11.5.3. *Теорема о максимальном идеале.* *Каждый максимальный идеал в алгебре $C(Q,\ \mathbb{C})$ имеет вид*

$$J(q) := J(\{q\}) = \{f \in C(Q,\ \mathbb{C}) :\ f(q) = 0\},$$

где q — некоторая точка Q.

$\lhd$ Следует из 11.5.2, ибо замыкание идеала — идеал. $\rhd$

11.6. Преобразование Гельфанда

11.6.1. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, а $J \lhd A$ — это замкнутый идеал, не равный A. Тогда фактор-алгебра A/J, наделенная фактор-нормой, является банаховой алгеброй. Если при этом $\varphi : A \to A/J$ — каноническое отображение, то $\varphi(1)$ — единица в A/J, оператор φ мультипликативен и $\|\varphi\| = 1$.*

$\lhd$ Для $a,\ b \in A$ имеем, учитывая 5.1.10 (5),

$$\begin{aligned}\|\varphi(a)\varphi(b)\|_{A/J} = \inf\{\|a'b'\|_A :\ \varphi(a') = \varphi(a),\ \varphi(b') = \varphi(b)\} \le \\ \le \inf\{\|a'\|_A\|b'\|_A :\ \varphi(a') = \varphi(a),\ \varphi(b') = \varphi(b)\} = \\ = \|\varphi(a)\|_{A/J}\|\varphi(b)\|_{A/J}.\end{aligned}$$

Иными словами, норма в A/J субмультипликативна. Следовательно, будет $\|\varphi(1)\| \ge 1$. Помимо этого,

$$\|\varphi(1)\|_{A/J} = \inf\{\|a\|_A :\ \varphi(a) = \varphi(1)\} \le \|1\|_A = 1,$$

т. е. $\|\varphi(1)\| = 1$. Последнее, в частности, обеспечивает равенство $\|\varphi\| = 1$. Оставшиеся утверждения несомненны. $\rhd$

11.6.2. Замечание. Предложение 11.6.1 сохраняется для некоммутативной банаховой алгебры A при дополнительном допущении, что J — *двусторонний идеал* A, т. е. J — подпространство A, удовлетворяющее условию $AJA \subset J$.

11.6.3. *Пусть $\chi : A \to \mathbb{C}$ — ненулевой мультипликативный линейный функционал на A. Тогда χ непрерывен и $\|\chi\| = \chi(1) = 1$ (в частности, χ — представление A в $\mathbb{C}$).*

$\lhd$ Поскольку $\chi \ne 0$, то для некоторого $a \in A$ выполнено $0 \ne \chi(a) = \chi(a1) = \chi(a)\chi(1)$. Значит, $\chi(1) = 1$. Если теперь $a \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ таковы, что $|\lambda| > \|a\|$, то $\lambda - a \in \operatorname{Inv}(A)$ (см. 5.6.15). Имеем $1 = \chi(1)\chi(\lambda - a)\chi((\lambda - a)^{-1})$. Отсюда $\chi(\lambda - a) \ne 0$, т. е. $\chi(a) \ne \lambda$. Стало быть, $|\chi(a)| \le \|a\|$ и $\|\chi\| \le 1$. Учитывая, что $\|\chi\| = \|\chi\|\,\|1\| \ge |\chi(1)| = 1$, заключаем: $\|\chi\| = 1$. $\rhd$

11.6.4. Определение. Ненулевые мультипликативные линейные функционалы на алгебре A называют *характерами* A. Множество всех характеров A обозначают $\mathrm{X}(A)$, снабжают топологией поточечной сходимости (индуцированной в $\mathrm{X}(A)$ слабой топологией $\sigma(A', A)$) и называют *пространством характеров* алгебры A.

11.6.5. *Пространство характеров — компакт.*

$\triangleleft$ Хаусдорфовость $\mathrm{X}(A)$ не вызывает сомнений. В силу 11.6.3, $\mathrm{X}(A)$ — это $\sigma(A', A)$-замкнутое подмножество шара $B_{A'}$. Последний $\sigma(A', A)$-компактен по теореме Алаоглу — Бурбаки 10.6.7. Осталось сослаться на 9.4.9. $\triangleright$

11.6.6. ***Теорема об идеалах и характерах.*** *Максимальные идеалы коммутативной банаховой алгебры A суть в точности ядра ее характеров. При этом отображение $\chi \mapsto \ker \chi$, действующее из пространства характеров $\mathrm{X}(A)$ на множество $M(A)$ всех максимальных идеалов A, является взаимно однозначным.*

$\triangleleft$ Пусть $\chi \in \mathrm{X}(A)$ — характер алгебры A. Очевидно, что $\ker \chi \lhd A$. Из 2.3.11 вытекает, что снижение $\overline{\chi} : A/\ker \chi \to \mathbb{C}$ — мономорфизм. В связи с 11.6.1, $\overline{\chi}(1) = \chi(1) = 1$, т. е. $\overline{\chi}$ — изоморфизм $A/\ker \chi$ и $\mathbb{C}$. Следовательно, $A/\ker \chi$ — это поле. Привлекая 11.4.7, делаем вывод, что идеал $\ker \chi$ максимален, т. е. $\ker \chi \in M(A)$. Пусть теперь $m \in M(A)$ — какой-нибудь максимальный идеал алгебры A. Ясно, что $m \subset \operatorname{cl} m$, $\operatorname{cl} m \lhd A$ и при этом $1 \notin \operatorname{cl} m$ (ибо $1 \in \operatorname{Inv}(A)$, а последнее множество открыто по теореме Банаха об обратимых операторах 5.6.12 и 11.1.6). Таким образом, идеал m замкнут. Рассмотрим фактор-алгебру A/m и каноническое отображение $\varphi : A \to A/m$. На основании 11.4.7 и 11.6.1 фактор-алгебра A/m — это банахово поле. По теореме Гельфанда — Мазура 11.2.3 имеется изометрическое представление $\psi : A/m \to \mathbb{C}$. Положим $\chi := \psi \circ \varphi$. Видно, что $\chi \in \mathrm{X}(A)$ и при этом $\ker \chi = \chi^{-1}(0) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(0)) = \varphi^{-1}(0) = m$.

Для завершения доказательства осталось проверить взаимную однозначность отображения $\chi \mapsto \ker \chi$. Итак, пусть $\ker \chi_1 = \ker \chi_2$ для χ_1, $\chi_2 \in \mathrm{X}(A)$. В силу 2.3.12 для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено $\chi_1 = \lambda \chi_2$. Помимо этого, по 11.6.3, $1 = \chi_1(1) = \lambda \chi_2(1) = \lambda$. Окончательно $\chi_1 = \chi_2$. $\triangleright$

11.6.7. Замечание. В связи с теоремой 11.6.6 множество $M(A)$ часто наделяют топологией, перенесенной в $M(A)$ из $\mathrm{X}(A)$ указанным отображением $\chi \mapsto \ker \chi$, и говорят о компактном *пространстве максимальных идеалов* A. Иными словами, пространство характеров и пространство максимальных идеалов отождествляют так, как это сделано в 11.6.6.

11.6.8. Определение. Пусть A — коммутативная банахова алгебра и $X(A)$ — ее пространство характеров. Для $a \in A$ и $\chi \in X(A)$ положим $\widehat{a}(\chi) := \chi(a)$. Возникающую функцию $\widehat{a} : \chi \mapsto \widehat{a}(\chi)$, определенную на $X(A)$, называют *преобразованием Гельфанда элемента* a. Отображение $a \mapsto \widehat{a}$, где $a \in A$, называют *преобразованием Гельфанда алгебры* A и обозначают $\mathscr{G}_A$ (или $\widehat{\ }$).

11.6.9. ***Теорема о преобразовании Гельфанда.*** *Преобразование Гельфанда $\mathscr{G}_A : a \mapsto \widehat{a}$ есть представление коммутативной банаховой алгебры A в алгебре $C(X(A),\ \mathbb{C})$. При этом*

$$\operatorname{Sp}(a) = \operatorname{Sp}(\widehat{a}) = \widehat{a}(X(A)),$$
$$\|\widehat{a}\| = r(a),$$

где $r(a)$ — спектральный радиус элемента a алгебры A.

$\triangleleft$ То, что $a \in A \Rightarrow \widehat{a} \in C(X(A),\ \mathbb{C})$, $\widehat{1} = 1$ и $a,\ b \in A \Rightarrow \widehat{ab} = \widehat{a}\widehat{b}$, обеспечено определениями и 11.6.3. Линейность $\mathscr{G}_A$ не вызывает сомнений. Следовательно, отображение $\mathscr{G}_A$ действительно является представлением.

Пусть $\lambda \in \operatorname{Sp}(a)$. Тогда элемент $\lambda - a$ необратим, а потому идеал $J_{\lambda - a} := A(\lambda - a)$ — собственный в силу 11.4.4. По теореме Крулля 11.4.8 существует максимальный идеал $m \triangleleft A$, удовлетворяющий условию $m \supset J_{\lambda - a}$. По теореме 11.6.6 для подходящего характера χ будет $m = \ker \chi$. В частности, $\chi(\lambda - a) = 0$, т. е. $\lambda = \lambda\chi(1) = \chi(\lambda) = \chi(a) = \widehat{a}(\chi)$. Значит, $\lambda \in \operatorname{Sp}(\widehat{a})$.

Если, в свою очередь, $\lambda \in \operatorname{Sp}(\widehat{a})$, то $(\lambda - \widehat{a})$ — необратимый элемент пространства $C(X(A),\ \mathbb{C})$, т. е. найдется характер $\chi \in X(A)$, для которого $\lambda = \widehat{a}(\chi)$. Иными словами, $\chi(\lambda - a) = 0$. Стало быть, допущение $\lambda - a \in \operatorname{Inv}(A)$ приводит к противоречию:

$$1 = \chi(1) = \chi((\lambda - a)^{-1}(\lambda - a)) = \chi((\lambda - a)^{-1})\chi(\lambda - a) = 0.$$

Итак, $\lambda \in \operatorname{Sp}(a)$. Окончательно $\operatorname{Sp}(a) = \operatorname{Sp}(\widehat{a})$.

Привлекая формулу Бёрлинга — Гельфанда (см. 11.3.3 и 8.1.12), видим:

$$
\begin{aligned}
r(a) = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\} = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \mathrm{Sp}(\widehat{a})\} = \\
= \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \widehat{a}(\mathrm{X}(A))\} = \sup\{|\widehat{a}(\chi)| : \ \chi \in \mathrm{X}(A)\} = \|\widehat{a}\|,
\end{aligned}
$$

что и нужно. $\triangleright$

11.6.10. *Преобразование Гельфанда коммутативной банаховой алгебры A является изометрическим вложением в том и только в том случае, если $\|a^2\| = \|a\|^2$ для всякого $a \in A$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Учитывая, что отображение $t \mapsto t^2$, рассматриваемое на $\mathbb{R}_+$, возрастает и имеет возрастающее обратное, определенное на $\mathbb{R}_+$, в силу 10.6.9 получаем

$$
\begin{aligned}
\|a^2\| = \|\widehat{a}^2\|_{C(\mathrm{X}(A),\mathbb{C})} = \sup_{\chi \in \mathrm{X}(A)} |\widehat{a}^2(\chi)| = \sup_{\chi \in \mathrm{X}(A)} |\chi(a^2)| = \\
= \sup_{\chi \in \mathrm{X}(A)} |\chi(a)\chi(a)| = \sup_{\chi \in \mathrm{X}(A)} |\chi(a)|^2 = \\
= \Big(\sup_{\chi \in \mathrm{X}(A)} |\chi(a)|\Big)^2 = \|\widehat{a}\|^2 = \|a\|^2.
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow$: По формуле Гельфанда 5.6.8, $r(a) = \lim \|a^n\|^{1/n}$. Имеем, в частности, $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$, т. е. $r(a) = \|a\|$. По 10.6.9, помимо этого, $r(a) = \|\widehat{a}\|$. $\triangleright$

11.6.11. Замечание. Иногда интересуются не свойством изометричности преобразования Гельфанда, а его точностью. Ядро преобразования Гельфанда $\mathscr{G}_A$ — это пересечение всех максимальных идеалов, т. е. *радикал* алгебры A. Таким образом, условие точности представления $\mathscr{G}_A$ алгебры A в алгебре $C(\mathrm{X}(A), \mathbb{C})$ можно формулировать словами: «алгебра A *полупроста* (т. е. радикал A тривиален)».

11.6.12. Теорема. *Для элемента a коммутативной банаховой алгебры A коммутативна следующая диаграмма представлений:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)) = \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(\widehat{a})) \arrow[d, "\mathscr{R}_a"'] \arrow[dr, "\mathscr{R}_{\widehat{a}}"] & \\
A \arrow[r, "\mathscr{G}_A"] & C(\mathrm{X}(A), \mathbb{C})
\end{tikzcd}
$$

При этом $\widehat{f(a)} = f \circ \widehat{a} = f(\widehat{a})$ *для* $f \in H(\mathrm{Sp}(a))$.

$\lhd$ Возьмем $\chi \in \mathrm{X}(A)$. Для каждого $z \in \mathrm{res}(a)$ выполнено

$$\chi\left(\frac{1}{z-a}(z-a)\right) = 1 \Rightarrow \chi\left(\frac{1}{z-a}\right) = \frac{1}{\chi(z-a)} = \frac{1}{z-\chi(a)}.$$

Иными словами,

$$\widehat{R(a,\ z)}(\chi) = \widehat{\frac{1}{z-a}}(\chi) = \frac{1}{z-\widehat{a}(\chi)} = \frac{1}{z-\widehat{a}}(\chi) = R(\widehat{a},\ z)(\chi).$$

Таким образом, учитывая свойства интеграла Бохнера (см. 5.5.9 (6)), для $f \in H(\mathrm{Sp}(a))$ получаем

$$
\begin{aligned}
\widehat{f(a)} = \mathscr{G}_A \circ \mathscr{R}_a f = \mathscr{G}_A \left(\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) R(a,\ z)\, dz\right) = \\
= \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \mathscr{G}_A(R(a,\ z))\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \widehat{R(a,\ z))}\, dz = \\
= \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) R(\widehat{a},\ z)\, dz = \mathscr{R}_{\widehat{a}}(f) = f(\widehat{a}).
\end{aligned}
$$

Помимо этого, привлекая классическую теорему Коши, видим, что для $\chi \in \mathrm{X}(A)$ справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
f \circ \widehat{a}(\chi) = f(\widehat{a}(\chi)) = f(\chi(a)) = \\
= \frac{1}{2\pi i} \chi \oint \frac{f(z)}{z-\chi(a)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \chi\left(\frac{f(z)}{z-a}\right)\, dz = \\
= \frac{1}{2\pi i} \chi\left(\oint \frac{f(z)}{z-a}\, dz\right) = \widehat{f(a)}(\chi) = f(\widehat{a})(\chi). \ \rhd
\end{aligned}
$$

11.6.13. Замечание. Теорию преобразования Гельфанда очевидным образом можно распространить на случай коммутативных банаховых алгебр A без единицы. Определения 11.6.4 и 11.6.8 сохраним дословно. Характер $\chi \in \mathrm{X}(A)$ порождает характер $\chi_e \in \mathrm{X}(\mathscr{A}_e)$ по правилу: $\chi_e(a,\ \lambda) := \chi(a) + \lambda$ $(a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$. Множество $\mathrm{X}(\mathscr{A}_e) \setminus \{\chi_e :\ \chi \in \mathrm{X}(A)\}$ состоит из единственного элемента $\chi_\infty(a,\ \lambda) := \lambda$ $(a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$. Таким образом, пространство $\mathrm{X}(A)$ локально компактно (ср. 9.4.19), ибо отображение $\chi \in \mathrm{X}(A) \mapsto \chi_e \in \mathrm{X}(\mathscr{A}_e) \setminus \{\chi_\infty\}$ является гомеоморфизмом. При этом $\ker \chi_\infty = A \times 0$. Следовательно, преобразование Гельфанда коммутативной банаховой алгебры без единицы служит ее представлением в алгебре определенных на локально компактном пространстве непрерывных комплексных функций, «*стремящихся к нулю на бесконечности*». Для групповой алгебры $(L_1(\mathbb{R}^N),\ *)$ на основании 10.11.1 и 10.11.3 преобразование Фурье совпадает с преобразованием Гельфанда и приведенное утверждение содержит как теорему Римана — Лебега 10.11.5 (3), так и формулу умножения 10.11.6 (3).

11.7. Спектр элемента C^*-алгебры

11.7.1. Определение. Элемент a инволютивной алгебры A называют *эрмитовым*, если $a^* = a$. Элемент a из A называют *нормальным*, если $a^*a = aa^*$. Наконец, элемент a называют *унитарным*, если $aa^* = a^*a = 1$ (т. е. $a,\ a^* \in \mathrm{Inv}(A)$ и $a^{-1} = a^*,\ a^{*-1} = a$).

11.7.2. *Эрмитовы элементы инволютивной алгебры A образуют вещественное подпространство A. При этом для любого $a \in A$ существуют, и притом единственные, эрмитовы элементы $x,\ y \in A$ такие, что $a = x + iy$. Именно,*

$$x = \frac{1}{2}(a + a^*), \quad y = \frac{1}{2i}(a - a^*).$$

При этом $a^* = x - iy$.

$\triangleleft$ Следует проверить только утверждение об единственности. Если $a = x_1 + iy_1$, то в силу свойств инволюции (см. 6.4.13) выполнено $a^* = x_1^* + (iy_1)^* = x_1^* - iy_1^* = x_1 - iy_1$. Стало быть, $x_1 = x$ и $y_1 = y$. $\triangleright$

11.7.3. *Единица — эрмитов элемент.*

$\triangleleft$ $1^* = 1^*1 = 1^*1^{**} = (1^*1)^* = 1^{**} = 1$ $\triangleright$