Привлекая теорему Шварца 10.10.10, сразу видим, что определена сумма

$$\mu_\alpha(f) := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{k,\alpha}(f)$$

для $f \in K(\Omega)$ и возникающее распределение $\mu_\alpha$ — мера Радона. Вновь апеллируя к 10.10.10, получаем:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha| \le m} \partial^\alpha \mu_{k,\alpha} = \sum_{|\alpha| \le m} \partial^\alpha \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{k,\alpha} \right) = \sum_{|\alpha| \le m} \partial^\alpha \mu_\alpha.$$

Это и требовалось. $\triangleright$

**10.10.14.** Замечание. Утверждение 10.10.13 часто называют *теоремой об общем виде распределений.* Она допускает разнообразные обобщения и уточнения. Например, можно убедиться, что мера Радона с компактным носителем служит обобщенной производной (подходящего порядка) некоторой непрерывной функции, что позволяет локально рассматривать любую обобщенную функцию как результат обобщенного дифференцирования обычной функции.

## 10.11. Преобразование Фурье умеренных распределений

**10.11.1.** *Пусть $\chi$ — ненулевой функционал, заданный на пространстве $L_1(\mathbb{R}^N) := L_1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Эквивалентны утверждения:*

**(1)** *$\chi$ — характер групповой алгебры $(L_1(\mathbb{R}^N), *)$, т. е. $\chi \ne 0$, $\chi \in L_1(\mathbb{R}^N)'$ и*

$$\chi(f * g) = \chi(f)\chi(g) \quad (f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N))$$

*(символически: $\chi \in \mathrm{X}(L_1(\mathbb{R}^N))$, ср. 11.6.4);*

**(2)** *существует, и притом единственный, вектор $t \in \mathbb{R}^N$ такой, что для каждого $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ выполнено*

$$\chi(f) = \widehat{f}(t) := (f * e_t)(0) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{i(x,t)}\, dx.$$

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $\chi(f)\chi(g) \ne 0$. Если $x \in \mathbb{R}^N$, то

$$\chi(\delta_x * f * g) = \chi(\delta_x * f)\chi(g) = \chi(\delta_x * g)\chi(f).$$

Положим $\psi(x) := \chi(f)^{-1}\chi(\delta_x * f)$. Тем самым корректно определено непрерывное отображение $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$. При этом для $x,\ y \in \mathbb{R}^N$ будет

$$\begin{gathered}\psi(x+y) = \\ = \chi(f*g)^{-1}\chi(\delta_{x+y} * (f*g)) = \\ = \chi(f)^{-1}\chi(g)^{-1} \cdot \chi(\delta_x * f * \delta_y * g) = \\ = \chi(f)^{-1}\chi(\delta_x * f)\chi(g)^{-1}\chi(\delta_y * g) = \\ = \psi(x)\psi(y),\end{gathered}$$

т. е. $\psi$ — групповой (унитарный) характер: $\psi \in \mathrm{X}(\mathbb{R}^N)$. Анализ показывает, что $\psi = e_t$ для некоторого (очевидно, единственного) $t \in \mathbb{R}^N$. При этом с учетом свойств интеграла Бохнера

$$\begin{gathered}\chi(f)\chi(g) = \chi(f*g) = \chi\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} (\delta_x * g) f(x)\, dx\right) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \chi(\delta_x * g) f(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\chi(g)\psi(x)\, dx = \\ = \chi(g)\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\psi(x)\, dx.\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\chi(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\psi(x)\, dx \quad (f \in L_1(\mathbb{R}^N)).$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Рассматривая $f$, $g$ и $f * g$ как распределения, для $t \in \mathbb{R}^N$ выводим:

$$\widehat{f*g}(t) = u_{f*g}(e_t) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)g(y)e_t(x+y)\, dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e_t(x)\, dx \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)e_t(y)\, dy =$$

$$= u_f(e_t)u_g(e_t) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t). \ \triangleright$$

**10.11.2.** Замечание. Проведенные рассуждения в существенном сохраняются для любой локально компактной абелевой группы $G$. Характеры групповой алгебры из $\mathrm{X}(L_1(G))$ однозначно связаны с (*унитарными*) *групповыми характерами* $G$, т. е. с непрерывными отображениями $\psi : G \to \mathbb{C}$, для которых

$$|\psi(x)| = 1, \quad \psi(x+y) = \psi(x)\psi(y) \quad (x,\ y \in G).$$

Относительно поточечного умножения множество $\widehat{G} := \mathrm{X}(G)$ таких характеров представляет коммутативную группу. Поскольку по теореме Алаоглу — Бурбаки $\mathrm{X}(L_1(G))$ локально компактно в слабой топологии $\sigma((L_1(G))',\ L_1(G))$, то $\widehat{G}$ можно рассматривать как локально компактную абелеву группу. Ее называют *группой характеров* $G$ или *двойственной к* $G$ *группой*. Каждый элемент $q \in G$ определяет характер $\widehat{\widehat{q}} : \widehat{q} \in \widehat{G} \mapsto \widehat{q}(q) \in \mathbb{C}$ двойственной группы $\widehat{G}$. Возникающее вложение $G$ в $\widehat{\widehat{G}}$ — изоморфизм локально компактных абелевых групп $G$ и $\widehat{\widehat{G}}$ (= *теорема двойственности Понтрягина — ван Кампена*).

**10.11.3.** Определение. Для функции $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ отображение $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, определенное правилом

$$\widehat{f}(t) := f^\frown(t) := (f * e_t)(0),$$

называют *преобразованием Фурье* $f$.

**10.11.4.** Замечание. Термин «преобразование Фурье» трактуют расширительно, допуская удобную вольностью. Во-первых, его сохраняют как для оператора $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}^N}$, действующего по правилу $\mathscr{F}f := \widehat{f}$, так и для модификаций этого оператора (ср. 10.11.13). Во-вторых, преобразование $\mathscr{F}$ отождествляют с оператором $\mathscr{F}_\theta f := \widehat{f} \circ \theta$, где $\theta$ — *автоморфизм* (= *изоморфизм на себя*) $\mathbb{R}^N$. Особенно часто используют функции: $\theta(x) := {}_\sim(x) := -x$, $\theta(x) := {}_{2\pi}(x) := 2\pi x$ и $\theta(x) := {}_{-2\pi}(x) := -2\pi x$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. Иными словами, преобразование Фурье вводят одной из следующих формул:

$$\mathscr{F}_\sim f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(x,t)}\, dx,$$

$$\mathscr{F}_{2\pi} f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{2\pi i(x,t)}\, dx,$$

$$\mathscr{F}_{-2\pi} f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2\pi i(x,t)}\, dx.$$

Поскольку группы характеров изоморфных групп изоморфны, есть основания, допуская вольность, применять единое обозначение $\widehat{f}$ для, вообще говоря, различных функций $\mathscr{F} f$, $\mathscr{F}_{\sim} f$, $\mathscr{F}_{\pm 2\pi} f$. Выбор символа $\widehat{\ }$ для $\mathscr{F}_{2\pi}$ (или $\mathscr{F}_{-2\pi}$) диктует подходящее обозначение для $\mathscr{F}_{-2\pi}$ (соответственно, для $\mathscr{F}_{2\pi}$) (ср. 10.11.12).

**10.11.5.** Примеры.

**(1)** Пусть $f(x) = 1$ при $-1 \le x \le 1$ и $f(x) = 0$ для иных $x \in \mathbb{R}$. При этом $\widehat{f}(t) = 2t^{-1} \sin t$. Отметим, что при $k\pi \ge t_0 > 0$ будет

$$\int\limits_{[t_0,+\infty)} |\widehat{f}(t)|\, dt \ge \int\limits_{[k\pi,+\infty)} |\widehat{f}(t)|\, dt = \sum_{n=k}^{\infty} \int\limits_{[n\pi,(n+1)\pi]} |\widehat{f}(t)|\, dt \ge$$
$$\ge \sum_{n=k}^{\infty} \int\limits_{[n\pi,(n+1)\pi]} \frac{2|\sin t|}{(n+1)\pi}\, dt = 4 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} = +\infty.$$

Таким образом, $\widehat{f} \notin L_1(\mathbb{R})$.

**(2)** *Для $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ функция $\widehat{f}$ непрерывна, причем выполнено неравенство $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$.*

$\lhd$ Непрерывность обеспечена теоремой Лебега о предельном переходе, а ограниченность — очевидной оценкой

$$|\widehat{f}(t)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 \quad (t \in \mathbb{R}^N). \ \rhd$$

**(3)** *Для $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ при $|t| \to +\infty$ будет $|\widehat{f}(t)| \to 0$ (= теорема Римана — Лебега).*

$\lhd$ Требуемое очевидно для финитных ступенчатых функций. Остается сослаться на 5.5.9 (6) и то, что $\mathscr{F} \in B(L_1(\mathbb{R}^N),\ l_\infty(\mathbb{R}^N))$. $\rhd$

**(4)** *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$ *и* $f_\varepsilon(x) := f(\varepsilon x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. *Тогда* $\widehat{f}_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-N}\widehat{f}\,({}^t/_\varepsilon)$ $(t \in \mathbb{R}^N)$.

$$\triangleleft \ \ \widehat{f}_\varepsilon(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon x)e_t(x)\,dx = \varepsilon^{-N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon x)e_{t/\varepsilon}(\varepsilon x)\,d\varepsilon x =$$

$$= \varepsilon^{-N}\widehat{f}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \ \triangleright$$

**(5)** $\mathscr{F}(f^*) = (\mathscr{F}_\sim f)^*$, $(\tau_x f)\widehat{\ } = e_x\widehat{f}$, $(e_x f)\widehat{\ } = \tau_x\widehat{f}$.
$(f \in L_1(\mathbb{R}^N),\ x \in \mathbb{R}^N.)$

$\triangleleft$ Проверим только первое равенство. Поскольку $a^*b = (ab^*)^*$ для $a,\ b \in \mathbb{C}$, то, привлекая нужные свойства сопряжения и интеграла, для $t \in \mathbb{R}^N$ выводим

$$\mathscr{F}(f^*)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{i(x,t)}\,dx = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\big(e^{i(x,t)}\big)^*\,dx\right)^* =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-i(x,t)}\,dx\right)^* = (\mathscr{F}_\sim f)^*(t). \ \triangleright$$

**(6)** *Для* $f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N)$ *выполнено*

$$(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f}\,\widehat{g};\ \int\limits_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}g = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f\widehat{g}.$$

$\triangleleft$ Первое равенство очевидно в связи с 10.11.1. Второе — «*формула умножения*» — обеспечено следующим применением теоремы Фубини:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}g = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e_t(x)\,dxg(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(t)e_t(x)\,dt\right)f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f\widehat{g}. \ \triangleright$$

**(7)** *Если* $\widehat{f},\ f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, то $(\widehat{f}g)\widehat{\ } = f^{\sim} * \widehat{g}$.

$\lhd$ При $x \in \mathbb{R}^N$ имеем

$$
\begin{gathered}
(\widehat{f}g)\widehat{\ }(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(t)\widehat{f}(t)e_t(x)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(t)f(y)e_t(y)e_t(x)\,dydt = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y)g(t)e_t(x+y)\,dtdy = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y)\widehat{g}(x+y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y-x)\widehat{g}(y)\,dy = f^{\sim} * g(x). \ \rhd
\end{gathered}
$$

**(8)** *Для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ и $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$ выполнено*

$$
\begin{gathered}
\mathscr{F}(\partial^\alpha f) = i^{|\alpha|}t^\alpha \mathscr{F} f, \quad \partial^\alpha(\mathscr{F} f) = i^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha f); \\
\mathscr{F}_{2\pi}(\partial^\alpha f) = (2\pi i)^{|\alpha|}t^\alpha \mathscr{F}_{2\pi} f, \quad \partial^\alpha(\mathscr{F}_{2\pi} f) = (2\pi i)^{|\alpha|}\mathscr{F}_{2\pi}(x^\alpha f)
\end{gathered}
$$

(эти равенства используют широко распространенную вольность в обозначениях $x^\alpha := t^\alpha := (\cdot)^\alpha : y \in \mathbb{R}^N \mapsto y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_N^{\alpha_N}$).

$\lhd$ Достаточно (ср. 10.11.4) установить формулы из первой строки. Поскольку $\partial^\alpha e_t = i^{|\alpha|}t^\alpha e_t$, то

$$
\begin{gathered}
\mathscr{F}(\partial^\alpha f)(t) = \big(e_t * \partial^\alpha f\big)(0) = \\
= \big(\partial^\alpha e_t * f\big)(0) = i^{|\alpha|}t^\alpha(e_t * f)(0) = i^{|\alpha|}t^\alpha \widehat{f}(t).
\end{gathered}
$$

Аналогично, дифференцируя под знаком интеграла, выводим

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t_1}(\mathscr{F} f)(t) = \frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{i(x,t)}\,dx = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)ix_1e^{i(x,t)}\,dx = \mathscr{F}(ix_1 f)(t). \ \rhd
\end{gathered}
$$

**(9)** *Если $f_N(x) := \exp\left(-1/2\,|x|^2\right)$ при $x \in \mathbb{R}^N$, то выполнено $\widehat{f}_N = (2\pi)^{N/2}f_N$.*

$\lhd$ Ясно, что

$$\widehat{f}_N(t) = \prod_{k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it_k x_k} e^{-\frac{1}{2}|x|_k^2}\, dx_k \quad (t \in \mathbb{R}^N).$$

Следовательно, дело сводится к случаю $N = 1$. При этом для $y \in \mathbb{R}$ имеем

$$\widehat{f}_1(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{ixy}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^2 - \frac{1}{2}(y^2)}\, dx =$$

$$= f_1(y) \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^2}\, dx.$$

Для вычисления интересующего интеграла $A$ рассмотрим в $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$ (одинаково ориентированные) параллельные вещественной оси прямые $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Применяя классическую теорему Коши к голоморфной функции $f(z) := \exp\left(-z^2/2\right)$ $(z \in \mathbb{C})$ и прямоугольникам с вершинами на $\lambda_1$ и $\lambda_2$ и производя подходящий предельный переход, заключаем: $\int_{\lambda_1} f(z)\, dz = \int_{\lambda_2} f(z)\, dz$. Отсюда выводим:

$$A = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^2}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2)}\, dx = \sqrt{2\pi}. \ \rhd$$

**10.11.6.** Определение. ***Пространством Шварца*** принято называть множество ***быстро убывающих*** (иногда говорят ***умеренных***, ср. 10.11.17 (2)) ***функций***

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N) :=$$

$$:= \left\{ f \in C_\infty(\mathbb{R}^N) :\ (\forall \alpha, \beta\ \in (\mathbb{Z}_+)^N)\ |x| \to +\infty \Rightarrow x^\alpha \partial^\beta f(x) \to 0 \right\}$$

(рассматриваемое как элемент решетки функций из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{C}$) с мультинормой $\{p_{\alpha,\beta} :\ \alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^N\}$, где $p_{\alpha,\beta}(f) := \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty$ (ср. с примером 5.1.10 (6)).

**10.11.7.** *Справедливы утверждения:*

**(1)** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ — *пространство Фреше;*

**(2)** *операторы умножения на многочлен и дифференцирования — непрерывные эндоморфизмы* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$;

**(3)** *топологию* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ *задает следующая (эквивалентная исходной) мультинорма* $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, *где*

$$p_n(f) := \sum_{|\alpha| \le n} \|(1 + |\cdot|^2)^n \partial^\alpha f\|_\infty \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

*(как всегда,* $|x|$ *— евклидова длина вектора* $x \in \mathbb{R}^N$*);*

**(4)** *пространство* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ *плотно в* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$*; помимо этого, вложение* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ *в* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ *непрерывно и* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)' \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$*;*

**(5)** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \subset L_1(\mathbb{R}^N)$.

$\triangleleft$ Установим (4), ибо прочие утверждения проще.

Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и $\psi$ — срезыватель из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ такой, что $\mathbb{B} \subset \{\psi = 1\}$. Для $x \in \mathbb{R}^N$ и $\xi > 0$ положим

$$\psi_\xi(x) := \psi(\xi x), \quad f_\xi = \psi_\xi f.$$

Очевидно, $f_\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\alpha,\ \beta \in (\mathbb{Z}_+)^N$. Видно, что при $0 < \xi \le 1$ выполнено $\sup\{\|\partial^\gamma(\psi_\xi - 1)\|_\infty :\ \gamma \le \beta,\ \gamma \in (\mathbb{Z}_+)^N\} < +\infty$. Учитывая, что $x^\alpha \partial^\beta f(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$, найдем $r > 1$ такое, что $|x^\alpha \partial^\beta((\psi_\xi(x) - 1)f(x))| < \varepsilon$, как только $|x| > r$. Кроме того, $f_\xi(x) - f(x) = (\psi(\xi x) - 1)f(x) = 0$ при $|x| \le \xi^{-1}$. Таким образом, при $\xi \le r^{-1}$ будет

$$p_{\alpha,\beta}(f_\xi - f) = \sup_{|x| > \xi^{-1}} |x^\alpha \partial^\beta((\psi_\xi(x) - 1)f(x))| \le$$
$$\le \sup_{|x| > r} |x^\alpha \partial^\beta((\psi_\xi(x) - 1)f(x))| < \varepsilon.$$

Стало быть, $p_{\alpha,\beta}(f_\xi - f) \to 0$ при $\xi \to 0$, т. е. $f_\xi \to f$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. Требуемая непрерывность вложения бесспорна. $\triangleright$

**10.11.8.** *Преобразование Фурье — непрерывный эндоморфизм* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.

$\triangleleft$ Для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ в силу 10.11.5 (8), 10.11.5 (2) и неравенства Гёльдера 5.5.9 (4)

$$\|t^\alpha \widehat{f}\|_\infty = \|(\partial^\alpha f)^\wedge\|_\infty \le \|\partial^\alpha f\|_1 \le K\|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

Стало быть,

$$\|t^\alpha \partial^\beta \widehat{f}\|_\infty = \|t^\alpha (x^\beta f)^\wedge\|_\infty \le K'\|\partial^\alpha (x^\beta f)\|_\infty.$$

Отсюда видно, что $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и сужение $\mathscr{F}$ на $\mathscr{D}(Q)$ при $Q \Subset \mathbb{R}^N$ непрерывно. Остается сослаться на 10.10.7 (4) и 10.11.7 (4). $\triangleright$

**10.11.9. Теорема.** *Повторное преобразование Фурье, рассматриваемое в пространстве Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, пропорционально отражению.*

$\triangleleft$ Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и $g(x) := f_N(x) = \exp\left(-1/2\,|x|^2\right)$. С учетом 10.11.8 и 10.11.7 видим, что $\widehat{f},\ f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N)$ и, стало быть, на основании 10.11.5 (7), $(\widehat{f}g)\widehat{\ } = f^{\sim} * \widehat{g}$. Положим $g_\varepsilon(x) := g(\varepsilon x)$ для $x \in \mathbb{R}^N$ и $\varepsilon > 0$. Тогда при тех же $x$ из-за 10.11.5 (4)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(\varepsilon t)\widehat{f}(t)e_t(x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y-x)\widehat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon y - x)\widehat{g}(y)\,dy.$$

Используя 10.11.5 (9) и привлекая теорему Лебега о предельном переходе при $\varepsilon \to 0$, получаем:

$$g(0)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(t)e_t(x)\,dt = f(-x)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\widehat{g}(y)\,dy =$$

$$= (2\pi)^{\frac{N}{2}} f(x)\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\,dx = (2\pi)^N f(-x).$$

Окончательно $\mathscr{F}^2 f = (2\pi)^N f^{\sim}$. $\triangleright$

**10.11.10. Следствие.** *$\mathscr{F}_{2\pi}^2$ — отражение и $(\mathscr{F}_{2\pi})^{-1} = \mathscr{F}_{-2\pi}$.*

$\triangleleft$ Для $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и $t \in \mathbb{R}^N$ имеем

$$f(-t) = (2\pi)^N\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,t)}\widehat{f}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i(x,t)}\widehat{f}(2\pi x)\,dx =$$

$$= (\mathscr{F}_{2\pi}(\mathscr{F}_{2\pi}f))(t).$$

Учитывая, что $\mathscr{F}_{2\pi}f^{\sim} = \mathscr{F}_{-2\pi}f$, получаем требуемое. $\triangleright$

**10.11.11. Следствие.** *$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ — свёрточная алгебра (= алгебра относительно свёртки).*

$\triangleleft$ Для $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ произведение $fg$ — элемент $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и, стало быть, $\widehat{f}\,\widehat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. С учетом 10.11.5 (6) видим, что $\mathscr{F}_{2\pi}(f * g) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и, значит, на основании 10.11.10, $f * g = \mathscr{F}_{-2\pi}(\mathscr{F}_{2\pi}(f * g)) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. $\triangleright$

**10.11.12. Теорема обращения.** *Преобразование Фурье* $\mathfrak{F} := \mathscr{F}_{2\pi}$ *служит топологическим автоморфизмом пространства Шварца* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. *При этом свёртка переходит в произведение. Обратное преобразование* $\mathfrak{F}^{-1}$ *совпадает с* $\mathscr{F}_{-2\pi}$ *и переводит произведение в свёртку. Кроме того, имеет место равенство Парсеваля*:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f\,g^* = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}\,\widehat{g}^* \quad (f,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

$\lhd$ В связи с 10.11.10 и 10.11.5 (5) нуждаются в проверке лишь искомые равенства. При этом, на основании 10.11.5 (7) и 10.11.7 (4), $(\widehat{fg})(0) = (\widetilde{f} * \widehat{g})(0)$ для рассматриваемых $f$ и $g$. Привлекая установленное в 10.11.5 (5), заключаем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} fg^* = (\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}f)g^*)\widehat{\ }(0) = ((\mathfrak{F}^{-1}f)\widetilde{\ } * \mathfrak{F}g^*)(0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{F}f(\mathfrak{F}g^*)\widetilde{\ }dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{F}_f\mathfrak{F}_\sim(g^*)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{F}f(\mathfrak{F}g)^*. \ \rhd$$

**10.11.13.** Замечание. В связи с *теоремой* 10.11.9 *о повторном преобразовании Фурье*, иногда наряду с $\mathfrak{F}$ рассматривают следующие взаимнообратные операторы:

$$\overline{\mathfrak{F}}f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{i(x,t)}\,dx;$$

$$\overline{\mathfrak{F}}^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(t)e^{-i(x,t)}\,dt.$$

При этом имеет место аналог 10.11.12 при условии переопределения свёртки $f \mathbin{\overline{*}} g := (2\pi)^{-N/2} f * g \quad (f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N))$. Удобства $\overline{\mathfrak{F}}$ и $\overline{\mathfrak{F}}^{-1}$ связаны с небольшими упрощениями формул 10.11.5 (8). В случае $\mathfrak{F}$ аналогичную цель достигают введением для $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$ следующего дифференциального оператора: $D^\alpha := (2\pi i)^{-|\alpha|}\partial^\alpha$.

**10.11.14. Теорема Планшереля.** *Продолжение преобразования Фурье в* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ *до изометрического автоморфизма пространства* $L_2(\mathbb{R}^N)$ *существует, и притом единственно.*

$\lhd$ Обеспечено 10.11.12, 4.5.10 и плотностью $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ в $L_2(\mathbb{R}^N)$. $\rhd$

**10.11.15.** Замечание. За продолжением, гарантированным теоремой 10.11.14, сохраняют прежние название и обозначения. Реже (при желании подчеркнуть различия и тонкости) говорят о *преобразовании Фурье — Планшереля* или же об *$L_2$-преобразовании Фурье* и уточняют понимание интегральных формул для $\mathfrak{F}f$ и $\mathfrak{F}^{-1}f$ при $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ как результатов подходящего предельного перехода в $L_2(\mathbb{R}^N)$.

**10.11.16.** Определение. Пусть $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N) := \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)'$. Наименование $u$ — *медленно растущее распределение* (варианты: *обобщенная функция умеренного роста*, *умеренное распределение* и т. п.). Пространство $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, составленное из всех умеренных обобщенных функций, наделяют слабой топологией $\sigma(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N), \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$ и иногда называют *пространством Шварца* (как и $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$).

**10.11.17.** Примеры.

**(1)** *$L_p(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ при $1 \le p \le +\infty$.*

$\lhd$ Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, $p < +\infty$ и $1/q + 1/p = 1$. С помощью неравенства Гёльдера 5.5.9 (4) для подходящих $K$, $K'$, $K'' > 0$ последовательно выводим:

$$\|\psi\|_q \le$$

$$\le \left( \int\limits_{\mathbb{B}} |\psi|^p \right)^{1/p} + \left( \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{B}} \left|(1+|x|^2)^N (1+|x|^2)^{-N} \psi(x)\right|^p \, dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le K' \|\psi\|_\infty + \|(1+|\cdot|^2)^N \psi\|_\infty \left( \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{B}} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{Np}} \right)^{1/p} \le$$

$$\le K'' p_1(\psi).$$

Вновь привлекая неравенство Гёльдера, имеем

$$|u_f(\psi)| = |\langle \psi \mid f \rangle| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} f\psi \; q \right| \le \|f\|_p \, \|\psi\|_q \le K p_1(\psi).$$

Случай $p = +\infty$ не вызывает сомнений. $\rhd$

**(2)** *$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ плотно в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$.*

$\lhd$ Следует из 10.11.7 (4), 10.11.17 (1), 10.11.7 (5) и 10.10.9 (4). $\rhd$

**(3)** Пусть $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^N)$ — *мера Радона умеренного роста*, т. е. такая, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{d|\mu|(x)}{(1+|x|^2)^n} < +\infty.$$

Мера $\mu$ — это, бесспорно, умеренное распределение.

**(4)** Если $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$, то $fu \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ и $\partial^\alpha u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ в силу 10.11.7 (2). По похожим причинам, полагая $D^\alpha u(f) := (-1)^{|\alpha|} u D^\alpha f$ при $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, видим, что $D^\alpha u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ и $D^\alpha u = (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha u$.

**(5)** *Каждое распределение с компактным носителем умеренно.*

$\lhd$ Такое $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ в соответствии с 10.10.5 (7) можно отождествить с элементом $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^N)$. Поскольку топология в пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ сильнее индуцированной вложением в $C_\infty(\mathbb{R}^N)$, заключаем: $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$. $\rhd$

**(6)** Пусть $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$. Если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, то $u$ сворачиваемо с $f$, причем $u * f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. Можно проверить, что $u$ сворачиваемо также и с любым распределением $v$ из $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^N)$, причем $u * v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$.

**(7)** Пусть $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ и $\tau_x u := (\tau_{-x})' u = u \circ \tau_{-x}$ — соответствующий *сдвиг* $u$. Распределение $u$ называют *периодическим* (с периодом $x$), если $\tau_x u = u$. Периодические распределения имеют умеренный рост. Периодичность сохраняется при дифференцировании и свёртывании.

**(8)** Если $u_n \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ ($u \in \mathbb{N}$) и для каждого $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ имеется сумма $u(f) := \sum_{n=1}^\infty u_n(f)$, то $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ и при этом $\partial^\alpha u = \sum_{n=1}^\infty \partial^\alpha u_n$ (ср. 10.10.10).

**10.11.18. Теорема.** *Любое умеренное распределение — сумма производных умеренных мер.*

$\lhd$ Пусть $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$. С учетом 10.11.7 (3) и 5.3.7 для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $K > 0$ имеем

$$|u(f)| \le K \sum_{|\alpha| \le n} \left\| (1 + |\cdot|^2)^n \partial^\alpha f \right\|_\infty \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

Привлекая 3.5.3 и 3.5.7, для некоторых $\mu_\alpha \in M(\mathbb{R}^N)$ получаем

$$u(f) = \sum_{|\alpha| \le n} \mu_\alpha \left((1 + |\cdot|^2)^n \partial^\alpha f\right) \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

Пусть $\nu_\alpha := (-1)^{|\alpha|}(1+|\cdot|^2)^n \mu_\alpha$. Тогда $\nu_\alpha$ — умеренная мера, причем

$$u = \sum_{|\alpha| \le n} \partial^\alpha \nu_\alpha. \ \triangleright$$

**10.11.19.** Определение. *Преобразованием Фурье* (или, полнее, *Фурье — Шварца*) умеренного распределения $u$ из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ называют распределение $\mathfrak{F}u$, действующее по правилу

$$\langle f \mid \mathfrak{F}u \rangle = \langle \mathfrak{F}f \mid u \rangle \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

**10.11.20. *Теорема.*** *Преобразование Фурье — Шварца $\mathfrak{F}$ — это единственное продолжение преобразования Фурье в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ до топологического автоморфизма $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$. Обратное отображение $\mathfrak{F}^{-1}$ — единственное непрерывное продолжение обратного преобразования Фурье в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.*

$\triangleleft$ Преобразование Фурье — Шварца представляет собой сопряженный оператор к преобразованию Фурье в пространстве Шварца. Остается только апеллировать к 10.11.7 (5), 10.11.12, 10.11.17 (2) и 4.5.10. $\triangleright$

## Упражнения

**10.1.** Привести примеры линейных топологических пространств и локально выпуклых пространств и конструкций, приводящих к ним.

**10.2.** Доказать, что хаусдорфово топологическое векторное пространство конечномерно в том и только в том случае, если оно локально компактно.

**10.3.** Охарактеризовать слабо непрерывные сублинейные функционалы.

**10.4.** Доказать, что нормируемость или метризуемость слабой топологии локально выпуклого пространства равносильна его конечномерности.

**10.5.** Выяснить смысл слабой сходимости в классических банаховых пространствах.

**10.6.** Доказать, что нормированное пространство конечномерно в том и только в том случае, если слабо замкнута единичная сфера (= сильная граница единичного шара).