10.3. Двойственность векторных пространств

10.3.1. Определение. Пусть X, Y — векторные пространства над одним и тем же основным полем $\mathbb{F}$. Пусть, далее, задана *билинейная форма* (или, как иногда говорят, *бракетирование*) $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ из $X \times Y$ в $\mathbb{F}$, т. е. отображение, линейное по каждому переменному. Для $x \in X$ и $y \in Y$ положим

$$\langle x| : y \mapsto \langle x\,|\,y\rangle, \quad \langle\,\cdot\,| : X \to \mathbb{F}^Y, \quad \langle X| \subset Y^{\#};$$
$$|y\rangle : x \mapsto \langle x\,|\,y\rangle, \quad |\,\cdot\,\rangle : Y \to \mathbb{F}^X, \quad |Y\rangle \subset X^{\#}.$$

Возникающие отображения $\langle\cdot\,|$ и $|\,\cdot\rangle$ называют соответственно *бра-отображением* и *кет-отображением*. Аналогично функционалы из $\langle X\,|$ называют *бра-функционалами*, а из $|\,Y\rangle$ — *кет-функционалами*.

10.3.2. *Бра-отображение и кет-отображение — линейные операторы.* $\triangleleft\triangleright$

10.3.3. Определение. Бракетирование X и Y называют *двойственностью*, если бра-отображение и кет-отображение суть мономорфизмы. В этом случае говорят, что X и Y приведены в двойственность, или составляют двойственную пару, или что Y двойственно к X и т. п., и пишут $X \leftrightarrow Y$. Бра-отображение и кет-отображение называют в этой ситуации *дуализациями*.

10.3.4. Примеры.

(1) Пусть $X \leftrightarrow Y$ и $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ — соответствующая двойственность. Для $(y,\ x) \in Y \times X$ положим $\langle y\,|\,x\rangle := \langle x\,|\,y\rangle$. Видно, что возникшее бракетирование — это двойственность Y и X. При этом дуализации в исходной и во вновь возникшей двойственностях одни и те же. В этой связи указанные двойственности, как правило, не различают (ср. 10.3.3). Таким образом, можно сказать, что Y двойственно к X в том и только в том случае, если X двойственно к Y. Отметим здесь же, что отображение $\langle x\,|\,y\rangle_{\mathbb{R}} := \mathrm{Re}\langle x\,|\,y\rangle$ приводит в двойственность вещественные основы $X_{\mathbb{R}}$ и $Y_{\mathbb{R}}$. Допуская вольность, для обозначения возникающей двойственности $X_{\mathbb{R}} \leftrightarrow Y_{\mathbb{R}}$ изредка используют прежнее обозначение, т. е. полагают $\langle x\,|\,y\rangle := \langle x\,|\,y\rangle_{\mathbb{R}}$, имея в виду, что x и y принадлежат вещественным основам рассматриваемых пространств.

(2) Пусть H — гильбертово пространство. Скалярное произведение приводит в двойственность H и H_*. Отображение штрихования при этом совпадает с кет-отображением.

(3) Пусть $(X,\ \tau)$ — локально выпуклое пространство и X' — сопряженное пространство. Бракетирование $(x,\ x') \mapsto x'(x)$ приводит X и X' в двойственность.

(4) Пусть X — векторное пространство и, как обычно, $X^{\#} := \mathscr{L}(X,\ \mathbb{F})$ — сопряженное пространство. Ясно, что отображение $(x,\ x^{\#}) \mapsto x^{\#}(x)$ приводит эти пространства в двойственность.

10.3.5. Определение. Пусть $X \leftrightarrow Y$. Прообраз в X тихоновской топологии в $\mathbb{F}^Y$ при бра-отображении называют *бра-топологией* или *слабой топологией в* X, наведенной двойственностью с Y, и обозначают $\sigma(X,\ Y)$. Бра-топологию $\sigma(X,\ Y)$ для двойственности $Y \leftrightarrow X$ называют *кет-топологией* для двойственности $X \leftrightarrow Y$ или *слабой топологией в* Y, наведенной двойственностью с X.

10.3.6. *Бра-топология — это слабейшая топология, в которой непрерывны все кет-функционалы. Кет-топология — это слабейшая топология, в которой непрерывны все бра-функционалы.*

$\triangleleft$ $x_\gamma \to x$ (в $\sigma(X,\ Y)$) $\Leftrightarrow \langle x_\gamma \to \langle x\,|$ (в $\mathbb{F}^Y$) $\Leftrightarrow (\forall\, y \in Y)\ \langle x_\gamma\,|(y) \to \langle x\,|(y) \Leftrightarrow (\forall\, y \in Y)\ \langle x_\gamma\,|\,y\rangle \to \langle x\,|\,y\rangle \Leftrightarrow (\forall\, y \in Y)\ |\,y\rangle(x_\gamma) \to |\,y\rangle(x) \Leftrightarrow (\forall\, y \in Y)\ x_\gamma \to x$ (в $|\,y\rangle^{-1}(\tau_{\mathbb{F}})$) $\triangleright$

10.3.7. Замечание. Обозначение $\sigma(X,\ Y)$, как видно, согласовано с обозначением слабой мультинормы 5.1.10 (4). Именно $\sigma(X,\ Y)$ есть топология мультинормы $\{|\langle\cdot\,|\,y\rangle| :\ y \in Y\}$. Аналогично $\sigma(Y,\ X)$ есть топология мультинормы $\{|\langle x\,|\,\cdot\rangle| :\ x \in X\}$. $\triangleleft\triangleright$

10.3.8. *Пространства $(X,\ \sigma(X,\ Y))$ и $(Y,\ \sigma(Y,\ X))$ локально выпуклы.*

$\triangleleft$ Следует из 10.2.4 и 10.2.5. $\triangleright$

10.3.9. ***Теорема о дуализациях.*** *Дуализации суть изоморфизмы двойственных пространств на соответствующие слабо сопряженные пространства.*

$\triangleleft$ Пусть $X \leftrightarrow Y$. Нужно установить точность последовательностей

$$0 \to X \xrightarrow{\langle\cdot|} (Y,\ \sigma(Y,\ X))' \to 0,$$

$$0 \to Y \xrightarrow{|\cdot\rangle} (X,\ \sigma(X,\ Y))' \to 0.$$

Поскольку кет-отображение для двойственности $X \leftrightarrow Y$ есть бра-отображение для двойственности $Y \leftrightarrow X$, достаточно проверить точность первой последовательности. Бра-отображение — мономорфизм по определению 10.3.3. Помимо этого, из 10.2.13 и 10.3.6 вытекает, что

$$(Y,\ \sigma(Y,\ X))' = (Y,\ \sup\{\langle x\,|^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}):\ x \in X\})' =$$
$$= \sup\{(Y,\ \langle x\,|^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))':\ x \in X\} =$$
$$= \mathscr{L}(\{(Y,\ f^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))':\ f \in \langle X|\}) = \langle X|,$$

так как по 5.3.7 и 2.3.12 выполнено

$$(Y,\ f^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))' = \{\lambda f:\ \lambda \in \mathbb{F}\} \quad (f \in Y^{\#}).\ \triangleright$$

10.3.10. Замечание. Теорему 10.3.9 часто называют «теоремой об общем виде слабо непрерывного функционала». В этом проявляется удобное общее правило — добавлять слово «слабо» при использовании объектов и свойств, связанных со слабыми топологиями. Отметим здесь же, что в силу 10.3.9 пример 10.3.4 (3) исчерпывает, по сути дела, все возможные двойственности. В этой связи в соответствии с 5.1.11 в дальнейшем (как и прежде) часто использовано обозначение $(x,\ y) := \langle x\,|\,y\rangle$, поскольку это не должно привести к недоразумениям. По тем же причинам не различают двойственное и слабо сопряженное пространства. Другими словами, при рассмотрении фиксированной двойственности $X \leftrightarrow Y$ иногда не отличают X от $(Y,\ \sigma(Y,\ X))'$, а Y от $(X,\ \sigma(X,\ Y))'$, что позволяет применять записи $X' = Y$ и $Y' = X$.

10.4. Топологии, согласованные с двойственностью

10.4.1. Определение. Пусть $X \leftrightarrow Y$ и τ — локально выпуклая топология в X. Говорят, что τ *согласована с двойственностью*, если $(X,\ \tau)' = |\,Y\rangle$. Говорят, что локально выпуклая топология ω в Y согласована с двойственностью ($X \leftrightarrow Y$, если ω согласована с двойственностью $Y \leftrightarrow X$, т. е.) при выполнении равенства $(Y,\ \omega)' = \langle X|$.

10.4.2. *Слабые топологии согласованы с наводящей их двойственностью.*

$\triangleleft$ Следует из 10.3.9. $\triangleright$