10.1.9. *Для каждой векторной топологии τ на X существует, и притом единственная, равномерность $\mathscr{U}_\tau$, имеющая базис из I_X-устойчивых множеств и такая, что $\tau = \tau(\mathscr{U}_\tau)$.*

◁ Для $U \in \tau(0)$ положим $V_U := \{(x,\ y) \in X^2 :\ \ y - x \in U\}$. Отметим очевидные свойства:

$$I_X \subset V_U; \quad V_U + I_X = V_U; \quad (V_U)^{-1} = V_{-U};$$
$$V_{U_1 \cap U_2} \subset V_{U_1} \cap V_{U_2}; \quad V_{U_1} \circ V_{U_2} \subset V_{U_1 + U_2}$$

для любых U, U_1, $U_2 \in \tau(0)$. Привлекая 10.1.4, выводим, что

$$\mathscr{U}_\tau := \mathrm{fil}\,\{V_U :\ U \in \tau(0)\}$$

— это равномерность, причем $\tau = \tau(\mathscr{U}_\tau)$. Несомненно также, что $\mathscr{U}_\tau$ имеет базис из I_X-устойчивых множеств.

Если теперь $\mathscr{U}$ еще одна равномерность такая, что $\tau(\mathscr{U}) = \tau$, и W — некоторое I_X-устойчивое окружение $\mathscr{U}$, то $W = V_{W(0)}$. Отсюда и вытекает требуемая единственность. ▷

10.1.10. Определение. Пусть $(X,\ \tau)$ — топологическое векторное пространство. Равномерность $\mathscr{U}_\tau$, построенную в 10.1.9, называют ***равномерностью рассматриваемого пространства*** X.

10.1.11. Замечание. В дальнейшем при рассмотрении топологических векторных пространств будем считать их наделенными соответствующими равномерностями.

10.2. Локально выпуклые топологии

10.2.1. Определение. Векторную топологию принято называть ***локально выпуклой***, если фильтр окрестностей каждой точки имеет базис, состоящий из выпуклых множеств.

10.2.2. ***Теорема о строении локально выпуклой топологии.*** *Пусть X — векторное пространство и $\mathscr{N}$ — фильтр в X. Существует локально выпуклая топология τ на X такая, что $\mathscr{N} = \tau(0)$, в том и только в том случае, если*

(1) $\frac{1}{2}\mathscr{N} = \mathscr{N}$;

(2) *$\mathscr{N}$ имеет базис, состоящий из абсолютно выпуклых поглощающих множеств.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: В силу 10.1.2 отображение $x \mapsto 2x$ — гомеоморфизм. Это и означает, что $1/2\,\mathscr{N} = \mathscr{N}$. Возьмем теперь $U \in \mathscr{N}$. По условию имеется выпуклое множество $V \in \mathscr{N}$ такое, что $V \subset U$. Применяя 10.1.4, найдем уравновешенное множество W, для которого $W \subset V$. Привлекая формулу Моцкина 3.1.13 и 3.1.14, убеждаемся в том, что выпуклая оболочка $\mathrm{co}(W)$ абсолютно выпукла. При этом $W \subset \mathrm{co}(W) \subset V \subset U$.

$\Leftarrow$: Абсолютно выпуклое множество уравновешено. Значит, $\mathscr{N}$ удовлетворяет 10.1.4 (2), 10.1.4 (3). Если $V \in \mathscr{N}$ и W выпукло, $W \in \mathscr{N}$ и $W \subset V$, то $1/2\,W \in \mathscr{N}$. Помимо этого, $1/2\,W + 1/2\,W \subset W \subset V$ из-за выпуклости W. Последнее означает, что $\mathscr{N} + \mathscr{N} = \mathscr{N}$. Остается сослаться на 10.1.4. $\rhd$

10.2.3. Следствие. *Множество* $\mathrm{LCT}\,(X)$ *всех локально выпуклых топологий на* X *представляет собой полную решетку. При этом для любого множества* $\mathscr{E}$ *в* $\mathrm{LCT}\,(X)$ *выполнено*

$$\sup\nolimits_{\mathrm{LCT}\,(X)} \mathscr{E} = \sup\nolimits_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}. \quad \lhd\rhd$$

10.2.4. Следствие. *Прообраз локально выпуклой топологии при линейном отображении — локально выпуклая топология.* $\lhd\rhd$

10.2.5. Следствие. *Произведение локально выпуклых топологий — локально выпуклая топология.* $\lhd\rhd$

10.2.6. *Топология мультинормированного пространства является локально выпуклой.* $\lhd\rhd$

10.2.7. Определение. Пусть τ — локально выпуклая топология на X. Множество всех всюду определенных непрерывных полунорм на X называют *зеркалом* (реже *спектром*) топологии τ и обозначают $\mathfrak{M}_\tau$. Мультинормированное пространство $(X,\ \mathfrak{M}_\tau)$ называют *ассоциированным* с $(X,\ \tau)$.

10.2.8. Теорема. *Локально выпуклая топология совпадает с топологией ассоциированного мультинормированного пространства.*

$\lhd$ Пусть τ — рассматриваемая локально выпуклая топология в X и $\omega := \tau(\mathfrak{M}_\tau)$ — топология ассоциированного пространства $(X,\ \mathfrak{M}_\tau)$. Возьмем $V \in \tau(0)$. В силу 10.2.2 найдется абсолютно выпуклая окрестность нуля $B \in \tau(0)$ такая, что $B \subset V$. На основании 3.8.7

$$\{p_B < 1\} \subset B \subset \{p_B \le 1\}.$$

Очевидно, что p_B — непрерывный функционал (ср. 7.5.1), т. е. $p_B \in \mathfrak{M}_\tau$ и, стало быть, $\{p_B < 1\} \in \omega(0)$. Следовательно, $V \in \omega(0)$. Таким образом, привлекая 5.2.10, имеем $\omega(x) = x + \omega(0) \supset x + \tau(0) = \tau(x)$, т. е. $\omega \geq \tau$. Помимо этого, $\tau \geq \omega$ по определению. $\triangleright$

10.2.9. Определение. Векторное пространство, наделенное отделимой локально выпуклой топологией, называют ***локально выпуклым пространством.***

10.2.10. Замечание. Теорему 10.2.8 в несколько суженном виде часто формулируют словами: «понятие локально выпуклого пространства и понятие отделимого мультинормированного пространства равнообъемны».

В этой связи при изучении локально выпуклых пространств используют по мере надобности терминологию, связанную с ассоциативным мультинормированным пространством (ср. 5.2.13).

10.2.11. Определение. Пусть τ — локально выпуклая топология в X. Символом $(X,\ \tau)'$ (или, короче, X') обозначают подпространство $X^{\#}$, состоящее из непрерывных линейных функционалов. Пространство $(X,\ \tau)'$ называют ***сопряженным*** (или ***τ-сопряженным***) к $(X,\ \tau)$.

10.2.12. $(X,\ \tau)' = \cup\{|\partial|(p) :\ p \in \mathfrak{M}_\tau\}$. $\triangleleft\triangleright$

10.2.13. *Теорема.* *Отображение штрихования $\tau \mapsto (X,\ \tau)'$, действующее из* $\mathrm{LCT}\,(X)$ *в* $\mathrm{Lat}(X^{\#})$, *сохраняет точные верхние границы, т. е. для любого множества $\mathscr{E}$ в* $\mathrm{LCT}\,(X)$ *выполнено*

$$(X,\ \sup \mathscr{E})' = \sup\{(X,\ \tau)' :\ \tau \in \mathscr{E}\}.$$

$\triangleleft$ Если $\mathscr{E} = \varnothing$, то $\sup \mathscr{E}$ — это тривиальная топология τ_0 в X и, стало быть, $(X,\ \tau_0)' = 0 = \inf \mathrm{Lat}(X^{\#}) = \sup_{\mathrm{Lat}(X^{\#})} \varnothing$. В силу 9.2.7 отображение штрихования возрастает. Учитывая 2.1.5, для непустого $\mathscr{E}$ имеем

$$(X,\ \sup \mathscr{E})' \geq \sup\{(X,\ \tau)' :\ \tau \in \mathscr{E}\}.$$

Если $f \in (X,\ \sup \mathscr{E})'$, то ввиду 10.2.12 и 9.1.13 существуют топологии $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathscr{E}$ такие, что $f \in (X,\ \tau_1 \vee \dots \vee \tau_n)'$. С помощью 10.2.12 и 5.3.7 найдем $p_1 \in \mathfrak{M}_{\tau_1}, \dots, p_n \in \mathfrak{M}_{\tau_n}$, для которых $f \in |\partial|(p_1 \vee \dots \vee p_n)$. Привлекая 3.5.7 и 3.7.9, убеждаемся, что $|\partial|(p_1 + \dots + p_n) = |\partial|(p_1) + \dots + |\partial|(p_n)$. Окончательно

$$f \in (X,\ \tau_1)' + \dots + (X,\ \tau_n)' = (X,\ \tau_1)' \vee \dots \vee (X,\ \tau_n)'. \ \triangleright$$