Глава 11

Банаховы алгебры

11.1. Каноническое операторное представление

11.1.1. Определение. Элемент e алгебры A называют *единичным* или *единицей* алгебры, если $e \neq 0$ и при этом $ea = ae = a$ для всех $a \in A$.

11.1.2. Замечание. Как правило, без особых на то указаний, мы будем рассматривать только алгебры с единицами над основным полем $\mathbb{F}$. При этом простоты ради, если явно не оговорено противное, будем считать, что $\mathbb{F} := \mathbb{C}$. При изучении представлений таких алгебр естественно условиться, что единицы сохраняются. Иными словами, в дальнейшем представление алгебры A_1 в алгебре A_2 — это такой морфизм (= мультипликативный линейный оператор) A_1 в A_2, который единицу алгебры A_1 переводит в единицу алгебры A_2.

Для алгебры A без единицы проводят «*процесс присоединения единицы*». Именно, пространство $\mathscr{A}_e := A \times \mathbb{C}$ превращают в алгебру с единицей, полагая $(a,\ \lambda)(b,\ \mu) := (ab+\mu a+\lambda\mu)$, где $a,\ b \in A$ и $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$. В нормированном случае дополнительно считают $\|(a,\ \lambda)\|_{\mathscr{A}_e} := \|a\|_A + |\lambda|$.

11.1.3. Определение. Элемент $a_r \in A$ называют *правым обратным* к a, если $aa_r = e$. Элемент $a_l \in A$ называют *левым обратным* к a, если $a_l a = e$.

11.1.4. *Если у элемента есть левые и правые обратные, то они совпадают.*

$\lhd\ a_r = (a_l a)a_r = a_l(aa_r) = a_l e = a_l\ \rhd$

11.1.5. Определение. Элемент a алгебры A называют *обратимым* и пишут $a \in \operatorname{Inv}(A)$, если у a имеется левый и правый обратный. Полагают $a^{-1} := a_r = a_l$. Элемент a^{-1} называют *обратным* к a. Подалгебру (с единицей) B алгебры A называют *сервантной* (или *чистой*, или *наполненной*) в A, если $\operatorname{Inv}(B) = \operatorname{Inv}(A) \cap B$.

11.1.6. *Теорема.* *Пусть A — банахова алгебра. Для $a \in A$ положим $L_a : x \mapsto ax$ $(x \in A)$. Тогда отображение*

$$L_A := L : a \mapsto L_a \quad (a \in A)$$

является точным операторным представлением. При этом $L(A)$ — сервантная замкнутая подалгебра $B(A)$ и $L : A \to L(A)$ — топологический изоморфизм.

$\triangleleft$ Для $x,\ a,\ b \in A$ имеем

$$L(ab) : x \mapsto L_{ab}(x) = abx = a(bx) = L_a(L_b x) = (La)(Lb)x,$$

т. е. L — представление (ибо линейность L очевидна). Если $La = 0$, то $0 = La(e) = ae = a$, так что L — точное представление. Для доказательства замкнутости образа $L(A)$ рассмотрим алгебру A_r, совпадающую с A «как с векторным пространством» и с противоположным умножением $ab := ba$ $(a,\ b \in A)$.

Пусть $R := L_{A_r}$, т. е. $R_a := Ra : x \mapsto xa$ для $a \in A$. Проверим, что $L(A)$ совпадает с *централизатором* образа $R(A)$ — с замкнутой подалгеброй

$$Z(\operatorname{im} R) := \{T \in B(A) :\ TR_a = R_a T\ (a \in A)\}.$$

В самом деле, если $T \in L(A)$, т. е. $T = L_a$ для некоторого $a \in A$, то для каждого $b \in A$ будет $L_a R_b(x) = axb = R_b(L_a(x)) = R_b L_a(x)$ и $T \in Z(R(A))$. Если, в свою очередь, $T \in Z(R(A))$, то при $a := Te$ получаем

$$L_a x = ax = (Te)x = R_x(Te) = (R_x T)e = (TR_x)e = \\ = T(R_x e) = Tx$$

для всех $x \in A$. Значит, $T = L_a \in L(A)$. Таким образом, $L(A)$ — банахова подалгебра $B(A)$.

Пусть теперь для $T = L_a$ найдется T^{-1} в $B(A)$. Для $b := T^{-1}e$ имеем $ab = L_a b = Tb = TT^{-1}e = e$. Кроме того, $ab = e \Rightarrow aba = a \Rightarrow T(ba) = L_a ba = aba = a = L_a e = Te$. Отсюда $ba = e$, ибо T — мономорфизм. Итак, $L(A)$ — сервантная подалгебра в A.

В силу определения банаховой алгебры 5.6.3 выполнено

$$\|L\| = \sup\{\|La\| : \ \|a\| \le 1\} = \sup\{\|ab\| : \ \|a\| \le 1, \ \|b\| \le 1\} \le 1.$$

Привлекая теорему Банаха об изоморфизме 7.4.5, заключаем, что L — топологический изоморфизм (т. е. L^{-1} — непрерывный оператор из $L(A)$ на A). $\rhd$

11.1.7. Определение. Представление L_A, построенное в 11.1.6, называют *каноническим* (*левым*) *операторным представлением* алгебры A.

11.1.8. Замечание. Каноническое операторное представление позволяет ограничиться в дальнейшем рассмотрением банаховых алгебр, в которых единичные элементы нормированы — имеют единичную форму.

Для алгебры A указанного типа каноническое операторное представление L_A осуществляет изометрическое вложение A в $B(A)$ или, короче говоря, *изометрическое представление* A в $B(A)$. В этой же ситуации L_A часто называют *изометрическим изоморфизмом* алгебр A и $L(A)$. Ту же естественную терминологию употребляют и при рассмотрении представлений произвольных банаховых алгебр. Отметим здесь же, что существование канонического операторного представления L_A, в частности, оправдывает использование обозначения λ вместо λe для $\lambda \in \mathbb{C}$, где e — единица A (ср. 5.6.5). Иными словами, в дальнейшем $\mathbb{C}$ отождествлено с подалгеброй $\mathbb{C}e$ алгебры A посредством изометрического представления $\lambda \mapsto \lambda e$.

11.2. Спектр элемента алгебры

11.2.1. Определение. Пусть A — банахова алгебра и $a \in A$. Скаляр $\lambda \in \mathbb{C}$ называют *резольвентным значением* a (записывают: $\lambda \in \operatorname{res}(a)$), если существует *резольвента* $R(a, \lambda) := \frac{1}{\lambda - a} := (\lambda - a)^{-1}$. Множество $\operatorname{Sp}(a) := \mathbb{C} \setminus \operatorname{res}(a)$ называют *спектром элемента* a, а точки из $\operatorname{Sp}(a)$ — *спектральными значениями* a. Если есть необходимость, используют более подробные обозначения типа $\operatorname{Sp}_A(a)$.