10.8. Пространство $C(Q,\ \mathbb{R})$

10.8.1. Замечание. Всюду в текущем параграфе Q — непустой компакт (= непустое компактное хаусдорфово пространство), а $C(Q,\ \mathbb{R})$ — это множество непрерывных вещественных функций на Q. Множество $C(Q,\ \mathbb{R})$ без особых на то указаний рассматривают с естественными «поточечными» алгебраическими операциями и отношением порядка, а также с топологией нормы $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$, отвечающей метрике Чебышёва (см. 4.6.8). В этом смысле трактуют высказывания: «$C(Q,\ \mathbb{R})$ — это векторная решетка», «$C(Q,\ \mathbb{R})$ — это банахова алгебра» и им подобные. Если в $C(Q,\ \mathbb{R})$ вводят какие-либо иные структуры, то это обязательно оговаривают явно.

10.8.2. Определение. Подмножество L в $C(Q,\ \mathbb{R})$ называют *подрешеткой*, если для $f_1, f_2 \in L$ выполнено $f_1 \vee f_2 \in L$, $f_1 \wedge f_2 \in L$, где, как обычно,

$$f_1 \vee f_2(q) := f_1(q) \vee f_2(q),$$
$$f_1 \wedge f_2(q) := f_1(q) \wedge f_2(q) \quad (q \in Q).$$

10.8.3. Замечание. Следует иметь в виду, что быть подрешеткой в пространстве $C(Q,\ \mathbb{R})$ — это больше, чем быть решеткой относительно порядка, индуцированного из $C(Q,\ \mathbb{R})$.

10.8.4. Примеры.

(1) $\varnothing$; $C(Q,\ \mathbb{R})$; замыкание подрешетки.

(2) Пересечение любого множества подрешеток — снова подрешетка.

(3) Пусть L — некоторая подрешетка и Q_0 — подмножество Q. Положим

$$L_{Q_0} := \{f \in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ (\exists\, g \in L)\ g(q) = f(q) \quad (q \in Q_0)\}.$$

Тогда L_{Q_0} — подрешетка. При этом $L \subset L_{Q_0}$.

(4) Пусть Q_0 — компактное подмножество Q. Для подрешетки L в $C(Q,\ \mathbb{R})$ положим

$$L\big|_{Q_0} := \{f\big|_{Q_0} :\ f \in L\}.$$

Таким образом, выполнено

$$L_{Q_0} = \{f \in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ f\big|_{Q_0} \in L\big|_{Q_0}\}.$$

Ясно, что $L\big|_{Q_0}$ — подрешетка в $C(Q_0,\ \mathbb{R})$. Если при этом L — *векторная подрешетка* в $C(Q,\ \mathbb{R})$, т. е. векторное подпространство и одновременно подрешетка $C(Q,\ \mathbb{R})$, то $L\big|_{Q_0}$ — векторная подрешетка в $C(Q_0,\ \mathbb{R})$ (разумеется, если $Q_0 \neq \varnothing$).

(5) Пусть $Q := \{1, 2\}$. Тогда $C(Q,\ \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$. Любая ненулевая векторная подрешетка в $\mathbb{R}^2$ задается в виде

$$\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2\}$$

для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$.

(6) Пусть L — векторная подрешетка $C(Q,\ \mathbb{R})$. Если $q \in Q$, то возникает альтернатива: либо $L_{\{q\}} = C(Q,\ \mathbb{R})$, либо $L_{\{q\}} = \{f \in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ f(q) = 0\}$. Если же q_1, q_2 — две различные точки Q и $L\big|_{\{q_1,q_2\}} \neq 0$, то в силу 10.8.4 (5) найдутся числа $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ такие, что

$$L_{\{q_1,q_2\}} = \{f \in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ \alpha_1 f(q_1) = \alpha_2 f(q_2)\}. \ \triangleleft\triangleright$$

10.8.5. *Пусть L — подрешетка в пространстве $C(Q,\ \mathbb{R})$. Функция $f \in C(Q,\ \mathbb{R})$ входит в замыкание L в том и только в том случае, если для любых $\varepsilon > 0$ и $(x,\ y) \in Q^2$ существует функция $\overline{f} := f_{x,y,\varepsilon} \in L$, удовлетворяющая условиям*

$$\overline{f}(x) - f(x) < \varepsilon, \quad \overline{f}(y) - f(y) > -\varepsilon.$$

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Очевидно.

$\Leftarrow$: На основании 3.2.10 и 3.2.11 можно считать, что $f = 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Зафиксируем $x \in Q$ и рассмотрим функцию $g_y := f_{x,y,\varepsilon} \in L$. Пусть $V_y := \{g \in Q :\ g_y(q) > -\varepsilon\}$. Тогда V_y — открытое множество и $y \in V_y$. В силу компактности Q найдутся $y_1, \dots, y_n \in Q$, для которых $Q = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$. Положим $f_x := g_{y_1} \vee \ldots \vee g_{y_n}$. Ясно, что $f_x \in L$. Помимо этого, $f_x(x) < \varepsilon$ и $f_x(y) > -\varepsilon$ при всех $y \in Q$. Пусть теперь $U_x := \{q \in Q :\ f_x(q) < \varepsilon\}$. Множество U_x открыто и $x \in U_x$. Вновь используя компактность Q, подыщем $x_1, \dots, x_m \in Q$ такие, что $Q = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}$. Положим, наконец, $l := f_{x_1} \wedge \ldots \wedge f_{x_m}$. Несомненно, что $l \in L$ и $\|l\| < \varepsilon$. $\triangleright$

10.8.6. Замечание. Предложение 10.8.5 называют *обобщенной теоремой Дини* (ср. 7.2.10).

10.8.7. *Лемма Какутани.* *Для любой подрешетки* L *в* $C(Q,\ \mathbb{R})$ *выполнено*

$$\operatorname{cl} L = \bigcap_{(q_1,q_2)\in Q^2} \operatorname{cl}\left(L_{\{q_1,q_2\}}\right).$$

$\lhd$ Включение $\operatorname{cl} L$ в $\operatorname{cl}\bigl(L_{\{q_1,q_2\}}\bigr)$ для каждого $(q_1,\ q_2)\in Q^2$ бесспорно. Если же $f\in\operatorname{cl}\bigl(L_{\{q_1,q_2\}}\bigr)$ при всех таких $q_1,\ q_2$, то, в силу предложения 10.8.5, $f\in\operatorname{cl} L$. $\rhd$

10.8.8. *Следствие.* *Для любой векторной подрешетки* L *в пространстве* $C(Q,\ \mathbb{R})$ *справедливо представление*

$$\operatorname{cl} L = \bigcap_{(q_1,q_2)\in Q^2} L_{\{q_1,q_2\}}.$$

$\lhd$ В данном случае множество $L_{\{q_1,q_2\}}$ замкнуто. $\rhd$

10.8.9. Определение. Говорят, что множество U в $\mathbb{F}^Q$ *разделяет точки* Q, если для любых точек $q_1,\ q_2\in Q$ таких, что $q_1\neq q_2$, существует функция $u\in U$, принимающая различные значения в этих точках: $u(q_1)\neq u(q_2)$.

10.8.10. *Теорема Стоуна.* *Содержащая постоянные функции, разделяющая точки векторная подрешетка в пространстве* $C(Q,\ \mathbb{R})$ *плотна в* $C(Q,\ \mathbb{R})$.

$\lhd$ Если L — рассматриваемая подрешетка, то

$$L_{\{q_1,q_2\}} = C(Q,\ \mathbb{R})_{\{q_1,q_2\}}$$

для всякой пары $(q_1,\ q_2)\in Q^2$ (см. 10.8.4 (6)). Осталось привлечь 10.8.8. $\rhd$

10.8.11. *Пусть* $\mu\in C(Q,\ \mathbb{R})'$. *Положим*

$$\mathscr{N}(\mu) := \{f\in C(Q,\ \mathbb{R}) :\ [0,\ |f|]\subset\ker\mu\}.$$

Тогда существует, и притом единственное, замкнутое подмножество $\operatorname{supp}(\mu)$ *в* Q *такое, что*

$$f\in\mathscr{N}(\mu)\Leftrightarrow f\big|_{\operatorname{supp}(\mu)} = 0.$$

◁ По лемме о сумме промежутков 3.2.15

$$[0,\ |f|]+[0,\ |g|]=[0,\ |f|+|g|].$$

Таким образом, $f,\ g\in\mathscr{N}(\mu)\Rightarrow|f|+|g|\in\mathscr{N}(\mu)$. Поскольку $\mathscr{N}(\mu)$ — ***порядковый идеал***, т. е. $(f\in\mathscr{N}(\mu)\ \&\ 0\le|g|\le|f|\Rightarrow g\in\mathscr{N}(\mu))$, заключаем, что $\mathscr{N}(\mu)$ — это векторное подпространство. Более того, $\mathscr{N}(\mu)$ замкнуто. В самом деле, пусть $f_n\ge 0$, $f_n\to f$ и $f_n\in\mathscr{N}(\mu)$. Тогда для $g\in[0,\ f]$ выполнено $g\wedge f_n\to g$ и $g\wedge f_n\in[0,\ f_n]$. Отсюда следует, что $\mu(g)=0$, т. е. $f\in\mathscr{N}(\mu)$.

В силу 10.8.8, учитывая, что $\mathscr{N}(\mu)$ — порядковый идеал, имеем

$$\mathscr{N}(\mu)=\bigcap_{q\in Q}\mathscr{N}(\mu)_{\{q\}}.$$

Определим множество $\operatorname{supp}(\mu)$ следующим образом:

$$q\in\operatorname{supp}(\mu)\Leftrightarrow\mathscr{N}(\mu)_{\{q\}}\ne C(Q,\ \mathbb{R})\Leftrightarrow(f\in\mathscr{N}(\mu)\Rightarrow f(q)=0).$$

Несомненно, что $\operatorname{supp}(\mu)$ — замкнутое множество. При этом справедливы соотношения

$$\mathscr{N}(\mu)=\bigcap_{q\in\operatorname{supp}(\mu)}\mathscr{N}(\mu)_{\{q\}}=$$
$$=\{f\in C(Q,\ \mathbb{R}):\ f\big|_{\operatorname{supp}(\mu)}=0\}.$$

Утверждение об единственности вытекает из нормальности Q (см. 9.4.14) и теоремы Урысона 9.3.14. ▷

10.8.12. Определение. Множество $\operatorname{supp}(\mu)$, фигурирующее в предложении 10.8.11, называют ***носителем*** μ (ср. 10.9.4 (5)).

10.8.13. Замечание. Если функционал μ положителен, то

$$\mathscr{N}(\mu)=\{f\in C(Q,\ \mathbb{R}):\ \mu(|f|)=0\}.$$

Следовательно, если при этом $\mu(fg)=0$ для всех $g\in C(Q,\ \mathbb{R})$, то $f\big|_{\operatorname{supp}(\mu)}=0$. Аналогично $\operatorname{supp}(\mu)=\varnothing\Leftrightarrow\mathscr{N}(\mu)=C(Q,\ \mathbb{R})\Leftrightarrow$

$\mu = 0$. Таким образом, обращаться с носителями положительных функционалов удобнее.

Пусть F — замкнутое подмножество Q. Говорят, что F *несёт* μ или что в $X \setminus F$ *нет* μ, если для всякой непрерывной функции f, у которой $\operatorname{supp}(f) \subset Q \setminus F$, выполнено $\mu(|f|) = 0$. Носитель $\operatorname{supp}(\mu)$ несёт μ, при этом любое несущее μ замкнутое множество в Q содержит $\operatorname{supp}(\mu)$. Иными словами, носитель μ — это дополнение наибольшего открытого множества, в котором нет μ (ср. 10.10.5 (6)).

Полезно уяснить, что в силу 3.2.14 и 3.2.15 с каждым ограниченным функционалом μ можно связать положительные (а потому и ограниченные) функционалы $\mu_+,\ \mu_-,\ |\mu|$, определенные для $f \in C(Q,\ \mathbb{R})_+$ очевидными равенствами:

$$\mu_+(f) = \sup \mu[0,\ f]; \quad \mu_-(f) = -\inf \mu[0,\ f]; \quad |\mu| = \mu_+ + \mu_-.$$

Более того, $C(Q,\ \mathbb{R})'$ является K-пространством (ср. 3.2.16). $\triangleleft\triangleright$

10.8.14. *Носители μ и $|\mu|$ совпадают.*

$\triangleleft$ По определению $\mathscr{N}(\mu) = \mathscr{N}(|\mu|)$. $\triangleright$

10.8.15. *Пусть $0 \le a \le \mathbf{1}$ и $a\mu : f \mapsto \mu(af)$ при $f \in C(Q,\ \mathbb{R})$ и $\mu \in C(Q,\ \mathbb{R})'$. Тогда $|a\mu| = a|\mu|$.*

$\triangleleft$ Для $f \in C(Q,\ \mathbb{R})_+$ есть оценка

$$(a\mu)_+(f) = \sup\{\mu(ag) :\ 0 \le g \le f\} \le \sup \mu[0,\ af] = \\ = \mu_+(af) = a\mu_+(f).$$

Помимо этого,

$$\mu_+ = (a\mu + (\mathbf{1} - a)\mu)_+ \le (a\mu)_+ + ((\mathbf{1} - a)\mu)_+ \le a\mu_+ + (\mathbf{1} - a)\mu_+ = \mu_+.$$

Значит, $(a\mu)_+ = a\mu_+$, откуда и вытекает требуемое. $\triangleright$

10.8.16. Лемма де Бранжа. *Пусть A — содержащая постоянные функции подалгебра $C(Q,\ \mathbb{R})$ и $\mu \in \operatorname{ext}(A^\perp \cap B_{C(Q,\mathbb{R})'})$. Тогда сужение любой функции из A на носитель μ — постоянная функция.*

$\triangleleft$ Если $\mu = 0$, то $\operatorname{supp}(\mu) = \varnothing$ и доказывать ничего не надо. Если же $\mu \ne 0$, то, конечно, $\|\mu\| = \mathbf{1}$. Возьмем $a \in A$. Поскольку подалгебра A содержит постоянные функции, достаточно рассмотреть случай, когда $0 \le a \le \mathbf{1}$ и при этом

$$q \in \operatorname{supp}(\mu) \Rightarrow 0 < a(q) < \mathbf{1}.$$

Положим $\mu_1 := a\mu$ и $\mu_2 := (\mathbf{1} - a)\mu$. Ясно, что $\mu_1 + \mu_2 = \mu$, причем функционалы μ_1 и μ_2 ненулевые. Более того,

$$\|\mu\| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\| =$$

$$= \sup_{\|f\| \leq \mathbf{1}} \mu(af) + \sup_{\|g\| \leq \mathbf{1}} \mu((\mathbf{1} - a)g) = \sup_{\|f\| \leq \mathbf{1}, \|g\| \leq \mathbf{1}} \mu(af + (\mathbf{1} - a)g) \leq \|\mu\|,$$

ибо очевидным образом выполнено

$$aB_{C(Q,\,\mathbb{R})} + (\mathbf{1} - a)B_{C(Q,\,\mathbb{R})} \subset B_{C(Q,\,\mathbb{R})}.$$

Итак, $\|\mu\| = \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$. Следовательно, из представления

$$\mu = \|\mu_1\| \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|} + \|\mu_2\| \frac{\mu_2}{\|\mu_2\|},$$

учитывая, что $\mu_1, \mu_2 \in A^{\perp}$, заключаем: $\mu_1 = \|\mu_1\| \mu$. В силу 10.8.15, $a|\mu| = |a\mu| = |\mu_1| = \|\mu_1\| \, |\mu|$. Значит, $|\mu|((a - \|\mu_1\| \mathbf{1})g) = 0$ для всех $g \in C(Q,\ \mathbb{R})$. Используя 10.8.13 и 10.8.14, выводим, что функция a постоянна на носителе μ. $\triangleright$

10.8.17. *Теорема Стоуна — Вейерштрасса.* *Каждая содержащая постоянные функции и разделяющая точки подалгебра $C(Q,\ \mathbb{R})$ плотна в алгебре $C(Q,\ \mathbb{R})$.*

$\triangleleft$ По теореме об абсолютной биполяре 10.5.9 в случае, если рассматриваемая подалгебра A не плотна в $C(Q,\ \mathbb{R})$, подпространство $A^{\perp}$ (оно же — A°) в $C(Q,\ \mathbb{R})'$ ненулевое.

Привлекая теорему Алаоглу — Бурбаки 10.6.7, видим, что $A^{\perp} \cap B_{C(Q,\mathbb{R})'}$ — это непустое абсолютно выпуклое слабо компактное множество, а потому на основании теоремы Крейна — Мильмана 10.6.5 в нем имеется крайняя точка μ.

Несомненно, что μ — ненулевой функционал. В то же время по лемме де Бранжа носитель μ не может содержать двух различных точек, ибо A разделяет точки Q. Носитель μ не является одноточечным множеством, поскольку μ обращается в нуль на постоянных функциях. Стало быть, $\operatorname{supp}(\mu)$ — это пустое множество. Последнее означает (см. 10.8.13), что μ — нулевой функционал. Получили противоречие, показывающее, что подпространство A плотно в $C(Q,\ \mathbb{R})$. $\triangleright$

10.8.18. *Следствие.* *Замыкание любой подалгебры в* $C(Q,\ \mathbb{R})$ *— векторная подрешетка в* $C(Q,\ \mathbb{R})$.

$\lhd$ По теореме Стоуна — Вейерштрасса можно подыскать многочлен p_n такой, что при всех $t \in [-1,\ 1]$ будет

$$|p_n(t) - |t|\,| \leq \frac{1}{2n}.$$

Тогда $|p_n(0)| \leq 1/2n$. Поэтому для многочлена

$$\overline{p}_n(t) := p_n(t) - p_n(0)$$

выполнено $|\overline{p}_n(t) - |t|\,| \leq 1/n$ при $-1 \leq t \leq 1$. По построению у $\overline{p}_n$ нет свободного члена. Если теперь функция a лежит в подалгебре A в $C(Q,\ \mathbb{R})$ и $\|a\| \leq 1$, то

$$|\overline{p}_n(a(q)) - |a(q)|\,| \leq \frac{1}{n} \quad (q \in Q).$$

При этом элемент $q \mapsto \overline{p}_n(a(q))$, конечно же, содержится в A. $\rhd$

10.8.19. Замечание. Следствие 10.8.18 (вместе с 10.8.8) дает полное описание всех замкнутых подалгебр в $C(Q,\ \mathbb{R})$. В свою очередь, как видно из доказательства, 10.8.18 легко установить, непосредственно предъявляя какую-либо последовательность многочленов, равномерно сходящуюся к функции $t \mapsto |t|$ на отрезке $[-1,\ 1]$. Вывести 10.8.17, опираясь на 10.8.18, не составляет труда.

10.8.20. *Теорема Титце — Урысона.* *Пусть* Q_0 *— компактное подмножество* Q *и* $f_0 \in C(Q_0,\ \mathbb{R})$. *Тогда существует функция* $f \in C(Q,\ \mathbb{R})$ *такая, что* $f\big|_{Q_0} = f_0$.

$\lhd$ Пусть $Q_0 \neq \varnothing$ (иначе нечего доказывать). Рассмотрим вложение $\iota : Q_0 \to Q$ и возникающий ограниченный линейный оператор $\overset{\circ}{\iota} : C(Q,\ \mathbb{R}) \to C(Q_0,\ \mathbb{R})$, действующий по правилу $\overset{\circ}{\iota} f := f \circ \iota$. Требуется установить, что $\overset{\circ}{\iota}$ — эпиморфизм. Поскольку несомненно, что $\operatorname{im} \overset{\circ}{\iota}$ — это разделяющая точки, содержащая постоянные функции подалгебра $C(Q_0,\ \mathbb{R})$, в силу 10.8.17 достаточно (и, разумеется, необходимо) проверить, что $\operatorname{im} \overset{\circ}{\iota}$ — замкнутое подпространство.

Рассмотрим снижение $\bar{\iota}$ оператора $\overset{\circ}{\iota}$ на собственный кообраз $\operatorname{coim}\overset{\circ}{\iota} := C(Q,\ \mathbb{R})/\ker\overset{\circ}{\iota}$ и соответствующее каноническое отображение φ. Для $f \in C(Q,\ \mathbb{R})$ положим

$$g := (f \wedge \sup|f(Q_0)|\mathbf{1}) \vee (-\sup|f(Q_0)|\mathbf{1}).$$

По определению $f\big|_{Q_0} = g\big|_{Q_0}$, т. е. $\overline{f} := \varphi(f) = \varphi(g)$. Значит, $\|g\| \geq \|\overline{f}\|$. Помимо этого,

$$\begin{gathered}\|\overline{f}\| = \inf\big\{\|h\|_{C(Q,\mathbb{R})} :\ \overset{\circ}{\iota}(h-f)=0\big\} = \\ = \inf\big\{\|h\|_{C(Q,\mathbb{R})} :\ h\big|_{Q_0} = f\big|_{Q_0}\big\} \geq \\ \geq \inf\big\{\|h\big|_{Q_0}\|_{C(Q,\mathbb{R})} :\ h\big|_{Q_0} = f\big|_{Q_0}\big\} = \\ = \sup|f(Q_0)| = \|g\| \geq \|\overline{f}\|.\end{gathered}$$

Таким образом, выполнено

$$\begin{gathered}\|\bar{\iota}\overline{f}\| = \|\overset{\circ}{\iota}g\| = \|\overset{\circ}{\iota}g\|_{C(Q_0,\mathbb{R})} = \\ = \|g\circ\iota\|_{C(Q_0,\mathbb{R})} = \sup|g(Q_0)| = \|g\| = \|\overline{f}\|,\end{gathered}$$

т. е. $\bar{\iota}$ — изометрия. Применяя последовательно 5.5.4 и 4.5.15, выводим сначала, что $\operatorname{coim}\overset{\circ}{\iota}$ — банахово пространство, а затем — что $\operatorname{im}\bar{\iota}$ замкнуто в $C(Q_0,\ \mathbb{R})$. Осталось заметить, что $\operatorname{im}\overset{\circ}{\iota} = \operatorname{im}\bar{\iota}$. ▷

10.9. Меры Радона

10.9.1. Определение. Пусть Ω — локально компактное топологическое пространство. Полагают $K(\Omega) := K(\Omega,\ \mathbb{F}) := \{f \in C(\Omega,\ \mathbb{F}) :\ \operatorname{supp}(f)$ — компакт$\}$. Если Q — компакт в Ω, то считают $K(Q) := K_\Omega(Q) := \{f \in K(\Omega) :\ \operatorname{supp}(f) \subset Q\}$. Пространство $K(Q)$ наделяют нормой $\|\cdot\|_\infty$. При $E \in \operatorname{Op}(\Omega)$ полагают $K(E) := \cup\{K(Q) :\ Q \Subset E\}$. (Запись $Q \Subset E$ для подмножества E в Ω означает, что Q компактно и Q лежит во внутренности E, вычисленной в пространстве Ω.)

10.9.2. *Справедливы утверждения:*

(1) *для $Q \Subset \Omega$ и $f \in C(Q,\ \mathbb{F})$ верно*

$$f\big|_{\partial Q} = 0 \Leftrightarrow \Big(\big(\exists\, g \in K(Q)\ g\big|_Q = f\big)\Big).$$