Поскольку кет-отображение для двойственности $X \leftrightarrow Y$ есть бра-отображение для двойственности $Y \leftrightarrow X$, достаточно проверить точность первой последовательности. Бра-отображение — мономорфизм по определению 10.3.3. Помимо этого, из 10.2.13 и 10.3.6 вытекает, что

$$(Y,\ \sigma(Y,\ X))' = (Y,\ \sup\{\langle x\,|^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}) :\ x \in X\})' =$$

$$= \sup\{(Y,\ \langle x\,|^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))' :\ x \in X\} =$$

$$= \mathscr{L}(\{(Y,\ f^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))' :\ f \in \langle X|\}) = \langle X|,$$

так как по 5.3.7 и 2.3.12 выполнено

$$(Y,\ f^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))' = \{\lambda f :\ \lambda \in \mathbb{F}\} \quad (f \in Y^{\#}).\ \rhd$$

10.3.10. Замечание. Теорему 10.3.9 часто называют «теоремой об общем виде слабо непрерывного функционала». В этом проявляется удобное общее правило — добавлять слово «слабо» при использовании объектов и свойств, связанных со слабыми топологиями. Отметим здесь же, что в силу 10.3.9 пример 10.3.4 (3) исчерпывает, по сути дела, все возможные двойственности. В этой связи в соответствии с 5.1.11 в дальнейшем (как и прежде) часто использовано обозначение $(x,\ y) := \langle x\,|\,y\rangle$, поскольку это не должно привести к недоразумениям. По тем же причинам не различают двойственное и слабо сопряженное пространства. Другими словами, при рассмотрении фиксированной двойственности $X \leftrightarrow Y$ иногда не отличают X от $(Y,\ \sigma(Y,\ X))'$, а Y от $(X,\ \sigma(X,\ Y))'$, что позволяет применять записи $X' = Y$ и $Y' = X$.

10.4. Топологии, согласованные с двойственностью

10.4.1. Определение. Пусть $X \leftrightarrow Y$ и τ — локально выпуклая топология в X. Говорят, что τ *согласована с двойственностью*, если $(X,\ \tau)' = |\,Y\rangle$. Говорят, что локально выпуклая топология ω в Y согласована с двойственностью ($X \leftrightarrow Y$, если ω согласована с двойственностью $Y \leftrightarrow X$, т. е.) при выполнении равенства $(Y,\ \omega)' = \langle X|$.

10.4.2. *Слабые топологии согласованы с наводящей их двойственностью.*

$\lhd$ Следует из 10.3.9. $\rhd$

10.4.3. *Пусть $\tau(X,\ Y)$ — точная верхняя граница множества всех локально выпуклых топологий в X, согласованных с двойственностью. Тогда топология $\tau(X,\ Y)$ также согласована с двойственностью.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathscr{E}$ — множество таких топологий. По теореме 10.2.13

$$(X,\ \tau(X,\ Y))' = (X,\ \sup \mathscr{E})' =$$
$$= \sup\{(X,\ \tau)' :\ \tau \in \mathscr{E}\} = \sup\{|\,Y\rangle :\ \tau \in \mathscr{E}\} = |\,Y\rangle,$$

ибо $\mathscr{E}$ не пусто по 10.4.2. $\triangleright$

10.4.4. Определение. Топологию $\tau(X,\ Y)$, фигурирующую в предложении 10.4.3, т. е. сильнейшую локально выпуклую топологию в X, согласованную с двойственностью $X \leftrightarrow Y$, называют *топологией Макки* (в X, наведенной двойственностью $X \leftrightarrow Y$).

10.4.5. Теорема Макки — Аренса. *Локально выпуклая топология τ в X согласована с двойственностью $X \leftrightarrow Y$ в том и только в том случае, если*

$$\sigma(X,\ Y) \leq \tau \leq \tau(X,\ Y).$$

$\triangleleft$ По 10.2.13 отображение $\tau \mapsto (X,\ \tau)'$ сохраняет точные верхние границы и, следовательно, возрастает. Таким образом, для τ, лежащей в рассматриваемом промежутке топологий, на основании 10.4.2 и 10.4.3 справедливо

$$|\,Y\rangle = (X,\ \sigma(X,\ Y)) \subset (X,\ \tau)' \subset (X,\ \tau(X,\ Y))' = |\,Y\rangle.$$

Оставшаяся часть теоремы очевидна. $\triangleright$

10.4.6. Теорема Макки. *Ограниченные множества во всех топологиях, согласованных с двойственностью, одни и те же.*

$\triangleleft$ При усилении топологии количество ограниченных множеств уменьшается. Поэтому ввиду 10.4.5 нужно убедиться лишь в том, что если множество U слабо ограничено в X (= ограничено в братопологии), то U ограничено в топологии Макки.

Возьмем полунорму p из зеркала топологии Макки и покажем, что $p(U)$ ограничено в $\mathbb{R}$. Положим $X_0 := X/\ker p$ и $p_0 := p_{X/\ker p}$. Учитывая 5.2.14, видим, что p_0 — это норма. Пусть $\varphi : X \to X_0$ — каноническое отображение. Бесспорно, что множество $\varphi(U)$ слабо ограничено в $(X_0,\ p_0)$. Из 7.2.7 вытекает, что $\varphi(U)$ ограничено по норме p_0. Поскольку $p_0 \circ \varphi = p$, то U ограничено в $(X,\ p)$. $\triangleright$

10.4.7. *Следствие.* *Пусть X — нормированное пространство. Топология Макки $\tau(X,\ X')$ совпадает с исходной топологией, порожденной нормой в пространстве X.*

$\triangleleft$ Достаточно сослаться на критерий Колмогорова 5.4.5, по которому топология $\tau(X,\ X')$, содержащая исходную топологию, нормируема, и привлечь предложение 5.3.4. $\triangleright$

10.4.8. *Теорема строгой отделимости.* *Пусть $(X,\ \tau)$ — локально выпуклое пространство, K и V — непустые выпуклые множества в X, причем K компактно, V замкнуто и $K \cap V = \varnothing$. Тогда существует функционал $f \in (X,\ \tau)'$ такой, что*

$$\sup \operatorname{Re} f(K) < \inf \operatorname{Re} f(V).$$

$\triangleleft$ Локально выпуклое пространство, конечно же, регулярно. Отсюда с учетом компактности K следует, что для подходящей выпуклой окрестности нуля W множество $U := K + W$ не пересекается с V (достаточно рассмотреть базисы, порожденные множествами вида $K + \overline{W}$ и $V + \overline{W}$, где $\overline{W}$ — замкнутая окрестность нуля). На основании 3.1.10 заключаем, что U выпукло. Помимо этого, $K \subset \operatorname{int} U = \operatorname{core} U$. По теореме отделимости Эйдельгайта 3.8.14 найдется функционал $l \in (X_{\mathbb{R}})^{\#}$, обладающий тем свойством, что гиперплоскость $\{l = 1\}$ в $X_{\mathbb{R}}$ разделяет V и U и не содержит точек ядра U. Очевидно, что l ограничен сверху на W и, стало быть, $l \in (X_{\mathbb{R}}, \tau)'$ по критерию 7.5.1. Если $f := \mathbf{Re}^{-1} l$, то, в связи с 3.7.5, $f \in (X,\ \tau)'$. Ясно, что функционал f — искомый. $\triangleright$

10.4.9. *Теорема Мазура.* *Выпуклые замкнутые множества во всех согласованных с двойственностью топологиях одни и те же.*

$\triangleleft$ При усилении топологии количество замкнутых множеств увеличивается. Значит, ввиду 10.4.5 нужно убедиться лишь в том, что если U выпукло и замкнуто в топологии Макки, то U слабо замкнуто. Последнее несомненно, ибо, по теореме 10.4.8, U есть пересечение слабо замкнутых множеств типа $\{\mathbf{Re}\, f \leq t\}$, где f — (слабо) непрерывный линейный функционал, а $t \in \mathbb{R}$. $\triangleright$

10.5. Поляры

10.5.1. Определение. Пусть X, Y — некоторые множества