором. В силу тождества

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$$

осталось установить непрерывность этого отображения в нуле по второму переменному при фиксированном первом. Иными словами, нужно установить, что $\lambda\mathscr{N} \supset \mathscr{N}$ для $\lambda \in \mathbb{F}$. Для проверки найдем $n \in \mathbb{N}$, для которого $|\lambda| \le n$. Пусть $V \in \mathscr{N}$ и $W \in \mathscr{N}$ таковы, что W уравновешено и $W_1 + \ldots + W_n \subset V$, где $W_k := W$. Тогда $\lambda W = n(\lambda/n\, W) \subset nW \subset W_1 + \ldots + W_n \subset V$. $\rhd$

10.1.5. Теорема. *Множество* $\mathrm{VT}(X)$ *всех векторных топологий на* X *является полной решеткой. При этом для любого множества* $\mathscr{E}$ *в* $\mathrm{VT}(X)$ *выполнено*

$$\sup\nolimits_{\mathrm{VT}(X)} \mathscr{E} = \sup\nolimits_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}.$$

$\lhd$ Пусть $\overline{\tau} := \sup_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}$. Так как для $\tau \in \mathscr{E}$ сдвиг $x \mapsto x + x_0$ есть гомеоморфизм $(X,\ \tau)$ на $(X,\ \tau)$, то это отображение — гомеоморфизм $(X,\ \overline{\tau})$ на $(X,\ \overline{\tau})$. Привлекая 9.1.13, убеждаемся в том, что для фильтра $\overline{\tau}(0)$ выполнены условия 10.1.4 (1)–10.1.4 (3), поскольку они выполнены для фильтров $\tau(0)$ при $\tau \in \mathscr{E}$. Остается сослаться на 1.2.14. $\rhd$

10.1.6. *Теорема о прообразе векторной топологии.* *Прообраз векторной топологии при линейном отображении — векторная топология.*

$\lhd$ Пусть $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ и $\omega \in \mathrm{VT}(Y)$. Положим $\tau := T^{-1}(\omega)$. Если $x_\gamma \to x$ и $y_\gamma \to y$ в $(X,\ \tau)$, то, в силу 9.2.8, $Tx_\gamma \to Tx$, $Ty_\gamma \to Ty$ и, стало быть, $T(x_\gamma + y_\gamma) \to T(x+y)$. Последнее в силу 9.2.10 означает, что $x_\gamma + y_\gamma \to x + y$ в $(X,\ \tau)$. Таким образом, $\tau(x) = x + \tau(0)$ для всех $x \in X$ и, кроме того, $\tau(0) + \tau(0) = \tau(0)$. Применяя к линейному соответствию T^{-1} последовательно предложения 3.4.10 и 3.1.8, получаем, что фильтр $\tau(0) = T^{-1}(\omega(0))$ состоит из поглощающих множеств и имеет базис из уравновешенных множеств, так как по 10.1.4 такими свойствами обладает фильтр $\omega(0)$. Вновь привлекая 10.1.4, заключаем: $\tau \in \mathrm{VT}(X)$. $\rhd$

10.1.7. *Произведение векторных топологий — векторная топология.*

$\lhd$ Следует из 10.1.5 и 10.1.6. $\rhd$

10.1.8. Определение. Пусть A, B — множества в векторном пространстве. Говорят, что A является *B-устойчивым*, если $A + B \subset A$.

10.1.9. *Для каждой векторной топологии τ на X существует, и притом единственная, равномерность $\mathscr{U}_\tau$, имеющая базис из I_X-устойчивых множеств и такая, что $\tau = \tau(\mathscr{U}_\tau)$.*

$\lhd$ Для $U \in \tau(0)$ положим $V_U := \{(x,\ y) \in X^2 :\ \ y - x \in U\}$. Отметим очевидные свойства:

$$I_X \subset V_U; \quad V_U + I_X = V_U; \quad (V_U)^{-1} = V_{-U};$$
$$V_{U_1 \cap U_2} \subset V_{U_1} \cap V_{U_2}; \quad V_{U_1} \circ V_{U_2} \subset V_{U_1 + U_2}$$

для любых U, U_1, $U_2 \in \tau(0)$. Привлекая 10.1.4, выводим, что

$$\mathscr{U}_\tau := \operatorname{fil}\{V_U :\ U \in \tau(0)\}$$

— это равномерность, причем $\tau = \tau(\mathscr{U}_\tau)$. Несомненно также, что $\mathscr{U}_\tau$ имеет базис из I_X-устойчивых множеств.

Если теперь $\mathscr{U}$ еще одна равномерность такая, что $\tau(\mathscr{U}) = \tau$, и W — некоторое I_X-устойчивое окружение $\mathscr{U}$, то $W = V_{W(0)}$. Отсюда и вытекает требуемая единственность. $\rhd$

10.1.10. Определение. Пусть $(X,\ \tau)$ — топологическое векторное пространство. Равномерность $\mathscr{U}_\tau$, построенную в 10.1.9, называют *равномерностью рассматриваемого пространства* X.

10.1.11. Замечание. В дальнейшем при рассмотрении топологических векторных пространств будем считать их наделенными соответствующими равномерностями.

10.2. Локально выпуклые топологии

10.2.1. Определение. Векторную топологию принято называть *локально выпуклой*, если фильтр окрестностей каждой точки имеет базис, состоящий из выпуклых множеств.

10.2.2. ***Теорема о строении локально выпуклой топологии.*** *Пусть X — векторное пространство и $\mathscr{N}$ — фильтр в X. Существует локально выпуклая топология τ на X такая, что $\mathscr{N} = \tau(0)$, в том и только в том случае, если*

(1) $\frac{1}{2}\mathscr{N} = \mathscr{N}$;

(2) *$\mathscr{N}$ имеет базис, состоящий из абсолютно выпуклых поглощающих множеств.*