Глава 1

Экскурс в теорию множеств

1.1. Соответствия

1.1.1. Определение. Пусть A и B — множества и F — подмножество произведения $A \times B$. Тогда F называют *соответствием с областью отправления* A и *областью прибытия* B или, короче, соответствием из A в B.

1.1.2. Определение. Для соответствия $F \subset A \times B$ множество

$$\operatorname{dom} F := D(F) := \{a \in A : \ (\exists\, b \in B)\ (a,\ b) \in F\}$$

называют *областью определения* F, а множество

$$\operatorname{im} F := R(F) := \{b \in B : \ (\exists\, a \in A)\ (a,\ b) \in F\}$$

— *областью значений* или *образом* F.

1.1.3. Примеры.

(1) Если F — соответствие из A в B, то

$$F^{-1} := \{(b,\ a) \in B \times A : \ (a,\ b) \in F\}$$

— соответствие из B в A, называемое *обратным* к F. Ясно, что F обратно к соответствию F^{-1}.

(2) *Отношение* F в A — это соответствие $F \subset A \times A$.

(3) Пусть $F \subset A \times B$. Тогда F называют *однозначным* соответствием, если для каждого $a \in A$ из условий $(a,\ b_1) \in F$ и

$(a,\ b_2) \in F$ вытекает, что $b_1 = b_2$. В частности, если $U \subset A$ и $I_U := \{(a,\ a) \in A^2\ :\ a \in U\}$, то I_U — однозначное соответствие из A в B, о котором говорят и как о *тождественном отношении* или *тождестве* на U. Соответствие $F \subset A \times B$ называют *отображением* множества A в множество B, если F однозначно и $\operatorname{dom} F = A$. Соответствие I_U является отображением только при $A = U$. В этом случае I_U называют *тождественным отображением.* Отображение $F \subset A \times B$ обозначают символом $F : A \to B$. Стоит подчеркнуть, что при этом непременно $\operatorname{dom} F = A$ и в то же время образ $\operatorname{im} F$ может отличаться от B. Равенство $\operatorname{im} F = B$ выделяют словами: «F — *отображение* A *на* B».

Наконец, если соответствие $F^{-1} \subset B \times A$ оказывается однозначным, то исходное отображение $F : A \to B$ называют *взаимно однозначным.*

(4) Вместо отображений иногда говорят о семействах. Точнее, отображение $F : A \to B$ при желании называют *семейством* элементов B и обозначают просто $(b_a)_{a \in A}$, или $a \mapsto b_a$ $(a \in A)$, или даже (b_a). Имеется в виду, что $(a,\ b) \in F$ в том и только в том случае, если $b = b_a$. Допуская вольность, не различают семейство и его область значений.

(5) Пусть $F \subset A \times B$ — соответствие и $U \subset A$. Соответствие $F \cap (U \times B) \subset U \times B$ называют *сужением* F на U или *следом* F на U и обозначают $F|_U$. Множество $F(U) := \operatorname{im} F|_U$ называют *образом* множества U при соответствии F. Применяют естественные сокращения. Так, если F — отображение, то для элемента a пишут $F(a) = b$, подразумевая $F(\{a\}) = \{b\}$. Скобки в символе $F(a)$ часто опускают или изображают в ином начертании. Отметьте, наконец, что образ при обратном отображении называют прообразом. Точнее говоря, образ $F^{-1}(U)$ множества U в B при соответствии F^{-1} называют *прообразом* множества U при соответствии F.

1.1.4. Определение. Для $F \subset A \times B$ и $G \subset C \times D$ множество

$$G \circ F := \{(a,\ d) \in A \times D :\ (\exists\, b)\ (a,\ b) \in F\ \&\ (b,\ d) \in G\}$$

называют *композицией* или *суперпозицией* соответствий F и G. При этом $G \circ F$ рассматривают как соответствие из A в D.

1.1.5. Замечание. Объем понятия суперпозиции, по существу, не уменьшится, если в 1.1.4 заранее считать, что $B = C$.

1.1.6. *Пусть F — соответствие. Тогда $F \circ F^{-1} \supset I_{\operatorname{im} F}$. Более того, $F \circ F^{-1} = I_{\operatorname{im} F}$ в том и только в том случае, если $F|_{\operatorname{dom} F}$ — это отображение.* $\lhd\rhd$

1.1.7. *Пусть $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$ и $U \subset A$. Тогда для соответствия $G \circ F \subset A \times C$ будет $G \circ F(U) = G(F(U))$.* $\lhd\rhd$

1.1.8. *Пусть $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$, $H \subset C \times D$. Тогда соответствия $H \circ (G \circ F) \subset A \times D$ и $(H \circ G) \circ F \subset A \times D$ совпадают.* $\lhd\rhd$

1.1.9. Замечание. В силу 1.1.8 разумно определен символ $H \circ G \circ F$ и ему подобные выражения.

1.1.10. *Пусть F, G, H — три соответствия. Тогда*

$$H \circ G \circ F = \bigcup_{(b,c) \in G} F^{-1}(b) \times H(c).$$

$\lhd$ $(a,\ d) \in H \circ G \circ F \Leftrightarrow (\exists\, (b,\ c) \in G)\ (c,\ d) \in H\ \&\ (a,\ b) \in F \Leftrightarrow (\exists\ (b,\ c) \in G)\ a \in F^{-1}(b)\ \&\ d \in H(c)$ $\rhd$

1.1.11. Замечание. Предложение 1.1.10 и выкладка, приведенная в качестве его доказательства, с формальной точки зрения вопиюще некорректны, поскольку основываются на неоговоренной явно или на двусмысленной информации (в частности, на определении 1.1.1). Опыт позволяет считать указанную критику поверхностной. Поэтому в дальнейшем аналогичного рода удобные (а на самом деле и неизбежные) некорректности будут, как правило, использоваться без специальных оговорок и сожалений.

1.1.12. *Для соответствий G и F выполнено*

$$G \circ F = \bigcup_{b \in \operatorname{im} F} F^{-1}(b) \times G(b).$$

$\lhd$ В 1.1.10 полагаем: $H := G$, $G := I_{\operatorname{im} F}$ и $F := F$. $\rhd$

1.2. Упорядоченные множества

1.2.1. Определение. Пусть σ — отношение в множестве X, т. е. $\sigma \subset X^2$. *Рефлексивность* σ означает включение $\sigma \supset I_X$, *транзитивность* — включение $\sigma \circ \sigma \subset \sigma$, *антисимметричность* — включение $\sigma \cap \sigma^{-1} \subset I_X$ и, наконец, *симметричность* σ означает равенство $\sigma = \sigma^{-1}$.