Рассмотрим снижение $\bar\iota$ оператора $\overset{\circ}{\iota}$ на собственный кообраз $\operatorname{coim}\overset{\circ}{\iota} := C(Q,\ \mathbb{R})/\ker\overset{\circ}{\iota}$ и соответствующее каноническое отображение φ. Для $f \in C(Q,\ \mathbb{R})$ положим

$$g := (f \wedge \sup|f(Q_0)|\mathbf{1}) \vee (-\sup|f(Q_0)|\mathbf{1}).$$

По определению $f\big|_{Q_0} = g\big|_{Q_0}$, т. е. $\overline{f} := \varphi(f) = \varphi(g)$. Значит, $\|g\| \geq \|\overline{f}\|$. Помимо этого,

$$\begin{gathered}\|\overline{f}\| = \inf\big\{\|h\|_{C(Q,\mathbb{R})} :\ \overset{\circ}{\iota}(h-f) = 0\big\} = \\ = \inf\big\{\|h\|_{C(Q,\mathbb{R})} :\ h\big|_{Q_0} = f\big|_{Q_0}\big\} \geq \\ \geq \inf\big\{\|h\big|_{Q_0}\|_{C(Q,\mathbb{R})} :\ h\big|_{Q_0} = f\big|_{Q_0}\big\} = \\ = \sup|f(Q_0)| = \|g\| \geq \|\overline{f}\|.\end{gathered}$$

Таким образом, выполнено

$$\begin{gathered}\|\bar\iota\overline{f}\| = \|\overset{\circ}{\iota}g\| = \|\overset{\circ}{\iota}g\|_{C(Q_0,\mathbb{R})} = \\ = \|g\circ\iota\|_{C(Q_0,\mathbb{R})} = \sup|g(Q_0)| = \|g\| = \|\overline{f}\|,\end{gathered}$$

т. е. $\bar\iota$ — изометрия. Применяя последовательно 5.5.4 и 4.5.15, выводим сначала, что $\operatorname{coim}\overset{\circ}{\iota}$ — банахово пространство, а затем — что $\operatorname{im}\bar\iota$ замкнуто в $C(Q_0,\ \mathbb{R})$. Осталось заметить, что $\operatorname{im}\overset{\circ}{\iota} = \operatorname{im}\bar\iota$. $\rhd$

10.9. Меры Радона

10.9.1. Определение. Пусть Ω — локально компактное топологическое пространство. Полагают $K(\Omega) := K(\Omega,\ \mathbb{F}) := \{f \in C(\Omega,\ \mathbb{F}) :\ \operatorname{supp}(f) \text{ — компакт}\}$. Если Q — компакт в Ω, то считают $K(Q) := K_\Omega(Q) := \{f \in K(\Omega) :\ \operatorname{supp}(f) \subset Q\}$. Пространство $K(Q)$ наделяют нормой $\|\cdot\|_\infty$. При $E \in \operatorname{Op}(\Omega)$ полагают $K(E) := \cup\{K(Q) :\ Q \Subset E\}$. (Запись $Q \Subset E$ для подмножества E в Ω означает, что Q компактно и Q лежит во внутренности E, вычисленной в пространстве Ω.)

10.9.2. *Справедливы утверждения:*

(1) *для $Q \Subset \Omega$ и $f \in C(Q,\ \mathbb{F})$ верно*

$$f\big|_{\partial Q} = 0 \Leftrightarrow \Big(\big(\exists\, g \in K(Q)\ g\big|_Q = f\big)\Big).$$

При этом $K(Q)$ — банахово пространство;

(2) *пусть $Q,\ Q_1,\ Q_2$ — компактные множества и $Q \Subset Q_1 \times Q_2$. Линейная оболочка в $C(Q,\ \mathbb{F})$ следов на Q функций вида $u_1 \cdot u_2(q_1,\ q_2) := u_1 \otimes u_2(q_1,\ q_2) := u_1(q_1)u_2(q_2)$ для $u_s \in K(Q_s)$ плотна в $C(Q,\ \mathbb{F})$;*

(3) *если Ω — компакт, то $K(\Omega) = C(\Omega,\ \mathbb{F})$. Пусть Ω не компактно. Тогда при естественном вложении в $C(\Omega^{\cdot},\ \mathbb{F})$, где $\Omega^{\cdot} := \Omega \cup \{\infty\}$ — александровская компактификация Ω, пространство $K(\Omega)$ плотно в гиперплоскости $\{f \in C(\Omega^{\cdot},\ \mathbb{F}) :\ f(\infty) = 0\}$;*

(4) *отображение $E \in \mathrm{Op}\,(\Omega) \mapsto K(E) \in \mathrm{Lat}\,(K(\Omega))$ сохраняет точные верхние границы;*

(5) *для $E',\, E'' \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ точна следующая последовательность:*

$$0 \to K(E' \cap E'') \xrightarrow{\iota_{(E',E'')}} K(E') \times K(E'') \xrightarrow{\sigma_{(E',E'')}} K(E' \cup E'') \to 0,$$

где $\iota_{(E',E'')}f := (f,\ -f)$, $\sigma_{(E',E'')}(f,\ g) := f + g$.

$\lhd$ (1) Граница ∂Q — это и граница внешности $\mathrm{int}(\Omega \setminus Q)$.

(2) Исследуемое множество — подалгебра. Заключение следует из 9.3.13 и 10.8.17 (ср. 11.8.2).

(3) Можно считать, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Учитывая, что $K(\Omega)$ — порядковый идеал, в силу 10.8.8 заключаем требуемое (ибо $K(\Omega)$ разделяет точки $\Omega^{\cdot}$) (ср. 10.8.11).

(4) Ясно, что $K(\sup \varnothing) = K(\varnothing) = 0$. Если $\mathscr{E} \subset \mathrm{Op}\,(\Omega)$ и $\mathscr{E}$ фильтровано по возрастанию, то для $f \in K(\cup\mathscr{E})$ будет: $\mathrm{supp}(f) \subset E$ для некоторого $E \in \mathscr{E}$ (в силу компактности $\mathrm{supp}(f)$). Отсюда $K(\cup\mathscr{E}) = \cup\{K(E) :\ E \in \mathscr{E}\}$. Пусть, наконец, $E_1, \dots, E_n \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ и $f \in K(E_1 \cup \ldots \cup E_n)$. В соответствии с 9.4.18 имеются $\psi_k \in K(E_k)$ такие, что $\sum_{k=1}^n \psi_k = \mathbf{1}$. При этом $f = \sum_{k=1}^n \psi_k f$ и $\mathrm{supp}(f\psi_k) \subset E_k$ $(k := 1, \dots, n)$.

(5) немедленно следует из (4). $\rhd$

10.9.3. Определение. Функционал $\mu \in K(\Omega,\ \mathbb{F})^{\#}$ называют *мерой* (более полно, $\mathbb{F}$-*мерой*) *Радона* на Ω и пишут $\mu \in \mathscr{M}(\Omega) := \mathscr{M}(\Omega,\ \mathbb{F})$, если $\mu\big|_{K(Q)} \in K(Q)'$, как только $Q \Subset \Omega$. Используют обозначения

$$\int_\Omega f\,d\mu := \int f\,d\mu := \int f(x)\,d\mu(x) := \mu(f) \quad (f \in K(\Omega)).$$

Величину $\mu(f)$ называют *интегралом f по мере μ.* В этой связи меру μ именуют *интегралом.*

10.9.4. Примеры.

(1) Для $q \in \Omega$ *мера Дирака* $\delta_q : f \mapsto f(q)$ $(f \in K(\Omega))$ служит мерой Радона. Ее часто обозначают символом δ_q и называют *дельта-функцией в точке* q.

Пусть Ω дополнительно наделено структурой группы, причем обращение $q \in \Omega \mapsto q^{-1} \in \Omega$ и групповое умножение $(s,\ t) \in \Omega \times \Omega \mapsto st \in \Omega$ непрерывны, т. е. Ω — *локально компактная группа.* Символом δ обозначают δ_e, где e — единица Ω. Для абелевых (коммутативных) групп используется также символика, связанная со сложением.

В $K(\Omega)$ для $a \in \Omega$ имеются *операторы* (*левого и правого*) *сдвигов*

$$({}_a\tau f)(q) := {}_af(q) := f(a^{-1}q),$$
$$(\tau_a f)(q) := f_a(q) := f(qa^{-1})$$

$(f \in K(\Omega),\ q \in \Omega)$ (сдвигается f в $\Omega \times \mathbb{F}$). Ясно, что ${}_a\tau,\ \tau_a \in \mathscr{L}(K(\Omega))$. Важным и глубоким обстоятельством является наличие нетривиальной инвариантной относительно левых (соответственно, правых) сдвигов меры из $\mathscr{M}(\Omega,\ \mathbb{R})$. (Лево)инвариантные меры Радона пропорциональны. (Каждую) ненулевую (левоинвариантную) положительную меру Радона называют (*левой*) *мерой Хаара* (реже *интегралом Хаара*). В случае правых сдвигов используют термин (*правая*) *мера Хаара.* Для абелевых групп всегда говорят о *мерах Хаара.* В пространстве $\mathbb{R}^N$ такой мерой служит обычная *мера Лебега.* В связи с этим для обозначения общих мер Хаара и интегралов по ним используют символику, аналогичную принятой для меры Лебега. В частности, условие левоинвариантности записывают в виде

$$\int_\Omega f(a^{-1}x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx \quad (f \in K(\Omega),\ a \in \Omega).$$

(2) Пусть $M(\Omega) := (K(\Omega),\ \|\cdot\|_\infty)'$. Элементы $M(\Omega)$ называют *конечными* или *ограниченными мерами Радона.* Ясно, что ограниченные меры взяты из пространства $C(\Omega^\cdot,\ \mathbb{F})'$ (см. 10.9.2 (2)).

(3) Для $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ полагают $\mu^*(f) = \mu(f^*)^*$, где $f^*(q) := f(q)^*$ для $q \in \Omega$ и $f \in K(\Omega)$. Меру μ^* называют *эрмитово сопряженной к* μ. Различие μ^* и μ возникает лишь при $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Если $\mu = \mu^*$, то говорят о *вещественной* $\mathbb{C}$-мере. Ясно, что $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1, μ_2 — единственным образом определенные вещественные $\mathbb{C}$-меры. В свою очередь, вещественная $\mathbb{C}$-мера порождается двумя $\mathbb{R}$-*мерами* (*вещественными мерами из* $\mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R})$), ибо $K(\Omega, \mathbb{C})$ — это комплексификация $K(\Omega, \mathbb{R}) \oplus iK(\Omega, \mathbb{R})$. Вещественные $\mathbb{R}$-меры, очевидно, составляют K-пространство. При этом интеграл по мере служит (пред)интегралом и возникает возможность без особых оговорок рассматривать соответствующие лебеговы расширения и связанные с ними пространства суммируемых (в том числе векторнозначных) функций (ср. 5.5.9 (4), 5.5.9 (5)).

С каждой мерой Радона μ связывают положительную меру $|\mu|$, определенную для $f \in K(\Omega, \mathbb{R})$, $f \geq 0$, соотношением

$$|\mu|(f) := \sup\{|\mu(g)| : \ g \in K(\Omega, \mathbb{F}), \ |g| \leq f\}.$$

Часто под словом меры понимают положительные меры, прочие меры в этом случае называют *зарядами*.

Меры μ и ν называют *дизъюнктными* или *независимыми*, если $|\mu| \wedge |\nu| = 0$. Меру ν называют *абсолютно непрерывной относительно* μ, если ν не зависит от мер, независимых от μ. Такую меру ν можно задать в виде $\nu = f\mu$, где $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mu)$ и мера $f\mu$ (*с плотностью* f *относительно* μ) действует по правилу $(f\mu)(g) := \mu(fg)$ $(g \in K(\Omega))$ (= *теорема Радона — Никодима*).

(4) Если $\Omega' \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ и $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$, то определено *сужение* $\mu_{\Omega'} := \mu\big|_{K(\Omega')}$. *Оператор ограничения* $\mu \mapsto \mu_{\Omega'}$ из $\mathscr{M}(\Omega)$ в $\mathscr{M}(\Omega')$ удовлетворяет *условию согласования*: для $\Omega'' \subset \Omega' \subset \Omega$ и $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ верно $\mu_{\Omega''} = (\mu_{\Omega'})_{\Omega''}$. Эту ситуацию выражают словами: отображение $\mathscr{M} : E \in \mathrm{Op}\,(\Omega) \mapsto \mathscr{M}(E)$ и оператор ограничения (= *функтор* $\mathscr{M}$) задают *предпучок* (векторных пространств). Полезно убедиться, что отображение ограничения мер Радона не обязано быть эпиморфизмом.

(5) Пусть $E \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ и $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$. Говорят, что в E *нет* μ или что $\Omega \setminus E$ *несёт* μ, если $\mu_E = 0$. На основании 10.9.2 (4) существует наименьшее замкнутое множество $\mathrm{supp}(\mu)$, несущее μ, —

носитель меры μ. Устанавливается, что $\operatorname{supp}(\mu) = \operatorname{supp}(|\mu|)$. Введенное определение согласовано с 10.8.12. Мера Дирака δ_q — единственная с точностью до множителя мера Радона с носителем $\{q\}$.

(6) Пусть Ω_k — локально компактное пространство и $\mu_k \in \mathscr{M}(\Omega_k)$ $(k := 1, 2)$. На произведении $\Omega_1 \times \Omega_2$ существует, и притом единственная, мера μ такая, что для $u_k \in K(\Omega_k)$ выполнено

$$\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} u_1(x)u_2(y)\,d\mu(x,y) = \int\limits_{\Omega_1} u_1(x)\,d\mu_1(x) \int\limits_{\Omega_2} u_2(y)\,d\mu_2(y).$$

Используют обозначения $\mu_1 \times \mu_2 := \mu_1 \otimes \mu_2 := \mu$. Привлекая 10.9.2 (4), видим, что для $f \in K(\Omega_1 \times \Omega_2)$ значение $\mu_1 \times \mu_2(f)$ можно вычислить повторным интегрированием (= *теорема Фубини для мер*).

(7) Пусть G — локально компактная группа и заданы $\mu,\ \nu \in M(G)$. Для $f \in K(G)$ функция $\dot{f}(s,\ t) := f(st)$ непрерывна и $|(\mu \times \nu)(\dot{f})| \le \|\mu\|\,\|\nu\|\,\|f\|_\infty$. Тем самым определена мера Радона $\mu * \nu(f) := (\mu\times\nu)(\dot{f})$ $(f \in K(G))$, называемая *свёрткой* μ *и* ν. Используя векторные интегралы, получаем представления:

$$\mu * \nu = \int\limits_{G\times G} \delta_s * \delta_t\,d\mu(s)d\nu(t) =$$

$$= \int\limits_G \delta_s * \nu\,d\mu(s) = \int\limits_G \mu * \delta_t\,d\nu(t).$$

Пространство ограниченных мер относительно свёртки представляет собой банахову алгебру — *свёрточную алгебру* $M(G)$. Эта алгебра коммутативна в том и только в том случае, когда G — абелева группа. В названном случае пространство $L_1(G)$, построенное относительно меры Хаара m, также обладает естественной структурой свёрточной алгебры (подалгебры $M(G)$). Ее называют *групповой алгеброй* G. Таким образом, для $f,\ g \in L_1(G)$ определения свёрток функций и мер согласованы (ср. 9.6.17): $(f*g)dm = fdm*gdm$. Аналогично определяют *свёртку* $\mu \in M(G)$ *и* $f \in L_1(G)$ соотношением $(\mu * f)dm := \mu * (fdm)$, т. е. как плотность свёртки относительно меры Хаара. При этом, в частности,

$$f * g = \int\limits_G \sigma_x * gf(x)\,dm(x) = \int\limits_G \tau_x(g)f(x)\,dm(x).$$

Теорема Венделя. *Пусть $T \in B(L_1(G))$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(i) *существует мера $\mu \in M(G)$ такая, что $Tf = \mu * f$ при $f \in L_1(G)$;*

(ii) *T перестановочен со сдвигами: $T\tau_a = \tau_a T$ для $a \in G$, где τ_a — единственное ограниченное продолжение оператора сдвига с $K(G)$ на $L_1(G)$;*

(iii) *$T(f * g) = (Tf) * g$ при $f,\ g \in L_1(G)$;*

(iv) *$T(f * \nu) = (Tf) * \nu$ для $\nu \in M(G)$, $f \in L_1(G)$.*

10.9.5. Определение. Пространства $K(\Omega)$ и $\mathscr{M}(\Omega)$ приведены в двойственность (индуцированную двойственностью $K(\Omega) \leftrightarrow K(\Omega)^{\#}$). При этом пространство $\mathscr{M}(\Omega)$ наделяют локально выпуклой топологией $\sigma(\mathscr{M}(\Omega),\ K(\Omega))$, которую обычно называют *широкой*. Пространство $K(\Omega)$ в свою очередь снабжают топологией Макки $\tau_{K(\Omega)} := \tau(K(\Omega),\ \mathscr{M}(\Omega))$ (поэтому, в частности, $(K(\Omega),\ \tau_{K(\Omega)})' = \mathscr{M}(\Omega)$). Пространство ограниченных мер $M(\Omega)$ рассматривают, как правило, с сопряженной нормой: $\|\mu\| := \sup\{|\mu(f)| :\ \|f\|_\infty \le 1,\ f \in K(\Omega)\}$ $(\mu \in M(\Omega))$.

10.9.6. *Топология $\tau_{K(\Omega)}$ — сильнейшая из таких локально выпуклых топологий, что вложение $K(Q)$ в $K(\Omega)$ непрерывно при всех Q, для которых $Q \Subset \Omega$ (т. е. $\tau_{K(\Omega)}$ — топология индуктивного предела (ср. 9.2.15)).*

$\triangleleft$ Если τ — топология индуктивного предела и $\mu \in (K(\Omega),\ \tau)'$, то по определению $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$, ибо $\mu \circ \iota_{K(Q)}$ непрерывно при $Q \Subset \Omega$. В свою очередь, для $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ множество $V_Q := \{f \in K(Q) : |\mu(f)| \le 1\}$ — окрестность нуля в $K(Q)$. Учитывая определение τ, видим, что $\cup\{V_Q :\ Q \Subset \Omega\} = \{f \in K(\Omega) :\ |\mu(f)| \le 1\}$ — окрестность нуля в τ. Стало быть, $\mu \in (K(\Omega),\ \tau)'$ и τ согласована с двойственностью. Поэтому $\tau \le \tau_{K(\Omega)}$.

С другой стороны, если p — полунорма из зеркала топологии Макки, то p — опорная функция субдифференциала в $\mathscr{M}(\Omega)$. Следовательно, ее сужение $q := p \circ \iota_{K(Q)}$ на $K(Q)$ во всяком случае полунепрерывно снизу. По теореме Гельфанда 7.2.2 (из-за бочечности $K(Q)$) полунорма q непрерывна. Значит, вложение $\iota_{K(Q)} : K(Q) \to (K(\Omega),\ \tau_{K(\Omega)})$ непрерывно и $\tau \ge \tau_{K(\Omega)}$ по определению индуктивного предела. $\triangleright$

10.9.7. *Множество A в $K(\mathbb{R}^N)$ ограничено (в топологии индуктивного предела), если* $\sup \|A\|_\infty < +\infty$ *и, кроме того, носители элементов A лежат в общем компакте.*

$\triangleleft$ Пусть вопреки доказываемому для $Q \Subset \mathbb{R}^N$ не верно, что $A \subset K(Q)$. Иначе говоря, пусть для $n \in \mathbb{N}$ имеются $q_n \in \mathbb{R}^N$ и $a_n \in A$, для которых $a_n(q_n) \neq 0$ и $|q_n| > n$. Взяв $B := \{n|a_n(q_n)|^{-1}\delta_{q_n} : n \in \mathbb{N}\}$, видим, что это множество мер Радона широко ограничено и, стало быть, полунорма $p(f) := \sup\{|\mu|(|f|) : \mu \in B\}$ непрерывна. При этом $p(a_n) \geq n|a_n(q_n)|^{-1}\delta_{q_n}(|a_n|) = n$, что противоречит ограниченности A. $\triangleright$

10.9.8. Замечание. Пусть $(f_n) \subset K(\mathbb{R}^N)$. Пишут $f_n \twoheadrightarrow_K 0$, если $(\exists\, Q \Subset \mathbb{R}^N)(\forall\, n)$ $\operatorname{supp}(f_n) \subset Q\ \&\ \|f_n\|_\infty \to 0$. Из 10.9.7 немедленно следует, что $\mu \in K(\mathbb{R}^N)^\#$ *является мерой Радона, если $\mu(f_n) \to 0$, как только $f_n \twoheadrightarrow_K 0$.* Отметим также, что это сохраняется для любого локально компактного Ω, *счетного в бесконечности*, т. е. представляющего собой объединение счетного семейства компактных пространств.

10.9.9. Замечание. На $\mathbb{R}$ существуют последовательности вещественных положительных многочленов (p_n) такие, что меры $p_n dx$ широко сходятся к δ при $n \to +\infty$. Рассматривая произведения мер, приходим к таким полиномам P_n на пространстве $\mathbb{R}^N$, что $P_n dx$ широко сходятся к δ (здесь, как обычно, $dx := dx_1 \times \ldots \times dx_N$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^N$).

Пусть теперь $f \in K(\mathbb{R}^N)$ и f принадлежит классу $C^{(m)}$ в некоторой окрестности компакта Q (т. е. имеет там соответствующие непрерывные производные). Рассматривая свёртки $(f * P_n)$, видим, что это последовательность многочленов, равномерно аппроксимирующая на Q как f, так и ее производные до порядка m включительно.

Возможность подобной регуляризации принято называть *обобщенной теоремой Вейерштрасса* в $\mathbb{R}^N$ (ср 10.10.2 (4)).

10.9.10. ***Теорема о локальном задании меры.*** *Пусть $\mathscr{E}$ — открытое покрытие Ω и $(\mu_E)_{E\in\mathscr{E}}$ — семейство мер Радона: $\mu_E \in \mathscr{M}(E)$, причем для любой пары (E', E'') элементов $\mathscr{E}$ сужения мер $\mu_{E'}$ и $\mu_{E''}$ на $E' \cap E''$ совпадают. Тогда существует, и притом единственная, мера μ на Ω, сужение которой на E равно μ_E для любого $E \in \mathscr{E}$.*

$\lhd$ Привлекая 10.9.2 (5), построим последовательность

$$\sum_{\substack{\{E',E''\}\\ E',E''\in\mathscr{E}, E'\neq E''}} K(E'\cap E'') \xrightarrow{\iota} \sum_{E\in\mathscr{E}} K(E) \xrightarrow{\sigma} K(\Omega) \to 0,$$

где ι порождено суммированием «координатных» вложений $\iota_{(E',E'')}$, а σ — обычное сложение. Прямые суммы по общему правилу топологизированы как индуктивные пределы (ср. 10.9.6).

Убедимся в точности построенной последовательности. Поскольку выполнено $K(\Omega) = \cup_{Q\Subset\Omega} K(Q)$, с учетом 10.9.2 (4), можно ограничиться случаем конечного покрытия и установить точность во втором члене.

Итак, пусть для покрытий из n элементов $\{E_1, \dots, E_n\}$ $(n \geq 2)$ доказано, что точна последовательность

$$K_n \xrightarrow{\iota_n} \prod_{k=1}^{n} K(E_k) \xrightarrow{\sigma_n} K(E_1 \cup \ldots \cup E_n) \to 0,$$

где ι_n — «сужение» ι на K_n, а отображение σ_n — суммирование и

$$K_n := \prod_{\substack{k<l\\ k,l\in\{1,\dots,n\}}} K(E_k \cap E_l).$$

По допущению $\operatorname{im}\iota_n = \ker\sigma_n$. Если $\sigma_{n+1}(\widetilde{f},\ f_{n+1}) = 0$, где $\widetilde{f} := (f_1, \dots, f_n)$, то $\sigma_n \widetilde{f} = -f_{n+1}$ и $f_{n+1} \in K((E_1 \cup \ldots \cup E_n) \cap E_{n+1})$.

На основании эпиморфности σ_n, обеспеченной 10.9.2 (5), существуют $\theta_k \in K(E_k \cap E_{n+1})$ такие, что для $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_n)$ будет $\sigma_n\theta = -f_{n+1}$. Отсюда $(\widetilde{f} - \theta) \in \ker\sigma_n$ и по допущению можно подобрать $\varkappa \in K_n$, для которого $\iota_n\varkappa = \widetilde{f} - \theta$. Ясно, что

$$K_{n+1} = K_n \times \prod_{k=1}^{n} K(E_k \cap E_{n+1})$$

(с точностью до изоморфизма), $\overline{\varkappa} := (\varkappa,\ \theta_1, \dots, \theta_n) \in K_{n+1}$ и $\iota_{n+1}\overline{\varkappa} = (\widetilde{f},\ f_{n+1})$.

Переходя к сопряженной диаграмме (ср. 7.6.13), имеем точную последовательность

$$0 \to \mathscr{M}(\Omega) \xrightarrow{\sigma'} \prod_{E\in\mathscr{E}} \mathscr{M}(E) \xrightarrow{\iota'} \prod_{\substack{\{E',E''\}\\ E',E''\in\mathscr{E}, E'\neq E''}} \mathscr{M}(E'\cap E'').$$

Это и требовалось установить. $\rhd$

10.9.11. Замечание. В топологии предпучки, допускающие такую возможность локального задания своих элементов, называют *пучками.* В этой связи утверждение 10.9.10 выражают словами: предпучок мер Радона $\Omega \mapsto \mathscr{M}(\Omega)$ — это *пучок* или, более категорично, *функтор* $\mathscr{M}$ — *пучок* (ср. 10.9.4 (4)).

10.10. Пространства $\mathscr{D}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'(\Omega)$

10.10.1. Определение. *Основной* или *пробной* называют финитную гладкую функцию $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{F}$. При этом пишут $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) := \mathscr{D}(\mathbb{R}^N,\ \mathbb{F})$. Для $Q \Subset \mathbb{R}^N$ и $\Omega \in \mathrm{Op}\,(\mathbb{R}^N)$ полагают $\mathscr{D}(Q) := \{f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) :\ \mathrm{supp}(f) \subset Q\}$ и $\mathscr{D}(\Omega) := \cup\{\mathscr{D}(Q) :\ Q \Subset \Omega\}$.

10.10.2. *Справедливы утверждения:*

(1) $\mathscr{D}(Q) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{int}\, Q = \varnothing$;

(2) *пусть* $Q \Subset \mathbb{R}^N$ *и*

$$\|f\|_{n,Q} := \sum_{|\alpha| \le n} \|\partial^\alpha f\|_{C(Q)} :=$$

$$:= \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_N \le n}} \sup |(\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n} f)(Q)|$$

для гладкой (в окрестности Q*) функции* f *(как обычно,* $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$*). Мультинорма* $\mathfrak{M}_Q := \{\|\cdot\|_{n,Q} :\ n \in \mathbb{N}\}$ *превращает* $\mathscr{D}(Q)$ *в пространство Фреше;*

(3) *пространство гладких функций* $C_\infty(\Omega) := \mathscr{E}(\Omega)$ *на* $\Omega \in \mathrm{Op}\,(\mathbb{R}^N)$ *с мультинормой* $\mathfrak{M}_\Omega := \{\|\cdot\|_{n,Q} :\ n \in \mathbb{N},\ Q \Subset \Omega\}$ *— пространство Фреше. При этом* $\mathscr{D}(\Omega)$ *плотно в* $C_\infty(\Omega)$*;*

(4) *пусть* $Q_1 \Subset \mathbb{R}^N$, $Q_2 \Subset \mathbb{R}^M$ *и* $Q \Subset Q_1 \times Q_2$*. Линейная оболочка в* $\mathscr{D}(Q)$ *следов на* Q *функций вида* $f_1 f_2(q_1,\ q_2) := f_1 \otimes f_2(q_1,\ q_2) := f_1(q_1) f_2(q_2)$, *где* $q_k \in Q_k$, $f_k \in \mathscr{D}(Q_k)$, *плотна в* $\mathscr{D}(Q)$*;*

(5) *отображение* $E \in \mathrm{Op}\,(\Omega) \mapsto \mathscr{D}(E) \in \mathrm{Lat}\,(\mathscr{D}(\Omega))$ *сохраняет точные верхние границы:*

$$\mathscr{D}(E' \cap E'') = \mathscr{D}(E') \cap \mathscr{D}(E''),$$

$$\mathscr{D}(E' \cup E'') = \mathscr{D}(E') + \mathscr{D}(E'');$$

$$\mathscr{D}(\cup \mathscr{E}) = \mathscr{L}(\cup\{\mathscr{D}(E) :\ E \in \mathscr{E}\}) \quad (\mathscr{E} \subset \mathrm{Op}\,(\Omega)).$$