**11.4.5.** Определение. Идеал $J$ в $A$ называют *собственным*, если $J$ отличен от $A$. Максимальные элементы в множестве собственных идеалов, упорядоченном по включению, называют *максимальными идеалами*.

**11.4.6.** *Коммутативная алгебра является полем в том и только в том случае, если в ней нет собственных идеалов кроме нулевого.* $\lhd\rhd$

**11.4.7.** *Пусть $J$ — собственный идеал в $A$. Тогда ($J$ — максимален) $\Leftrightarrow$ ($A/J$ — поле).*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $\overline{J} \lhd A/J$. Тогда, по 11.4.3, $\varphi^{-1}(\overline{J}) \lhd A$. Так как, несомненно, $J \subset \varphi^{-1}(\overline{J})$, то либо $J = \varphi^{-1}(\overline{J})$ и $0 = \varphi(J) = \varphi(\varphi^{-1}(\overline{J})) = \overline{J}$, либо $A = \varphi^{-1}(\overline{J})$ и $\overline{J} = \varphi(\varphi^{-1}(\overline{J})) = \varphi(A) = A/J$ в силу 1.1.6. Значит, в $A/J$ нет отличных от нуля собственных идеалов. Осталось привлечь 11.4.6.

$\Leftarrow$: Пусть $J_0 \lhd A$ и $J_0 \subset J$. Тогда, по 11.4.3, $\varphi(J_0) \lhd A/J$. На основании 11.4.6 либо $\varphi(J_0) = 0$, либо $\varphi(J_0) = A/J$. В первом случае $J_0 \subset \varphi^{-1} \circ \varphi(J_0) \subset \varphi^{-1}(0) = J$ и $J = J_0$. Во втором случае $\varphi(J_0) = \varphi(A)$, т. е. $A = J_0 + J \subset J_0 + J_0 = J_0 \subset A$. Итак, $J$ — максимальный идеал. $\rhd$

**11.4.8.** ***Теорема Крулля.*** *Каждый собственный идеал содержится в некотором максимальном идеале.*

$\lhd$ Пусть $J_0$ — собственный идеал алгебры $A$. Пусть, далее, $\mathscr{E}$ состоит из собственных идеалов $J$ алгебры $A$ таких, что $J_0 \subset J$. Всякая цепь $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$ имеет в силу 11.4.2 точную верхнюю границу: $\sup \mathscr{E} = \cup\{J : J \in \mathscr{E}_0\}$. По 11.4.4 идеал $\sup \mathscr{E}_0$ собственный. Таким образом, $\mathscr{E}$ индуктивно и требуемое обеспечено леммой Куратовского — Цорна 1.2.20. $\rhd$

## 11.5. Идеалы в алгебре $C(Q, \mathbb{C})$

**11.5.1.** ***Теорема о минимальном идеале.*** *Пусть $J$ — произвольный идеал в алгебре $C(Q, \mathbb{C})$ непрерывных комплекснозначных функций на компакте $Q$. Пусть, далее,*

$$Q_0 := \cap\{f^{-1}(0) : f \in J\};$$
$$J_0 := \{f \in C(Q, \mathbb{C}) : \operatorname{int} f^{-1}(0) \supset Q_0\}.$$

*Тогда $J_0 \lhd C(Q, \mathbb{C})$, причем $J_0 \subset J$.*

$\lhd$ Пусть $Q_1 := \operatorname{cl}(Q \setminus f^{-1}(0))$ для функции $f \in J_0$. Привлекая условия, видим, что $Q_1 \cap Q_0 = \varnothing$. Для доказательства вхождения $f \in J$ необходимо (и, разумеется, достаточно) построить функцию $u \in J$ такую, что $u(q) = 1$ для всех $q \in Q_1$. Действительно, в этом случае $uf = f$.

Для построения функции $u$ заметим сначала, что для $q \in Q_1$ найдется функция $f_q \in J$, для которой $f_q(q) \neq 0$. Полагая $g_q := f_q^* f_q$, где, как обычно, $f_q^* : x \mapsto f_q(x)^*$ — комплексно сопряженная к $f_q$ функция, имеем $g_q \geq 0$ и, кроме того, $g_q(q) > 0$. Ясно также, что $g_q \in J$ для $q \in Q_1$. Семейство $(U_q)_{q \in Q_1}$, где $U_q := \{x \in Q_1 : \ g_q(x) > 0\}$, образует открытое покрытие $Q_1$. Используя компактность $Q_1$, выберем конечное множество $\{q_1, \dots, q_n\}$ в $Q_1$ такое, что $Q_1 \subset U_{q_1} \cup \ldots \cup U_{q_n}$. Обозначим $g := g_{q_1} + \ldots + g_{q_n}$. Несомненно, $g \in J$, причем $g(q) > 0$ для $q \in Q_1$. Положим $h_0(q) := g(q)^{-1}$ для $q \in Q_1$. По теореме Титце — Урысона 10.8.20 найдется функция $h \in C(Q, \ \mathbb{R})$, для которой $h\big|_{Q_1} = h_0$. Пусть, наконец, $u := hg$. Эта функция $u$ — искомая.

Итак, установлено, что $J_0 \subset J$. Кроме того, $J_0$ — идеал в $C(Q, \ \mathbb{C})$ по очевидным обстоятельствам. $\rhd$

**11.5.2.** *Для каждого замкнутого идеала $J$ в алгебре $C(Q, \ \mathbb{C})$ найдется, и притом единственное, компактное подмножество $Q_0$ такое, что*

$$J = J(Q_0) := \{f \in C(Q, \ \mathbb{C}) : \ q \in Q_0 \Rightarrow f(q) = 0\}.$$

$\lhd$ Единственность обеспечена теоремой Урысона 9.3.14. Определим $Q_0$ так же, как и 11.5.1. Тогда заведомо $J \subset J(Q_0)$. Возьмем $f \in J(Q_0)$ и для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$U_n := \left\{ |f| \leq \frac{1}{2n} \right\}, \quad V_n := \left\{ |f| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Вновь привлекая теорему Урысона 9.3.14, найдем $h_n \in C(Q, \ \mathbb{R})$ так, что $0 \leq h_n \leq 1$ и $h_n\big|_{U_n} = 0$, $h_n\big|_{V_n} = 1$. Рассмотрим $f_n := fh_n$. Поскольку

$$\operatorname{int} f_n^{-1}(0) \supset \operatorname{int} U_n \supset Q_0,$$

то в силу 11.5.1 справедливо $f_n \in J$. Осталось заметить, что $f_n \to f$ по построению. $\rhd$

**11.5.3. *Теорема о максимальном идеале.*** *Каждый максимальный идеал в алгебре $C(Q,\ \mathbb{C})$ имеет вид*

$$J(q) := J(\{q\}) = \{f \in C(Q,\ \mathbb{C}) :\ f(q) = 0\},$$

*где $q$ — некоторая точка $Q$.*

$\lhd$ Следует из 11.5.2, ибо замыкание идеала — идеал. $\rhd$

## 11.6. Преобразование Гельфанда

**11.6.1.** *Пусть $A$ — коммутативная банахова алгебра, а $J \lhd A$ — это замкнутый идеал, не равный $A$. Тогда фактор-алгебра $A/J$, наделенная фактор-нормой, является банаховой алгеброй. Если при этом $\varphi : A \to A/J$ — каноническое отображение, то $\varphi(1)$ — единица в $A/J$, оператор $\varphi$ мультипликативен и $\|\varphi\| = 1$.*

$\lhd$ Для $a,\ b \in A$ имеем, учитывая 5.1.10 (5),

$$\begin{aligned}\|\varphi(a)\varphi(b)\|_{A/J} = \inf\{\|a'b'\|_A :\ \varphi(a') = \varphi(a),\ \varphi(b') = \varphi(b)\} \le \\ \le \inf\{\|a'\|_A \|b'\|_A :\ \varphi(a') = \varphi(a),\ \varphi(b') = \varphi(b)\} = \\ = \|\varphi(a)\|_{A/J} \|\varphi(b)\|_{A/J}.\end{aligned}$$

Иными словами, норма в $A/J$ субмультипликативна. Следовательно, будет $\|\varphi(1)\| \ge 1$. Помимо этого,

$$\|\varphi(1)\|_{A/J} = \inf\{\|a\|_A :\ \varphi(a) = \varphi(1)\} \le \|1\|_A = 1,$$

т. е. $\|\varphi(1)\| = 1$. Последнее, в частности, обеспечивает равенство $\|\varphi\| = 1$. Оставшиеся утверждения несомненны. $\rhd$

**11.6.2.** Замечание. Предложение 11.6.1 сохраняется для некоммутативной банаховой алгебры $A$ при дополнительном допущении, что $J$ — *двусторонний идеал* $A$, т. е. $J$ — подпространство $A$, удовлетворяющее условию $AJA \subset J$.

**11.6.3.** *Пусть $\chi : A \to \mathbb{C}$ — ненулевой мультипликативный линейный функционал на $A$. Тогда $\chi$ непрерывен и $\|\chi\| = \chi(1) = 1$ (в частности, $\chi$ — представление $A$ в $\mathbb{C}$).*

$\lhd$ Поскольку $\chi \ne 0$, то для некоторого $a \in A$ выполнено $0 \ne \chi(a) = \chi(a1) = \chi(a)\chi(1)$. Значит, $\chi(1) = 1$. Если теперь $a \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ таковы, что $|\lambda| > \|a\|$, то $\lambda - a \in \mathrm{Inv}(A)$ (см. 5.6.15). Имеем $1 = \chi(1)\chi(\lambda - a)\chi((\lambda - a)^{-1})$. Отсюда $\chi(\lambda - a) \ne 0$, т. е. $\chi(a) \ne \lambda$. Стало быть, $|\chi(a)| \le \|a\|$ и $\|\chi\| \le 1$. Учитывая, что $\|\chi\| = \|\chi\|\,\|1\| \ge |\chi(1)| = 1$, заключаем: $\|\chi\| = 1$. $\rhd$