10.4.7. *Следствие.* *Пусть X — нормированное пространство. Топология Макки $\tau(X,\ X')$ совпадает с исходной топологией, порожденной нормой в пространстве X.*

$\lhd$ Достаточно сослаться на критерий Колмогорова 5.4.5, по которому топология $\tau(X,\ X')$, содержащая исходную топологию, нормируема, и привлечь предложение 5.3.4. $\rhd$

10.4.8. *Теорема строгой отделимости.* *Пусть $(X,\ \tau)$ — локально выпуклое пространство, K и V — непустые выпуклые множества в X, причем K компактно, V замкнуто и $K \cap V = \varnothing$. Тогда существует функционал $f \in (X,\ \tau)'$ такой, что*

$$\sup \operatorname{Re} f(K) < \inf \operatorname{Re} f(V).$$

$\lhd$ Локально выпуклое пространство, конечно же, регулярно. Отсюда с учетом компактности K следует, что для подходящей выпуклой окрестности нуля W множество $U := K + W$ не пересекается с V (достаточно рассмотреть базисы, порожденные множествами вида $K + \overline{W}$ и $V + \overline{W}$, где $\overline{W}$ — замкнутая окрестность нуля). На основании 3.1.10 заключаем, что U выпукло. Помимо этого, $K \subset \operatorname{int} U = \operatorname{core} U$. По теореме отделимости Эйдельгайта 3.8.14 найдется функционал $l \in (X_{\mathbb{R}})^{\#}$, обладающий тем свойством, что гиперплоскость $\{l = 1\}$ в $X_{\mathbb{R}}$ разделяет V и U и не содержит точек ядра U. Очевидно, что l ограничен сверху на W и, стало быть, $l \in (X_{\mathbb{R}}, \tau)'$ по критерию 7.5.1. Если $f := \mathbf{Re}^{-1} l$, то, в связи с 3.7.5, $f \in (X,\ \tau)'$. Ясно, что функционал f — искомый. $\rhd$

10.4.9. *Теорема Мазура.* *Выпуклые замкнутые множества во всех согласованных с двойственностью топологиях одни и те же.*

$\lhd$ При усилении топологии количество замкнутых множеств увеличивается. Значит, ввиду 10.4.5 нужно убедиться лишь в том, что если U выпукло и замкнуто в топологии Макки, то U слабо замкнуто. Последнее несомненно, ибо, по теореме 10.4.8, U есть пересечение слабо замкнутых множеств типа $\{\mathbf{Re}\, f \le t\}$, где f — (слабо) непрерывный линейный функционал, а $t \in \mathbb{R}$. $\rhd$

10.5. Поляры

10.5.1. Определение. Пусть X, Y — некоторые множества и $F \subset X \times Y$ — соответствие. Для множеств U в X и V в Y полагают

$$\pi(U) := \pi_F(U) := \{y \in Y : \ F^{-1}(y) \supset U\};$$
$$\pi^{-1}(V) := \pi_F^{-1}(V) := \{x \in X : \ F(u) \supset V\}.$$

При этом $\pi(U)$ называют (*прямой*) *полярой* U, а множество $\pi^{-1}(V)$ — (*обратной*) *полярой* V.

10.5.2. *Имеют место утверждения*:

(1) $\pi(u) := \pi(\{u\}) = F(u), \ \pi(U) = \cap_{u \in U} \pi(u)$;
(2) $\pi(\cup_{\xi \in \Xi} U_\xi) = \cap_{\xi \in \Xi} \pi(U_\xi)$;
(3) $\pi_F^{-1}(V) = \pi_{F^{-1}}(V)$;
(4) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow \pi(U_1) \supset \pi(U_2)$;
(5) $U \times V \subset F \Rightarrow V \subset \pi(U), \ U \subset \pi^{-1}(V)$;
(6) $U \subset \pi^{-1}(\pi(U))$. $\triangleleft\triangleright$

10.5.3. *Критерий Акилова.* *Множество U в X является полярой некоторого множества в Y в том и только в том случае, если для каждого $x \in X \setminus U$ найдется $y \in Y$, для которого*

$$U \subset \pi^{-1}(y), \quad x \notin \pi^{-1}(y).$$

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Если $U = \pi^{-1}(V)$, то будет $U = \cap_{v \in V} \pi^{-1}(v)$ на основании 10.5.2 (1).

$\Leftarrow$: Включение $U \subset \pi^{-1}(y)$ означает, что $y \in \pi(U)$. Итак, по условию $U = \cap_{y \in \pi(U)} \pi^{-1}(y) = \pi^{-1}(\pi(U))$. $\triangleright$

10.5.4. *Следствие.* *Множество $\pi^{-1}(\pi(U))$ — это наименьшая (по включению) поляра, содержащая множество U.* $\triangleleft\triangleright$

10.5.5. Определение. Множество $\pi_F^{-1}(\pi_F(U))$ называют *биполярой* множества U (относительно соответствия F).

10.5.6. Примеры.

(1) Пусть $(X, \ \sigma)$ — упорядоченное множество, а U — подмножество X. Тогда $\pi_\sigma(U)$ — это совокупность всех верхних границ U (ср. 1.2.7).

(2) Пусть $(H, \ (\cdot\,, \cdot)_H)$ — гильбертово пространство и $F := \{(x, \ y) \in H^2 : \ (x, \ y)_H = 0\}$. Тогда для всех U в H выполнено $\pi(U) = \pi^{-1}(U) = U^\perp$. Биполяра U в этом случае совпадает с замыканием линейной оболочки U.

(3) Пусть X — нормированное пространство и X' — сопряженное пространство. Пусть $F := \{(x,\ x') :\ x'(x) = 0\}$. Тогда $\pi(X_0) = X_0^{\perp}$ и $\pi^{-1}(\mathscr{X}_0) = {}^{\perp}\mathscr{X}_0$ для подпространства X_0 в X и подпространства $\mathscr{X}_0$ в X' (см. 7.6.8). При этом $\pi^{-1}(\pi(X_0)) = \operatorname{cl} X_0$ в силу 7.5.14.

10.5.7. Определение. Пусть $X \leftrightarrow Y$. Положим

$$\operatorname{pol} := \{(x,\ y) \in X \times Y :\ \operatorname{Re}\langle x \mid y\rangle \leq 1\};$$
$$\operatorname{abs}\operatorname{pol} := \{(x,\ y) \in X \times Y :\ |\langle x \mid y\rangle| \leq 1\}.$$

Для прямой и обратной поляр относительно соответствия pol используют единое название «поляры» и обозначения $\pi(U)$ и $\pi(V)$; в случае соответствия abs pol говорят об *абсолютных полярах* и пишут U° и V° (для $U \subset X$ и $V \subset Y$).

10.5.8. ***Теорема о биполяре.*** *Биполяра $\pi^2(U) := \pi(\pi(U))$ — это наименьший слабо замкнутый конический отрезок, содержащий множество U.*

$\lhd$ Следует из 10.4.8 и критерия Акилова. $\rhd$

10.5.9. ***Теорема об абсолютной биполяре.*** *Абсолютная биполяра $U^{\circ\circ} := (U^{\circ})^{\circ}$ — это наименьшее слабо замкнутое абсолютно выпуклое множество, содержащее множество U.*

$\lhd$ Достаточно заметить, что поляра уравновешенного множества совпадает с его абсолютной полярой, и применить 10.5.8. $\rhd$

10.6. Слабо компактные выпуклые множества

10.6.1. *Пусть X — вещественное локально выпуклое пространство и $p : X \to \mathbb{R}$ — непрерывный сублинейный функционал на X. Тогда (топологический) субдифференциал $\partial(p)$ компактен в топологии $\sigma(X', X)$.*

$\lhd$ Положим $Q := \prod_{x \in X}[-p(-x),\ p(x)]$ и наделим Q тихоновской топологией. Ясно, что $\partial(p) \subset Q$ и тихоновская топология в Q индуцирует в $\partial(p)$ ту же топологию, что и $\sigma(X',\ X)$. Несомненно, что множество $\partial(p)$ замкнуто в Q из-за непрерывности p. Учитывая теперь теорему Тихонова 9.4.8 и 9.4.9, заключаем, что $\partial(p)$ является $\sigma(X',\ X)$-компактным множеством. $\rhd$