Пусть теперь для $T = L_a$ найдется T^{-1} в $B(A)$. Для $b := T^{-1}e$ имеем $ab = L_a b = Tb = TT^{-1}e = e$. Кроме того, $ab = e \Rightarrow aba = a \Rightarrow T(ba) = L_a ba = aba = a = L_a e = Te$. Отсюда $ba = e$, ибо T — мономорфизм. Итак, $L(A)$ — сервантная подалгебра в A.

В силу определения банаховой алгебры 5.6.3 выполнено

$$\|L\| = \sup\{\|La\| : \ \|a\| \le 1\} = \sup\{\|ab\| : \ \|a\| \le 1, \ \|b\| \le 1\} \le 1.$$

Привлекая теорему Банаха об изоморфизме 7.4.5, заключаем, что L — топологический изоморфизм (т. е. L^{-1} — непрерывный оператор из $L(A)$ на A). $\triangleright$

11.1.7. Определение. Представление L_A, построенное в 11.1.6, называют *каноническим* (*левым*) *операторным представлением* алгебры A.

11.1.8. Замечание. Каноническое операторное представление позволяет ограничиться в дальнейшем рассмотрением банаховых алгебр, в которых единичные элементы нормированы — имеют единичную форму.

Для алгебры A указанного типа каноническое операторное представление L_A осуществляет изометрическое вложение A в $B(A)$ или, короче говоря, *изометрическое представление* A в $B(A)$. В этой же ситуации L_A часто называют *изометрическим изоморфизмом* алгебр A и $L(A)$. Ту же естественную терминологию употребляют и при рассмотрении представлений произвольных банаховых алгебр. Отметим здесь же, что существование канонического операторного представления L_A, в частности, оправдывает использование обозначения λ вместо λe для $\lambda \in \mathbb{C}$, где e — единица A (ср. 5.6.5). Иными словами, в дальнейшем $\mathbb{C}$ отождествлено с подалгеброй $\mathbb{C}e$ алгебры A посредством изометрического представления $\lambda \mapsto \lambda e$.

11.2. Спектр элемента алгебры

11.2.1. Определение. Пусть A — банахова алгебра и $a \in A$. Скаляр $\lambda \in \mathbb{C}$ называют *резольвентным значением* a (записывают: $\lambda \in \operatorname{res}(a)$), если существует *резольвента* $R(a, \lambda) := \frac{1}{\lambda - a} := (\lambda - a)^{-1}$. Множество $\operatorname{Sp}(a) := \mathbb{C} \setminus \operatorname{res}(a)$ называют *спектром элемента* a, а точки из $\operatorname{Sp}(a)$ — *спектральными значениями* a. Если есть необходимость, используют более подробные обозначения типа $\operatorname{Sp}_A(a)$.

11.2.2. *Для элемента $a \in A$ справедливо*:

$$\mathrm{Sp}_A(a) = \mathrm{Sp}_{L(A)}(L_a) = \mathrm{Sp}(L_a);$$
$$LR(a,\ \lambda) = R(L_a,\ \lambda) \quad (\lambda \in \mathrm{res}(a) = \mathrm{res}(L_a)). \ \triangleleft\triangleright$$

11.2.3. *Теорема Гельфанда — Мазура.* *Поле комплексных чисел — это единственное (с точностью до изометрического изоморфизма) банахово тело (т. е. каждая комплексная банахова алгебра с нормированной единицей, в которой ненулевые элементы обратимы, имеет изометрическое представление в $\mathbb{C}$).*

$\triangleleft$ Пусть $\Psi : \lambda \mapsto \lambda e$, где e — единица A и $\lambda \in \mathbb{C}$. Ясно, что Ψ — представление $\mathbb{C}$ в A. Возьмем $a \in A$. В силу 11.2.2 и 8.1.11, $\mathrm{Sp}(a) \neq \varnothing$. Значит, найдется число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что элемент $(\lambda - a)$ необратим, т. е. по условию теоремы $a = \lambda e$. Следовательно, Ψ — эпиморфизм. При этом $\|\Psi(\lambda)\| = \|\lambda e\| = |\lambda|\,\|e\| = |\lambda|$, так что Ψ — изометрия. $\triangleright$

11.2.4. *Теорема Шилова.* *Пусть A — банахова алгебра и B — замкнутая подалгебра A (с единицей). Для элемента $b \in B$ выполнено*:

$$\mathrm{Sp}_B(b) \supset \mathrm{Sp}_A(b), \quad \partial\,\mathrm{Sp}_A(b) \supset \partial\,\mathrm{Sp}_B(b).$$

$\triangleleft$ Если $\bar b := \lambda - b \in \mathrm{Inv}(B)$, то тем более $\bar b \in \mathrm{Inv}(A)$. Отсюда $\mathrm{res}_B(b) \subset \mathrm{res}_A(b)$, т. е.

$$\mathrm{Sp}_B(b) = \mathbb{C} \setminus \mathop{\mathrm{res}}_B(b) \supset \mathbb{C} \setminus \mathop{\mathrm{res}}_A(b) = \mathrm{Sp}_A(b).$$

Если же $\lambda \in \partial\,\mathrm{Sp}_B(b)$, то $\bar b \in \partial\,\mathrm{Inv}(B)$. Поэтому найдется последовательность (b_n), $b_n \in \mathrm{Inv}(B)$, сходящаяся к $\bar b$. Положив $t := \sup_{n\in\mathbb{N}}\|b_n^{-1}\|$, имеем соотношение

$$\|b_n^{-1} - b_m^{-1}\| = \|b_n^{-1}(1 - b_n b_m^{-1})\| =$$
$$= \|b_n^{-1}(b_m - b_n)b_m^{-1}\| \le t^2\|b_n - b_m\|.$$

Иными словами, если $t < +\infty$, то в B существует предел $a := \lim b_n^{-1}$. Учитывая очевидную непрерывность умножения по совокупности переменных, выводим, что в этом случае $a\bar b = \bar b a = 1$, т. е. $\bar b \in \mathrm{Inv}(B)$.

Поскольку $\operatorname{Inv}(B)$ открыто по теореме Банаха об обратимых операторах и 11.1.6, приходим к противоречию с вхождением $\overline{b} \in \partial \operatorname{Inv}(B)$.

Таким образом, можно считать (переходя, если нужно, к последовательности), что $\left\|b_n^{-1}\right\| \to +\infty$. Положим $a_n := \left\|b_n^{-1}\right\|^{-1} b_n^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\|\overline{b}a_n\right\| &= \left\|(\overline{b} - b_n)a_n + b_n a_n\right\| \leq \\ &\leq \left\|\overline{b} - b_n\right\| \left\|a_n\right\| + \left\|b_n^{-1}\right\|^{-1} \left\|b_n b_n^{-1}\right\| \to 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что элемент $\overline{b}$ необратим. В самом деле, в противном случае для $a := \overline{b}^{-1}$ получилось бы

$$1 = \|a_n\| = \left\|a\overline{b}a_n\right\| \leq \|a\| \left\|\overline{b}a_n\right\| \to 0.$$

Окончательно заключаем, что элемент $\lambda - b$ не лежит в $\operatorname{Inv}(A)$, т. е. $\lambda \in \operatorname{Sp}_A(b)$. Поскольку λ — граничная точка бóльшего множества $\operatorname{Sp}_B(b)$, приходим к соотношению $\lambda \in \partial \operatorname{Sp}_A(b)$. $\rhd$

11.2.5. *Следствие.* *Если* $\operatorname{Sp}_B(b)$ *не имеет внутренних точек, то* $\operatorname{Sp}_B(b) = \operatorname{Sp}_A(b)$.

$\lhd$ $\operatorname{Sp}_B(b) = \partial \operatorname{Sp}_B(b) \subset \partial \operatorname{Sp}_B(b) \subset \partial \operatorname{Sp}_A(b) \subset \operatorname{Sp}_A(b) \subset \operatorname{Sp}_B(b)$ $\rhd$

11.2.6. Замечание. Теорему Шилова часто называют *теоремой о постоянстве границы спектра* и выражают словами: «граничное спектральное значение — неустранимая спектральная точка».

11.3. Голоморфное функциональное исчисление в алгебрах

11.3.1. Определение. Пусть a — элемент банаховой алгебры A и $h \in \mathscr{H}(\operatorname{Sp}(a))$ — росток голоморфной функции на спектре a. Положим

$$\mathscr{R}_a h := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{h(z)}{z - a}\, dz.$$

Элемент $\mathscr{R}_a h$ из A называют *интегралом Рисса — Данфорда* ростка h. Если, в частности, $f \in H(\operatorname{Sp}(a))$ — функция, голоморфная в окрестности спектра a, то полагают $f(a) := \mathscr{R}_a \overline{f}$.