голоморфного функционального исчисления, доказанные в 8.2 для алгебры $B(X)$, где X — банахово пространство.

11.4. Идеалы в коммутативных алгебрах

11.4.1. Определение. Пусть A — некоторая коммутативная алгебра. Подпространство J в A называют *идеалом* A и пишут $J \lhd A$, если $AJ \subset J$.

11.4.2. *Множество $J(A)$ всех идеалов в A, упорядоченное по включению, представляет собой полную решетку. При этом для любого множества $\mathscr{E}$ в $J(A)$ выполнено*

$$\sup\nolimits_{J(A)} \mathscr{E} = \sup\nolimits_{\mathrm{Lat}(A)} \mathscr{E}, \quad \inf\nolimits_{J(A)} \mathscr{E} = \inf\nolimits_{\mathrm{Lat}(A)} \mathscr{E},$$

т. е. $J(A)$ вложено в полную решетку подпространств $\mathrm{Lat}(A)$ с сохранением точных верхних и точных нижних границ произвольных множеств.

$\lhd$ Ясно, что 0 — это наименьший, а A — это наибольший идеалы. Помимо этого, пересечение идеалов и сумма конечного множества идеалов — идеал. Остается сослаться на 2.1.5 и 2.1.6. $\rhd$

11.4.3. *Пусть $J_0 \lhd A$. Пусть, далее, $\varphi : A \to A/J_0$ — каноническое отображение A на фактор-алгебру $\overline{A} := A/J_0$. Тогда*

$$J \lhd A \Rightarrow \varphi(J) \lhd \overline{A};$$
$$\overline{J} \lhd \overline{A} \Rightarrow \varphi^{-1}(\overline{J}) \lhd A.$$

$\lhd$ Поскольку по определению $\overline{a}\overline{b} := \varphi(\varphi^{-1}(\overline{a})\varphi^{-1}(\overline{b}))$ для $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{A}$, то оператор φ мультипликативен: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для $a,\ b \in A$. Значит, получаем последовательно

$$\varphi(J) \subset \overline{A}\varphi(J) = \varphi(A)\varphi(J) \subset \varphi(AJ) \subset \varphi(J);$$
$$\varphi^{-1}(\overline{J}) \subset A\varphi^{-1}(\overline{J}) \subset \varphi^{-1}(\varphi(A)\overline{J}) = \varphi^{-1}(\overline{A}\overline{J}) \subset \varphi^{-1}(\overline{J}). \ \rhd$$

11.4.4. *Пусть $J \lhd A$ и $J \neq 0$. Эквивалентны утверждения:*

(1) $A \neq J$;

(2) $1 \notin J$;

(3) *элементы из J не имеют левых обратных.* $\lhd\rhd$

11.4.5. Определение. Идеал J в A называют *собственным*, если J отличен от A. Максимальные элементы в множестве собственных идеалов, упорядоченном по включению, называют *максимальными идеалами*.

11.4.6. *Коммутативная алгебра является полем в том и только в том случае, если в ней нет собственных идеалов кроме нулевого.* $\lhd\rhd$

11.4.7. *Пусть J — собственный идеал в A. Тогда (J — максимален) $\Leftrightarrow$ (A/J — поле).*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $\overline{J} \lhd A/J$. Тогда, по 11.4.3, $\varphi^{-1}(\overline{J}) \lhd A$. Так как, несомненно, $J \subset \varphi^{-1}(\overline{J})$, то либо $J = \varphi^{-1}(\overline{J})$ и $0 = \varphi(J) = \varphi(\varphi^{-1}(\overline{J})) = \overline{J}$, либо $A = \varphi^{-1}(\overline{J})$ и $\overline{J} = \varphi(\varphi^{-1}(\overline{J})) = \varphi(A) = A/J$ в силу 1.1.6. Значит, в A/J нет отличных от нуля собственных идеалов. Осталось привлечь 11.4.6.

$\Leftarrow$: Пусть $J_0 \lhd A$ и $J_0 \subset J$. Тогда, по 11.4.3, $\varphi(J_0) \lhd A/J$. На основании 11.4.6 либо $\varphi(J_0) = 0$, либо $\varphi(J_0) = A/J$. В первом случае $J_0 \subset \varphi^{-1} \circ \varphi(J_0) \subset \varphi^{-1}(0) = J$ и $J = J_0$. Во втором случае $\varphi(J_0) = \varphi(A)$, т. е. $A = J_0 + J \subset J_0 + J_0 = J_0 \subset A$. Итак, J — максимальный идеал. $\rhd$

11.4.8. *Теорема Крулля.* *Каждый собственный идеал содержится в некотором максимальном идеале.*

$\lhd$ Пусть J_0 — собственный идеал алгебры A. Пусть, далее, $\mathscr{E}$ состоит из собственных идеалов J алгебры A таких, что $J_0 \subset J$. Всякая цепь $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$ имеет в силу 11.4.2 точную верхнюю границу: $\sup \mathscr{E} = \cup \{J : J \in \mathscr{E}_0\}$. По 11.4.4 идеал $\sup \mathscr{E}_0$ собственный. Таким образом, $\mathscr{E}$ индуктивно и требуемое обеспечено леммой Куратовского — Цорна 1.2.20. $\rhd$

11.5. Идеалы в алгебре $C(Q, \mathbb{C})$

11.5.1. *Теорема о минимальном идеале.* *Пусть J — произвольный идеал в алгебре $C(Q, \mathbb{C})$ непрерывных комплекснозначных функций на компакте Q. Пусть, далее,*

$$Q_0 := \cap \{f^{-1}(0) : f \in J\};$$
$$J_0 := \{f \in C(Q, \mathbb{C}) : \operatorname{int} f^{-1}(0) \supset Q_0\}.$$

Тогда $J_0 \lhd C(Q, \mathbb{C})$, причем $J_0 \subset J$.