Поскольку $\operatorname{Inv}(B)$ открыто по теореме Банаха об обратимых операторах и 11.1.6, приходим к противоречию с вхождением $\overline{b} \in \partial \operatorname{Inv}(B)$.

Таким образом, можно считать (переходя, если нужно, к последовательности), что $\left\|b_n^{-1}\right\| \to +\infty$. Положим $a_n := \left\|b_n^{-1}\right\|^{-1} b_n^{-1}$. Тогда

$$\begin{gathered} \left\|\overline{b}a_n\right\| = \left\|(\overline{b} - b_n)a_n + b_n a_n\right\| \le \\ \le \left\|\overline{b} - b_n\right\| \|a_n\| + \left\|b_n^{-1}\right\|^{-1} \left\|b_n b_n^{-1}\right\| \to 0. \end{gathered}$$

Отсюда вытекает, что элемент $\overline{b}$ необратим. В самом деле, в противном случае для $a := \overline{b}^{-1}$ получилось бы

$$1 = \|a_n\| = \left\|a\overline{b}a_n\right\| \le \|a\| \left\|\overline{b}a_n\right\| \to 0.$$

Окончательно заключаем, что элемент $\lambda - b$ не лежит в $\operatorname{Inv}(A)$, т. е. $\lambda \in \operatorname{Sp}_A(b)$. Поскольку $\lambda$ — граничная точка бо́льшего множества $\operatorname{Sp}_B(b)$, приходим к соотношению $\lambda \in \partial \operatorname{Sp}_A(b)$. $\rhd$

**11.2.5. *Следствие.*** *Если* $\operatorname{Sp}_B(b)$ *не имеет внутренних точек, то* $\operatorname{Sp}_B(b) = \operatorname{Sp}_A(b)$.

$\lhd$ $\operatorname{Sp}_B(b) = \partial \operatorname{Sp}_B(b) \subset \partial \operatorname{Sp}_B(b) \subset \partial \operatorname{Sp}_A(b) \subset \operatorname{Sp}_A(b) \subset \operatorname{Sp}_B(b)$ $\rhd$

**11.2.6.** Замечание. Теорему Шилова часто называют *теоремой о постоянстве границы спектра* и выражают словами: «граничное спектральное значение — неустранимая спектральная точка».

## 11.3. Голоморфное функциональное исчисление в алгебрах

**11.3.1.** Определение. Пусть $a$ — элемент банаховой алгебры $A$ и $h \in \mathscr{H}(\operatorname{Sp}(a))$ — росток голоморфной функции на спектре $a$. Положим

$$\mathscr{R}_a h := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{h(z)}{z - a}\, dz.$$

Элемент $\mathscr{R}_a h$ из $A$ называют *интегралом Рисса — Данфорда* ростка $h$. Если, в частности, $f \in H(\operatorname{Sp}(a))$ — функция, голоморфная в окрестности спектра $a$, то полагают $f(a) := \mathscr{R}_a \overline{f}$.

**11.3.2. Теорема Гельфанда — Данфорда для алгебр.** *Интеграл Рисса — Данфорда $\mathscr{R}_a$ является представлением алгебры ростков голоморфных функций на спектре элемента $a$ из $A$ в алгебре $A$. При этом если $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (в окрестности $\mathrm{Sp}(a)$), то $f(a) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$.*

◁ Из определений 11.2.3 и 8.2.1, привлекая 11.2.2, имеем

$$(L\mathscr{R}_a h)(b) = L_{\mathscr{R}_a h} b = (\mathscr{R}_a h) b = \frac{1}{2\pi i} \oint h(z) R(a, z)\, dz b =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint h(z) R(a, z)\, b dz = \frac{1}{2\pi i} \oint h(z) R(L_a, z)\, b dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint h(z) R(L_a, z)\, dz b = \mathscr{R}_{L_a} h(b)$$

для всех $b \in A$. В частности, получаем, что образ $\mathscr{R}_{L_a}(\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)))$ лежит в $\operatorname{im} L$. Таким образом, из уже доказанной коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)) \arrow[d, "\mathscr{R}_{L_a}"'] \arrow[dr, "\mathscr{R}_a"] & \\
B(A) & A \arrow[l, "L"']
\end{tikzcd}$$

вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)) \arrow[d, "\mathscr{R}_{L_a}"'] \arrow[dr, "\mathscr{R}_a"] & \\
L(A) \arrow[r, "L^{-1}"] & A
\end{tikzcd}$$

Остается привлечь 11.1.6 и теорему Гельфанда — Данфорда 8.2.3. ▷

**11.3.3.** Замечание. В дальнейшем в силу уже установленного в произвольных банаховых алгебрах можно использовать факты голоморфного функционального исчисления, доказанные в 8.2 для алгебры $B(X)$, где $X$ — банахово пространство.

## 11.4. Идеалы в коммутативных алгебрах

**11.4.1.** Определение. Пусть $A$ — некоторая коммутативная алгебра. Подпространство $J$ в $A$ называют *идеалом* $A$ и пишут $J \lhd A$, если $AJ \subset J$.

**11.4.2.** *Множество $J(A)$ всех идеалов в $A$, упорядоченное по включению, представляет собой полную решетку. При этом для любого множества $\mathscr{E}$ в $J(A)$ выполнено*

$$\sup_{J(A)} \mathscr{E} = \sup_{\mathrm{Lat}(A)} \mathscr{E}, \quad \inf_{J(A)} \mathscr{E} = \inf_{\mathrm{Lat}(A)} \mathscr{E},$$

*т. е. $J(A)$ вложено в полную решетку подпространств $\mathrm{Lat}(A)$ с сохранением точных верхних и точных нижних границ произвольных множеств.*

$\lhd$ Ясно, что 0 — это наименьший, а $A$ — это наибольший идеалы. Помимо этого, пересечение идеалов и сумма конечного множества идеалов — идеал. Остается сослаться на 2.1.5 и 2.1.6. $\rhd$

**11.4.3.** *Пусть $J_0 \lhd A$. Пусть, далее, $\varphi : A \to A/J_0$ — каноническое отображение $A$ на фактор-алгебру $\overline{A} := A/J_0$. Тогда*

$$J \lhd A \Rightarrow \varphi(J) \lhd \overline{A};$$
$$\overline{J} \lhd \overline{A} \Rightarrow \varphi^{-1}(\overline{J}) \lhd A.$$

$\lhd$ Поскольку по определению $\overline{a}\overline{b} := \varphi(\varphi^{-1}(\overline{a})\varphi^{-1}(\overline{b}))$ для $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{A}$, то оператор $\varphi$ мультипликативен: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для $a,\ b \in A$. Значит, получаем последовательно

$$\varphi(J) \subset \overline{A}\varphi(J) = \varphi(A)\varphi(J) \subset \varphi(AJ) \subset \varphi(J);$$
$$\varphi^{-1}(\overline{J}) \subset A\varphi^{-1}(\overline{J}) \subset \varphi^{-1}(\varphi(A)\overline{J}) = \varphi^{-1}(\overline{AJ}) \subset \varphi^{-1}(\overline{J}). \ \rhd$$

**11.4.4.** *Пусть $J \lhd A$ и $J \neq 0$. Эквивалентны утверждения:*

**(1)** $A \neq J$;

**(2)** $1 \notin J$;

**(3)** *элементы из $J$ не имеют левых обратных.* $\lhd\rhd$