$\partial(p_S)$, т. е.
$$\pi(S) = |\,\partial(p_S)\,\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}.$$

Если S — абсолютно выпуклое множество, то абсолютная поляра S° является прообразом при кет-отображении (алгебраического) субдифференциала полунормы $|\partial|(p_S)$, т. е.
$$S^\circ = |\,|\partial|(p_S)\,\rangle^{-1}.$$

$\lhd$ Если $y \in Y_{\mathbb{R}}$ таков, что $y \in |\,\partial(p_S)\,\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}$, то $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}$ входит в $\partial(p_S)$. Значит, для $x \in S$ выполнено $\mathrm{Re}\langle x\,|\,y\rangle = \langle x\,|\,y\rangle_{\mathbb{R}} = |\,y\rangle_{\mathbb{R}}(x) \le p_S(x) \le 1$, ибо $S \subset \{p_S \le 1\}$ по теореме о функционале Минковского 3.8.7. Следовательно, $y \in \pi(S)$.

Если, в свою очередь, $y \in \pi(S)$, то элемент $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}$ входит в $\partial(p_S)$. В самом деле, для любого элемента x из $X_{\mathbb{R}}$ при $\alpha > p_S(x)$ имеем $1 > p_S(\alpha^{-1}x)$, т. е. $\alpha^{-1}x \in \{p_S < 1\} \subset S$. Отсюда $\langle \alpha^{-1}x\,|\,y\rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\langle \alpha^{-1}x\,|\,y\rangle = \alpha^{-1}\,\mathrm{Re}\langle x\,|\,y\rangle \le 1$. Окончательно получаем $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}(x) \le \alpha$. Из-за произвольности выбора α последнее неравенство означает, что $|\,y\rangle_{\mathbb{R}}(x) \le p_S(x)$. Иначе говоря, $y \in |\,\partial(p_s)\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}$. Тем самым равенство $\pi(S) = |\,\partial(p_S)\rangle_{\mathbb{R}}^{-1}$ установлено. Оставшаяся часть утверждения следует из свойств комплексификатора 3.7.3 и 3.7.9. $\rhd$

10.6.7. *Теорема Алаоглу — Бурбаки.* *Поляра окрестности нуля любой согласованной с двойственностью топологии является слабо компактным выпуклым множеством.*

$\lhd$ Пусть U — окрестность нуля в пространстве X и $\pi(U)$ — поляра U (в двойственности $X \leftrightarrow X'$). Так как $U \supset \{p \le 1\}$ для некоторой непрерывной полунормы p, на основании 10.5.2 (4), $\pi(U) \subset \pi(\{p \le 1\}) = \pi(B_p) = B_p^\circ$. Привлекая 10.6.6 и учитывая, что p есть функционал Минковского B_p, видим, что $\pi(U) \subset |\partial|(p)$. В силу 10.6.2 топологический субдифференциал полунормы $|\partial|(p)$ является $\sigma(X', X)$-компактным. По определению $\pi(U)$ — слабо замкнутое множество. Остается сослаться на 9.4.9, чтобы убедиться в $\sigma(X', X)$-компактности $\pi(U)$. Выпуклость $\pi(U)$ несомненна. $\rhd$

10.7. Рефлексивные пространства

10.7.1. *Критерий Какутани.* *Нормированное пространство рефлексивно в том и только в том случае, если единичный шар в нем слабо компактен.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть X рефлексивно, т. е. $''(X) = X''$. Иными словами, образ X при двойном штриховании совпадает с X''. Так как шар $B_{X''}$ — это поляра шара $B_{X'}$ при двойственности $X'' \leftrightarrow X'$, то $B_{X''}$ — это $\sigma(X'',\ X')$-компактное множество по теореме Алаоглу — Бурбаки 10.6.7. Остается заметить, что $B_{X''}$ есть (образ при двойном штриховании) B_X, а $\sigma(X,\ X')$ есть (прообраз при двойном штриховании) $\sigma(X'',\ X')$.

$\Leftarrow$: Рассмотрим двойственность $X'' \leftrightarrow X'$. По определению шар $B_{X''}$ представляет собой биполяру B_X (точнее говоря, биполяру множества $(B_X)''$). Привлекая теорему об абсолютной биполяре 10.5.9 и учитывая, что слабая топология $\sigma(X,\ X')$ индуцирована в X топологией $\sigma(X'',\ X')$, заключаем, что $B_{X''} = B_X$ (из-за бесспорной абсолютной выпуклости и замкнутости этого множества, обеспеченной условием его компактности). Таким образом, X рефлексивно. $\rhd$

10.7.2. *Следствие.* *Нормированное пространство будет рефлексивным в том и только в том случае, если любое ограниченное замкнутое выпуклое множество в нем слабо компактно.* $\lhd\rhd$

10.7.3. *Следствие.* *Каждое замкнутое подпространство рефлексивного пространства рефлексивно.*

$\lhd$ По теореме Мазура 10.4.9 рассматриваемое подпространство, а потому и шар в нем слабо замкнуты. Стало быть, достаточно дважды применить критерий Какутани. $\rhd$

10.7.4. *Теорема Петтиса.* *Банахово пространство и сопряженное к нему пространство рефлексивны (или не рефлексивны) одновременно.*

$\lhd$ Если X рефлексивно, то $\sigma(X',\ X)$ совпадает с $\sigma(X',\ X'')$, стало быть, учитывая теорему Алаоглу — Бурбаки 10.6.7, заключаем, что $B_{X'}$ — это $\sigma(X',\ X'')$-компактное множество. Значит, X' рефлексивно. Если же рефлексивно X', то по уже доказанному рефлексивно X''. Но X, будучи банаховым пространством, является замкнутым подпространством X''. Итак, X рефлексивно в силу 10.7.3. $\rhd$

10.7.5. *Теорема Джеймса.* *Банахово пространство рефлексивно в том и только в том случае, если любой непрерывный (вещественно) линейный функционал принимает наибольшее значение на единичном шаре этого пространства.*