10.9.11. Замечание. В топологии предпучки, допускающие такую возможность локального задания своих элементов, называют *пучками.* В этой связи утверждение 10.9.10 выражают словами: предпучок мер Радона $\Omega \mapsto \mathscr{M}(\Omega)$ — это *пучок* или, более категорично, *функтор* $\mathscr{M}$ — *пучок* (ср. 10.9.4 (4)).

10.10. Пространства $\mathscr{D}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'(\Omega)$

10.10.1. Определение. *Основной* или *пробной* называют финитную гладкую функцию $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{F}$. При этом пишут $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) := \mathscr{D}(\mathbb{R}^N,\ \mathbb{F})$. Для $Q \Subset \mathbb{R}^N$ и $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$ полагают $\mathscr{D}(Q) := \big\{f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) :\ \operatorname{supp}(f) \subset Q\big\}$ и $\mathscr{D}(\Omega) := \cup\{\mathscr{D}(Q) :\ Q \Subset \Omega\}$.

10.10.2. *Справедливы утверждения:*

(1) $\mathscr{D}(Q) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{int} Q = \varnothing$;

(2) *пусть* $Q \Subset \mathbb{R}^N$ *и*

$$\|f\|_{n,Q} := \sum_{|\alpha| \le n} \|\partial^\alpha f\|_{C(Q)} :=$$

$$:= \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_N \le n}} \sup |(\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n} f)(Q)|$$

для гладкой (в окрестности Q) функции f (как обычно, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$). Мультинорма $\mathfrak{M}_Q := \{\|\cdot\|_{n,Q} :\ n \in \mathbb{N}\}$ превращает $\mathscr{D}(Q)$ в пространство Фреше;

(3) *пространство гладких функций $C_\infty(\Omega) := \mathscr{E}(\Omega)$ на $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$ с мультинормой $\mathfrak{M}_\Omega := \{\|\cdot\|_{n,Q} :\ n \in \mathbb{N},\ Q \Subset \Omega\}$ — пространство Фреше. При этом $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $C_\infty(\Omega)$;*

(4) *пусть $Q_1 \Subset \mathbb{R}^N$, $Q_2 \Subset \mathbb{R}^M$ и $Q \Subset Q_1 \times Q_2$. Линейная оболочка в $\mathscr{D}(Q)$ следов на Q функций вида $f_1 f_2(q_1,\ q_2) := f_1 \otimes f_2(q_1,\ q_2) := f_1(q_1) f_2(q_2)$, где $q_k \in Q_k$, $f_k \in \mathscr{D}(Q_k)$, плотна в $\mathscr{D}(Q)$;*

(5) *отображение $E \in \operatorname{Op}(\Omega) \mapsto \mathscr{D}(E) \in \operatorname{Lat}(\mathscr{D}(\Omega))$ сохраняет точные верхние границы:*

$$\mathscr{D}(E' \cap E'') = \mathscr{D}(E') \cap \mathscr{D}(E''),$$
$$\mathscr{D}(E' \cup E'') = \mathscr{D}(E') + \mathscr{D}(E'');$$
$$\mathscr{D}(\cup\mathscr{E}) = \mathscr{L}(\cup\{\mathscr{D}(E) :\ E \in \mathscr{E}\}) \quad (\mathscr{E} \subset \operatorname{Op}(\Omega)).$$

При этом точной является следующая последовательность (ср. 10.9.2 (5)):

$$0 \to \mathscr{D}(E' \cap E'') \xrightarrow{\iota_{(E',E'')}} \mathscr{D}(E') \times \mathscr{D}(E'') \xrightarrow{\sigma_{(E',E'')}} \mathscr{D}(E' \cup E'') \to 0.$$

$\lhd$ (1) и (2) очевидны.

(3) Выбираем последовательность $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$, для которой $Q_m \Subset \Omega$, $Q_m \Subset Q_{m+1}$, $\cup_{m\in\mathbb{N}} Q_m = \Omega$. При этом мультинорма $\{\|\cdot\|_{n,Q_m} : n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$ счетна и эквивалентна $\mathfrak{M}_\Omega$. Ссылка на 5.4.2 обосновывает метризуемость. Полнота сомнений не вызывает. Для установления плотности $\mathscr{D}(\Omega)$ в $C_\infty(\Omega)$ рассмотрим множество *срезывателей* $\operatorname{Tr}(\Omega) := \{\psi \in \mathscr{D}(\Omega) :\ 0 \le \psi \le \mathbf{1}\}$. Превращаем $\operatorname{Tr}(\Omega)$ в *направление*, полагая $\psi_1 \le \psi_2 \Leftrightarrow \operatorname{supp}(\psi_1) \subset \operatorname{int}\{\psi_2 = 1\}$. Ясно, что для $f \in C_\infty(\Omega)$ сеть $(\psi f)_{\psi\in\operatorname{Tr}(\Omega)}$ аппроксимирует f нужным образом.

(4) Пусть $a(q',\ q'') := a'(q')a''(q'')$, где a', a'' — усредняющие ядра в $\mathbb{R}^N$ и в $\mathbb{R}^M$ соответственно, а $q' \in \mathbb{R}^N$ и $q'' \in \mathbb{R}^M$. Для $f \in \mathscr{D}(Q)$, $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ подберем χ из условия $\|f - f * a_\chi\|_{m,Q} \le \varepsilon/2$. Учитывая равностепенную непрерывность семейства $\mathscr{F} := \{\partial^\alpha f(q)\tau_q(a_\chi) : |\alpha| \le m,\ q \in Q_1 \times Q_2\}$, найдем конечные множества $\Delta' \subset Q_1$, $\Delta'' \subset Q_2$ так, чтобы интеграл каждой функции из $\mathscr{F}$ с точностью до $1/2\,(N+1)^{-m}\varepsilon$ аппроксимировался суммой Римана, отвечающей точкам из $\Delta' \times \Delta''$. Возникающая при этом функция $\overline{f}$ из $\mathscr{D}(Q)$ требуемая, т. е. $\|f - \overline{f}\|_{m,Q} \le \varepsilon$.

(5) устанавливают как 10.9.2 (4) с заменой 9.4.18 на 9.6.19 (2). $\rhd$

10.10.3. Замечание. Для проверки 10.10.2 (4) можно применить обобщенную теорему Вейерштрасса, соединенную со срезыванием, обеспечивающим финитность конструируемых приближений.

10.10.4. Определение. Функционал $u \in \mathscr{D}(\Omega,\ \mathbb{F})^\#$ называют *обобщенной функцией* или *распределением* (иногда добавляют ссылку на природу поля $\mathbb{F}$) и пишут $u \in \mathscr{D}'(\Omega) := \mathscr{D}'(\Omega,\ \mathbb{F})$, если $u|_{\mathscr{D}(Q)} \in \mathscr{D}'(Q) := \mathscr{D}'$, как только $Q \Subset \Omega$. Используют обычные обозначения $\langle u,\ f\rangle := \langle f \,|\, u\rangle := u(f)$, а иногда и наиболее выразительный единый символ

$$\int f(x)u(x)\,dx := u(f) \quad (f \in \mathscr{D}(\Omega)).$$

10.10.5. Примеры.

(1) Пусть $g \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ — некоторая локально интегрируемая функция. Тогда отображение

$$u_g(f) := \int f(x)g(x)\,dx \quad (f \in \mathscr{D}(\Omega))$$

задает распределение u_g. Обобщенные функции такого вида называют *регулярными*. Для обозначения регулярной обобщенной функции u_g используют более удобный символ g. В этой связи, в частности, пишут: $\mathscr{D}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ и $u_g = |\,g\rangle$.

(2) Каждая мера Радона — распределение. Всякое *положительное распределение* u (т. е. такое, что $f \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq 0$) задано положительной мерой.

(3) Говорят, что распределение u *обладает порядком не выше* m, если для любого $Q \Subset \mathbb{R}^N$ существует число t_Q такое, что

$$|u(f)| \leq t_Q \|f\|_{m,Q} \quad (f \in \mathscr{D}(Q)).$$

Естественным образом вводят понятия *порядка распределения* и *распределения конечного порядка*. Разумеется, не каждое распределение обязано иметь конечный порядок.

(4) Пусть α — мультииндекс: $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$ и u — распределение: $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Для $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ полагают $(\partial^\alpha u)(f) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha f)$. Возникающее распределение $\partial^\alpha u$ называют *производной* u (порядка α). Говорят также об *обобщенном дифференцировании*, о *производных в смысле теории распределения* и т. п., применяя обычные символы.

Производная (ненулевого порядка) меры Дирака — это не мера. В то же время $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ служит производной *функции Хевисайда* $\delta^{(-1)} := H$, где $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция $\mathbb{R}_+$. Если производная (регулярной) обобщенной функции u — регулярное распределение u_g, то g называют *производной u в смысле Соболева*. Для основной функции такая производная совпадает с обычной.

(5) Для $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ полагают $u^*(f) := u(f^*)^*$. Возникающее распределение u^* называют (*эрмитово*) *сопряженным к* u. Наличие инволюции $*$ позволяет, как обычно (ср. 10.9.3 (3)), говорить о *вещественных распределениях* и о порождении с их помощью *комплексных обобщенных функций*.

(6) Пусть $E \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ и $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Для $f \in \mathscr{D}(E)$, очевидно, определен скаляр $u(f)$. Тем самым возникает распределение $u_E \in \mathscr{D}'(E)$, называемое *сужением u на E*. Очевидно, что функтор $\mathscr{D}$ — это предпучок.

При $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ и $E \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ говорят, что в E *нет* u, если $u_E = 0$. В силу 10.10.4 (5), распределения u нет и в объединении тех открытых подмножеств в Ω, в которых u отсутствует. Дополнение (до $\mathbb{R}^N$) наибольшего открытого множества, в котором нет u, называют *носителем u* и обозначают $\mathrm{supp}(u)$. Отметим, что $\mathrm{supp}(\partial^\alpha u) \subset \mathrm{supp}(u)$. Кроме того, распределение с компактным носителем имеет конечный порядок.

(7) Пусть $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ и $f \in C_\infty(\Omega)$. Для $g \in \mathscr{D}(\Omega)$ будет $fg \in \mathscr{D}(\Omega)$. Полагают $(fu)(g) := u(fg)$. Возникающее распределение fu называют *произведением f на u*. Пусть теперь $\mathrm{Tr}\,(\Omega)$ — направление срезывателей. Если существует предел $\lim_{\psi \in \mathrm{Tr}\,(\Omega)} u(f\psi)$, то говорят, что *u применимо к функции f*. Ясно, что распределение u с компактным носителем применимо к любой функции из $C_\infty(\Omega)$. При этом $u \in \mathscr{E}'(\Omega) := C_\infty(\Omega)'$. В свою очередь, каждый элемент $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ (см. 10.10.2 (3)), очевидно, однозначно определяет распределение $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ с компактным носителем.

Если $f \in C_\infty(\Omega)$ и $\partial^\alpha f\big|_{\mathrm{supp}(u)} = 0$ при всех α, для которых $|\alpha| \le m$, где u — распределение с компактным носителем порядка не выше m, то, как можно удостовериться, $u(f) = 0$. В частности, отсюда следует, что точечный носитель имеют только линейные комбинации меры Дирака и ее производных. $\lhd\rhd$

(8) Пусть $\Omega_1,\ \Omega_2 \in \mathrm{Op}\,(\mathbb{R}^N)$ и $u_k \in \mathscr{D}'(\Omega_k)$. На произведении $\Omega_1 \times \Omega_2$ существует, и притом единственное, распределение u такое, что для $f_k \in \mathscr{D}(\Omega_k)$ выполнено $u(f_1 f_2) = u_1(f_1)u_2(f_2)$. Это распределение обозначают $u_1 \times u_2$ или же $u_1 \otimes u_2$. Привлекая 10.10.2 (4), видим, что для $f \in \mathscr{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ значение $u(f)$ можно найти последовательным применением u_1 и u_2. Точнее говоря,

$$\begin{aligned} u(f) &= u_2(y \in \Omega_2 \mapsto u_1(f(\cdot,\ y))) = \\ &= u_1(x \in \Omega_1 \mapsto u_2(f(x,\ \cdot))). \end{aligned}$$

В более образных обозначениях имеем *теорему Фубини для распределений*:

$$\iint\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,\ y)(u_1 \times u_2)(x,\ y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} f(x,\ y) u_1(x)\, dx \right) u_2(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_2} f(x,\ y) u_2(y)\, dy \right) u_1(x)\, dx.$$

Полезно отметить, что

$$\operatorname{supp}(u_1 \times u_2) = \operatorname{supp}(u_1) \times \operatorname{supp}(u_2).$$

(9) Пусть $u,\ v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$. Для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ положим $\overset{+}{f} := f \circ +$. Ясно, что $\overset{+}{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Говорят, что распределения u и v *свёртываемы*, *конволютивны* или *сворачиваемы*, если *произведение* $u \times v$ применимо к любой функции $\overset{+}{f} \subset C_\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. Легко видеть (ср. 10.10.10), что возникающий линейный функционал $f \mapsto (u \times v)(\overset{+}{f})$ $(f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N))$ является распределением. Его называют *свёрткой u и v* и обозначают $u * v$. Несомненно, что свёртки функций (см. 9.6.17) и мер на $\mathbb{R}^N$ (см. 10.9.4 (7)) представляют частные случаи свёртки распределений. В некоторых множествах любая пара распределений сворачиваема. Например, *пространство $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^N)$ распределений с компактными носителями* с операцией свёртки в качестве умножения представляет собой (ассоциативную, коммутативную) алгебру с единицей — дельта-функцией δ. При этом $\partial^\alpha u = \partial^\alpha \delta * u$, $\partial^\alpha (u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v$. Кроме того, имеет место замечательное равенство (= *теорема Лионса о носителях*):

$$\operatorname{co}(\operatorname{supp}(u * v)) = \operatorname{co}(\operatorname{supp}(u)) + \operatorname{co}(\operatorname{supp}(v)).$$

Подчеркнем, что попарная сворачиваемость распределений не обеспечивает, вообще говоря, ассоциативности свёртки ($(\mathbf{1} * \delta') * \delta^{(-1)} = 0$ и $\mathbf{1} * (\delta' * \delta^{(-1)}) = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1} := \mathbf{1}_\mathbb{R}$).

Каждое распределение u сворачиваемо с основной функцией f до регулярного распределения $(u * f)(x) = u(\tau_x(f^\sim))$, где $f^\sim := \widetilde{f}$ — *отражение* f, т. е. $f^\sim(x) := f(-x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. Оператор $u* :$ $f \mapsto u * f$ действует из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ в $C_\infty(\mathbb{R}^N)$, непрерывен и перестановочен со сдвигами: $(u*)\tau_x = \tau_x u*$ для $x \in \mathbb{R}^N$. Легко видеть, что названные свойства характеристические, т. е. если оператор T из $\mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathbb{R}^N),\ C_\infty(\mathbb{R}^N))$ непрерывен и перестановочен со сдвигами, то существует, и притом единственное, распределение u такое, что $T = u*$ — именно $u(f) := (T'\delta)(\widetilde{f})$ для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ (ср. с теоремой Венделя).

10.10.6. Определение. Пространства $\mathscr{D}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'(\Omega)$ считают приведенными в двойственность (индуцированную двойственностью $\mathscr{D}(\Omega) \leftrightarrow \mathscr{D}(\Omega)^\#$). При этом пространство $\mathscr{D}'(\Omega)$ наделяют *топологией пространства распределений* — $\sigma(\mathscr{D}'(\Omega),\ \mathscr{D}(\Omega))$, а $\mathscr{D}(\Omega)$ — *топологией пространства основных функций* — топологией Макки $\tau_{\mathscr{D}} := \tau_{\mathscr{D}(\Omega)} := \tau(\mathscr{D}(\Omega),\ \mathscr{D}'(\Omega))$.

10.10.7. *Пусть* $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$. *Тогда*

(1) *топология* $\tau_{\mathscr{D}}$ *— сильнейшая из таких локально выпуклых топологий, что вложение* $\mathscr{D}(Q)$ *в* $\mathscr{D}(\Omega)$ *непрерывно при* $Q \Subset \Omega$ *(т. е.* $\tau_{\mathscr{D}}$ *— топология индуктивного предела);*

(2) *множество* A *в* $\mathscr{D}(\Omega)$ *ограничено в том и только в том случае, если для некоторого* $Q \Subset \Omega$ *множество* A *попадает в* $\mathscr{D}(Q)$ *и ограничено в* $\mathscr{D}(Q)$*;*

(3) *последовательность* (f_n) *сходится к* f *в* $(\mathscr{D}(\Omega),\ \tau_{\mathscr{D}})$ *в том и только в том случае, если имеется компакт* $Q \Subset \Omega$ *такой, что* $\operatorname{supp}(f_n) \subset Q$, $\operatorname{supp}(f) \subset Q$ *и* $(\partial^\alpha f_n)$ *равномерно на* Q *сходится к* f *для всех мультииндексов* α *(символически:* $f_n \twoheadrightarrow f$*);*

(4) *оператор* $T \in \mathscr{L}(\mathscr{D}(\Omega),\ Y)$*, где* Y *— локально выпуклое пространство, непрерывен в том и только в том случае, если* $Tf_n \to 0$*, как только* $f_n \twoheadrightarrow 0$*;*

(5) *каждая дельтообразная последовательность* (b_n) *служит (свёрточной) аппроксимативной единицей как в* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$*, так и в* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$*, т. е. для* $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ *и* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ *верно:* $b_n * f \twoheadrightarrow f$ *(в* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$*) и* $b_n * u \to u$ *(в* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$*).*

$\triangleleft$ (1) устанавливается как 10.9.6, а (2) — по аналогии с 10.9.7 с учетом представления Ω в виде объединения $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$, где $Q_n \Subset Q_{n+1}$ для $n \in \mathbb{N}$.

(3) Следует заметить, что сходящаяся последовательность ограничена, а затем привлечь 10.10.7 (2) (ср. 10.9.8).

(4) В силу 10.10.7 (1) непрерывность T равносильна непрерывности сужений $T\big|_{\mathscr{D}(Q)}$ для $Q \Subset \Omega$. В силу 10.10.2 (2) пространство $\mathscr{D}(Q)$ метризуемо. Осталось сослаться на 10.10.7 (3).

(5) Ясно, что носители $\operatorname{supp}(b_n * f)$ лежат в некоторой компактной окрестности $\operatorname{supp}(f)$. Помимо этого, для $g \in C(\mathbb{R}^N)$ очевидно, что $b_n * g \to g$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}^N$. Применяя последнее утверждение к $\partial^\alpha f$ и учитывая (3), видим: $b_n * f \twoheadrightarrow f$.

С учетом 10.10.6 (8) для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ имеем

$$u(\widetilde{f}) = (u * f)(0) = \lim_n (u * (b_n * f))(0) =$$

$$= \lim_n ((u * b_n) * f)(0) = \lim_n (b_n * u)(\widetilde{f}). \ \triangleright$$

10.10.8. Замечание. В связи с 10.10.7 (3) для $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ часто выделяют пространство $\mathscr{D}^{(m)}(\Omega) := C_0^{(m)}(\Omega)$, составленное из финитных функций f, все производные которых $\partial^\alpha f$ при $|\alpha| \le m$ непрерывны. Пространство $\mathscr{D}^{(m)}(Q) := \{f \in \mathscr{D}^{(m)}(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \subset Q\}$ для $Q \Subset \Omega$ снабжают нормой $\|\cdot\|_{m,Q}$, превращая его в банахово. При этом $\mathscr{D}^{(m)}(\Omega)$ наделяют топологией индуктивного предела. Таким образом, $\mathscr{D}^{(0)}(\Omega) = K(\Omega)$ и $\mathscr{D}(\Omega) = \cap_{m\in\mathbb{N}}\mathscr{D}^{(m)}(\Omega)$. Сходимость в $\mathscr{D}^{(m)}(\Omega)$ последовательности (f_n) к нулю означает равномерную сходимость с производными до порядка m на $Q \Subset \Omega$, где $\operatorname{supp}(f_n) \subset Q$ для всех достаточно больших n. Подчеркнем, что $\mathscr{D}^{(m)}(\Omega)'$ составлено *распределениями порядка не выше* m. Соответственно

$$\mathscr{D}'_F(\Omega) := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{D}^{(m)}(\Omega)'$$

— *пространство всех обобщенных функций, имеющих конечный порядок.*

10.10.9. *Пусть $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$. Тогда*

(1) *пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ бочечно, т. е. каждое абсолютно выпуклое замкнутое поглощающее множество (= бочка) в нем — окрестность нуля;*

(2) *любое ограниченное замкнутое подмножество $\mathscr{D}(\Omega)$ компактно, т. е. $\mathscr{D}(\Omega)$ — монтелево пространство;*

(3) *всякое абсолютно выпуклое множество в $\mathscr{D}(\Omega)$, поглощающее каждое ограниченное множество, является окрестностью нуля, т. е. $\mathscr{D}(\Omega)$ — борнологическое пространство;*

(4) *основные функции плотны в пространстве обобщенных функций.*

$\lhd$ (1) Бочка V в $\mathscr{D}(\Omega)$ такова, что $V_Q := V \cap \mathscr{D}(Q)$ — бочка в $\mathscr{D}(Q)$ при $Q \Subset \Omega$. Стало быть, V_Q — окрестность нуля в $\mathscr{D}(Q)$ (см. 7.1.8).

(2) Такое множество лежит в $\mathscr{D}(Q)$ для некоторого $Q \Subset \Omega$ в силу предложения 10.10.7 (2). На основании 10.10.2 (2), $\mathscr{D}(Q)$ метризуемо. Учитывая 4.6.10 и 4.6.11, последовательно приходим к требуемому.

(3) следует из борнологичности $\mathscr{D}(Q)$ при $Q \Subset \Omega$.

(4) Пусть $g \in |\mathscr{D}(\Omega))^\circ$, где указанная поляра вычисляется для двойственности $\mathscr{D}(\Omega) \leftrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$. Ясно, что для $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ выполнено $u_f(g) = 0$, т. е. $\int g(x)f(x)\,dx = 0$. Итак, $g = 0$. Остается сослаться на 10.5.9. $\rhd$

10.10.10. *Теорема Шварца.* *Пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность распределений и для каждого $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ имеется сумма*

$$u(f) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(f).$$

Тогда u — распределение, причем

$$\partial^\alpha u = \sum_{k=1}^{\infty} \partial^\alpha u_k$$

для всякого мультииндекса α.

$\lhd$ Непрерывность u обеспечена 10.10.9 (1). Помимо этого, при $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ по определению (см. 10.10.5 (4))

$$\partial^\alpha u(f) =$$

$$= u\left((-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\left((-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \partial^\alpha u_k(f). \ \rhd$$

10.10.11. *Теорема.* *Функтор $\mathscr{D}'$ — пучок.*

$\lhd$ Очевидно (ср. 10.9.10 и 10.9.11). $\rhd$

10.10.12. ЗАМЕЧАНИЕ. Возможность задания распределения локальными данными, т. е. ***принцип локализации для обобщенных функций***, констатированный 10.10.11, допускает уточнение ввиду паракомпактности $\mathbb{R}^N$. Именно, если $\mathscr{E}$ — открытое покрытие Ω и $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ — распределение с локальными данными $(u_E)_{E\in\mathscr{E}}$, то можно взять подчиненное $\mathscr{E}$ счетное (локально конечное) разбиение единицы $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Видно, что $u = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k u_k$, где $u_k := u_{E_k}$ и $\operatorname{supp}(\psi_k) \subset E_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

10.10.13. *Теорема.* *Обобщенная функция u на Ω порядка не выше m допускает представление в виде суммы производных мер Радона:*

$$u = \sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha \mu_\alpha,$$

где $\mu_\alpha \in \mathscr{M}(\Omega)$.

$\lhd$ Пусть сначала u обладает компактным носителем $\operatorname{supp}(u)$ и $Q \Subset \Omega$ — компактная окрестность $\operatorname{supp}(u)$. По условию (ср. 10.10.5 (7) и 10.10.8)

$$|u(f)| \le t \sum_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha f\|_\infty \quad (f \in \mathscr{D}(Q))$$

при некотором $t \ge 0$.

Привлекая 3.5.7 и 3.5.3, с учетом 10.9.4 (2) имеем

$$u = t \sum_{|\alpha|\le m} \nu_\alpha \circ \partial^\alpha = t \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \nu_\alpha$$

для подходящего семейства $(\nu_\alpha)_{|\alpha|\le m}$, где $\nu_\alpha \in |\partial|(\|\cdot\|_\infty)$.

Переходя теперь к общему случаю, рассмотрим некоторое разбиение единицы $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, образованное такими $\psi_k \in \mathscr{D}(\Omega)$, что окрестности Q_k носителей $\operatorname{supp}(\psi_k)$ составляют локально конечное покрытие Ω (см. 10.10.12). Для распределений $(\psi_k u)_{k\in\mathbb{N}}$ на основании уже доказанного имеем

$$\psi_k u = \sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha \mu_{k,\alpha},$$

где $\mu_{k,\alpha}$ — меры Радона на Ω, причем $\operatorname{supp}(\mu_{k,\alpha}) \subset Q_k$.

Привлекая теорему Шварца 10.10.10, сразу видим, что определена сумма

$$\mu_\alpha(f) := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{k,\alpha}(f)$$

для $f \in K(\Omega)$ и возникающее распределение μ_α — мера Радона. Вновь апеллируя к 10.10.10, получаем:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha \mu_{k,\alpha} = \sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{k,\alpha} \right) = \sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha \mu_\alpha.$$

Это и требовалось. $\triangleright$

10.10.14. Замечание. Утверждение 10.10.13 часто называют *теоремой об общем виде распределений.* Она допускает разнообразные обобщения и уточнения. Например, можно убедиться, что мера Радона с компактным носителем служит обобщенной производной (подходящего порядка) некоторой непрерывной функции, что позволяет локально рассматривать любую обобщенную функцию как результат обобщенного дифференцирования обычной функции.

10.11. Преобразование Фурье умеренных распределений

10.11.1. *Пусть χ — ненулевой функционал, заданный на пространстве $L_1(\mathbb{R}^N) := L_1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Эквивалентны утверждения:*

(1) *χ — характер групповой алгебры $(L_1(\mathbb{R}^N), *)$, т. е. $\chi \ne 0$, $\chi \in L_1(\mathbb{R}^N)'$ и*

$$\chi(f * g) = \chi(f)\chi(g) \quad (f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N))$$

(символически: $\chi \in \mathrm{X}(L_1(\mathbb{R}^N))$, ср. 11.6.4);

(2) *существует, и притом единственный, вектор $t \in \mathbb{R}^N$ такой, что для каждого $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ выполнено*

$$\chi(f) = \widehat{f}(t) := (f * e_t)(0) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{i(x,t)}\, dx.$$

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $\chi(f)\chi(g) \ne 0$. Если $x \in \mathbb{R}^N$, то

$$\chi(\delta_x * f * g) = \chi(\delta_x * f)\chi(g) = \chi(\delta_x * g)\chi(f).$$