(3) Пусть X — нормированное пространство и X' — сопряженное пространство. Пусть $F := \{(x,\ x') :\ x'(x) = 0\}$. Тогда $\pi(X_0) = X_0^{\perp}$ и $\pi^{-1}(\mathscr{X}_0) = {}^{\perp}\mathscr{X}_0$ для подпространства X_0 в X и подпространства $\mathscr{X}_0$ в X' (см. 7.6.8). При этом $\pi^{-1}(\pi(X_0)) = \operatorname{cl} X_0$ в силу 7.5.14.

10.5.7. Определение. Пусть $X \leftrightarrow Y$. Положим

$$\begin{aligned} \mathrm{pol} &:= \{(x,\ y) \in X \times Y :\ \mathrm{Re}\langle x \mid y \rangle \leq 1\}; \\ \mathrm{abs\,pol} &:= \{(x,\ y) \in X \times Y :\ |\langle x \mid y \rangle| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Для прямой и обратной поляр относительно соответствия pol используют единое название «поляры» и обозначения $\pi(U)$ и $\pi(V)$; в случае соответствия abs pol говорят об *абсолютных полярах* и пишут U° и V° (для $U \subset X$ и $V \subset Y$).

10.5.8. ***Теорема о биполяре.*** *Биполяра $\pi^2(U) := \pi(\pi(U))$ — это наименьший слабо замкнутый конический отрезок, содержащий множество U.*

$\triangleleft$ Следует из 10.4.8 и критерия Акилова. $\triangleright$

10.5.9. ***Теорема об абсолютной биполяре.*** *Абсолютная биполяра $U^{\circ\circ} := (U^{\circ})^{\circ}$ — это наименьшее слабо замкнутое абсолютно выпуклое множество, содержащее множество U.*

$\triangleleft$ Достаточно заметить, что поляра уравновешенного множества совпадает с его абсолютной полярой, и применить 10.5.8. $\triangleright$

10.6. Слабо компактные выпуклые множества

10.6.1. *Пусть X — вещественное локально выпуклое пространство и $p : X \to \mathbb{R}$ — непрерывный сублинейный функционал на X. Тогда (топологический) субдифференциал $\partial(p)$ компактен в топологии $\sigma(X', X)$.*

$\triangleleft$ Положим $Q := \prod_{x \in X} [-p(-x),\ p(x)]$ и наделим Q тихоновской топологией. Ясно, что $\partial(p) \subset Q$ и тихоновская топология в Q индуцирует в $\partial(p)$ ту же топологию, что и $\sigma(X',\ X)$. Несомненно, что множество $\partial(p)$ замкнуто в Q из-за непрерывности p. Учитывая теперь теорему Тихонова 9.4.8 и 9.4.9, заключаем, что $\partial(p)$ является $\sigma(X',\ X)$-компактным множеством. $\triangleright$

10.6.2. *Субдифференциал любой непрерывной полунормы слабо компактен.* $\triangleleft\triangleright$

10.6.3. *Теорема о строении субдифференциала.* *Пусть X — вещественное векторное пространство. Множество U в $X^\#$ является субдифференциалом (всюду определенного и притом единственного) сублинейного функционала $s_U : X \to \mathbb{R}$ в том и только в том случае, если U непусто, выпукло и $\sigma(X^\#,\ X)$-компактно.*

$\triangleleft \Rightarrow$: Пусть $U = \partial(s_U)$ для некоторого s_U. Единственность s_U обеспечена 3.6.6. В связи с 10.2.12 понятно, что зеркало топологии Макки $\tau(X,\ X^\#)$ — это сильнейшая мультинорма в X (см. 5.1.10 (2)). Отсюда выводим, что функционал s_U непрерывен в $\tau(X,\ X^\#)$. На основании 10.6.1 множество U компактно в $\sigma(X^\#,\ X)$. Выпуклость и непустота U очевидны.

$\Leftarrow$: Положим $s_U(x) := \sup\{l(x)\ :\ \ l \in U\}$. Бесспорно, что s_U — сублинейный функционал и $\operatorname{dom} s_U = X$. По определению $U \subset \partial(s_U)$. Если же $l \in \partial(s_U)$ и $l \notin U$, то по теореме строгой отделимости 10.4.8 и теореме о дуализациях 10.3.9 для некоторого $x \in X$ будет $s_U(x) < l(x)$. Получаем противоречие. $\triangleright$

10.6.4. Определение. Сублинейный функционал s_U, построенный в теореме 10.6.3, называют *опорной функцией* множества U.

10.6.5. *Теорема Крейна — Мильмана.* *Каждое компактное выпуклое множество в локально выпуклом пространстве является замыканием выпуклой оболочки множества своих крайних точек.*

$\triangleleft$ Пусть U — такое множество в пространстве X. Можно считать, что пространство X — вещественное и что $U \neq \varnothing$. В силу 9.4.12, U компактно в топологии $\sigma(X,\ X')$. Поскольку $\sigma(X,\ X')$ индуцируется в X топологией $\sigma(X'^\#,\ X')$ в $X'^\#$, то $U = \partial(s_U)$. Здесь (см. 10.6.3) $s_U : X' \to \mathbb{R}$ действует по правилу $s_U(x') := \sup x'(U)$. По теореме Крейна — Мильмана для субдифференциалов 3.6.5 множество крайних точек $\operatorname{ext}(U)$ не пусто. Замыкание выпуклой оболочки множества $\operatorname{ext}(U)$ является субдифференциалом по теореме 10.6.3. Кроме того, это множество имеет s_U своей опорной функцией и, стало быть, совпадает с U (ср. 3.6.6). $\triangleright$

10.6.6. *Пусть $X \leftrightarrow Y$ и S — конический отрезок в X. Пусть, далее, p_S — функционал Минковского S. Поляра $\pi(S)$ служит прообразом при кет-отображении (алгебраического) субдифференциала*

$\partial(p_S)$, т. е.

$$\pi(S) = |\,\partial(p_S)\,\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}.$$

Если S — абсолютно выпуклое множество, то абсолютная поляра S° является прообразом при кет-отображении (алгебраического) субдифференциала полунормы $|\partial|(p_S)$, т. е.

$$S^\circ = |\,|\partial|(p_S)\,\rangle^{-1}.$$

$\lhd$ Если $y \in Y_{\mathbb{R}}$ таков, что $y \in |\,\partial(p_S)\,\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}$, то $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}$ входит в $\partial(p_S)$. Значит, для $x \in S$ выполнено $\operatorname{Re}\langle x\,|\,y\rangle = \langle x\,|\,y\rangle_{\mathbb{R}} = |\,y\rangle_{\mathbb{R}}(x) \leq p_S(x) \leq 1$, ибо $S \subset \{p_S \leq 1\}$ по теореме о функционале Минковского 3.8.7. Следовательно, $y \in \pi(S)$.

Если, в свою очередь, $y \in \pi(S)$, то элемент $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}$ входит в $\partial(p_S)$. В самом деле, для любого элемента x из $X_{\mathbb{R}}$ при $\alpha > p_S(x)$ имеем $1 > p_S(\alpha^{-1}x)$, т. е. $\alpha^{-1}x \in \{p_S < 1\} \subset S$. Отсюда $\langle \alpha^{-1}x\,|\,y\rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}\langle \alpha^{-1}x\,|\,y\rangle = \alpha^{-1}\operatorname{Re}\langle x\,|\,y\rangle \leq 1$. Окончательно получаем $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}(x) \leq \alpha$. Из-за произвольности выбора α последнее неравенство означает, что $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}(x) \leq p_S(x)$. Иначе говоря, $y \in |\,\partial(p_s)\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}$. Тем самым равенство $\pi(S) = |\,\partial(p_S)\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}$ установлено. Оставшаяся часть утверждения следует из свойств комплексификатора 3.7.3 и 3.7.9. $\rhd$

10.6.7. *Теорема Алаоглу — Бурбаки.* *Поляра окрестности нуля любой согласованной с двойственностью топологии является слабо компактным выпуклым множеством.*

$\lhd$ Пусть U — окрестность нуля в пространстве X и $\pi(U)$ — поляра U (в двойственности $X \leftrightarrow X'$). Так как $U \supset \{p \leq 1\}$ для некоторой непрерывной полунормы p, на основании 10.5.2 (4), $\pi(U) \subset \pi(\{p \leq 1\}) = \pi(B_p) = B_p^\circ$. Привлекая 10.6.6 и учитывая, что p есть функционал Минковского B_p, видим, что $\pi(U) \subset |\partial|(p)$. В силу 10.6.2 топологический субдифференциал полунормы $|\partial|(p)$ является $\sigma(X', X)$-компактным. По определению $\pi(U)$ — слабо замкнутое множество. Остается сослаться на 9.4.9, чтобы убедиться в $\sigma(X', X)$-компактности $\pi(U)$. Выпуклость $\pi(U)$ несомненна. $\rhd$

10.7. Рефлексивные пространства

10.7.1. *Критерий Какутани.* *Нормированное пространство рефлексивно в том и только в том случае, если единичный шар в нем слабо компактен.*