11.6.13. Замечание. Теорию преобразования Гельфанда очевидным образом можно распространить на случай коммутативных банаховых алгебр A без единицы. Определения 11.6.4 и 11.6.8 сохраним дословно. Характер $\chi \in \mathrm{X}(A)$ порождает характер $\chi_e \in \mathrm{X}(\mathscr{A}_e)$ по правилу: $\chi_e(a,\ \lambda) := \chi(a) + \lambda$ $(a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$. Множество $\mathrm{X}(\mathscr{A}_e) \setminus \{\chi_e :\ \chi \in \mathrm{X}(A)\}$ состоит из единственного элемента $\chi_\infty(a,\ \lambda) := \lambda$ $(a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$. Таким образом, пространство $\mathrm{X}(A)$ локально компактно (ср. 9.4.19), ибо отображение $\chi \in \mathrm{X}(A) \mapsto \chi_e \in \mathrm{X}(\mathscr{A}_e) \setminus \{\chi_\infty\}$ является гомеоморфизмом. При этом $\ker \chi_\infty = A \times 0$. Следовательно, преобразование Гельфанда коммутативной банаховой алгебры без единицы служит ее представлением в алгебре определенных на локально компактном пространстве непрерывных комплексных функций, «*стремящихся к нулю на бесконечности*». Для групповой алгебры $(L_1(\mathbb{R}^N),\ *)$ на основании 10.11.1 и 10.11.3 преобразование Фурье совпадает с преобразованием Гельфанда и приведенное утверждение содержит как теорему Римана — Лебега 10.11.5 (3), так и формулу умножения 10.11.6 (3).

11.7. Спектр элемента C^*-алгебры

11.7.1. Определение. Элемент a инволютивной алгебры A называют *эрмитовым*, если $a^* = a$. Элемент a из A называют *нормальным*, если $a^*a = aa^*$. Наконец, элемент a называют *унитарным*, если $aa^* = a^*a = 1$ (т. е. $a,\ a^* \in \mathrm{Inv}(A)$ и $a^{-1} = a^*,\ a^{*-1} = a$).

11.7.2. *Эрмитовы элементы инволютивной алгебры A образуют вещественное подпространство A. При этом для любого $a \in A$ существуют, и притом единственные, эрмитовы элементы $x,\ y \in A$ такие, что $a = x + iy$. Именно,*

$$x = \frac{1}{2}(a + a^*), \quad y = \frac{1}{2i}(a - a^*).$$

При этом $a^* = x - iy$.

$\triangleleft$ Следует проверить только утверждение об единственности. Если $a = x_1 + iy_1$, то в силу свойств инволюции (см. 6.4.13) выполнено $a^* = x_1^* + (iy_1)^* = x_1^* - iy_1^* = x_1 - iy_1$. Стало быть, $x_1 = x$ и $y_1 = y$. $\triangleright$

11.7.3. *Единица — эрмитов элемент.*

$\triangleleft$ $1^* = 1^*1 = 1^*1^{**} = (1^*1)^* = 1^{**} = 1$ $\triangleright$

11.7.4. $a \in \operatorname{Inv}(A) \Leftrightarrow a^* \in \operatorname{Inv}(A)$. *При этом инволюция и обращение — коммутирующие операции.*

$\lhd$ Имеем $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ для $a \in \operatorname{Inv}(A)$. Значит, $a^{-1*}a^* = a^*a^{-1*} = 1^*$. Учитывая 11.7.3, видим, что $a^* \in \operatorname{Inv}(A)$ и $a^{*-1} = a^{-1*}$. Повторяя приведенное рассуждение при $a := a^*$, получаем требуемое. $\rhd$

11.7.5. $\operatorname{Sp}(a^*) = \operatorname{Sp}(a)^*$. $\lhd\rhd$

11.7.6. *Спектр унитарного элемента C^*-алгебры — подмножество единичной окружности.*

$\lhd$ В силу определения 6.4.13 для произвольного элемента a имеем $\|a^2\| = \|a^*a\| \leq \|a^*\|\,\|a\|$. Иначе говоря, $\|a\| \leq \|a^*\|$. Таким образом, поскольку $a = a^{**}$, заключаем: $\|a\| = \|a^*\|$. Если $a^* = a^{-1}$, т. е. a — унитарный элемент, то $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|a^{-1}a\| = 1$. Следовательно, $\|a\| = \|a^*\| = \|a^{-1}\| = 1$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{Sp}(a)$ и $\operatorname{Sp}(a^{-1})$ лежат в единичном круге. Помимо этого, $\operatorname{Sp}(a^{-1}) = \operatorname{Sp}(a)^{-1}$. $\rhd$

11.7.7. *Спектр эрмитова элемента C^*-алгебры веществен.*

$\lhd$ Пусть $a \in A$. По теореме Гельфанда — Данфорда для алгебр 11.3.2 выполнено

$$\exp(a)^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^n)^*}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^*)^n}{n!} = \exp(a^*).$$

Если теперь $h = h^*$ — эрмитов элемент A, то для элемента $a := \exp(ih)$, вновь привлекая голоморфное функциональное исчисление, получаем

$$a^* = \exp(ih)^* = \exp((ih)^*) = \exp(-ih^*) = \exp(-ih) = a^{-1}.$$

Значит, a — унитарный элемент C^*-алгебры A, и по 11.7.6 спектр $\operatorname{Sp}(a)$ — это подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$. Если $\lambda \in \operatorname{Sp}(h)$, то по теореме об отображении спектра 8.2.5 (см. также 11.3.3) $\exp(i\lambda) \in \operatorname{Sp}(a) \subset \mathbb{T}$. Итак, $1 = |\exp(i\lambda)| = |\exp(i \operatorname{Re}\lambda - \operatorname{Im}\lambda)| = \exp(-\operatorname{Im}\lambda)$. Окончательно $\operatorname{Im}\lambda = 0$, т. е. $\lambda \in \mathbb{R}$. $\rhd$

11.7.8. Определение. Пусть A — некоторая C^*-алгебра. Подалгебру B алгебры A называют *C^*-подалгеброй* A, если $b \in B \Rightarrow b^* \in B$. При этом B рассматривают с нормой, индуцированной из A.

11.7.9. *Теорема.* *Каждая замкнутая C^*-подалгебра C^*-алгебры сервантна.*

$\lhd$ Пусть B — это замкнутая C^*-подалгебра (с единицей) C^*-алгебры A и $b \in B$. Если $b \in \mathrm{Inv}(B)$, то несомненно, что $b \in \mathrm{Inv}(A)$. Пусть теперь $b \in \mathrm{Inv}(A)$. На основании 11.7.4 имеем: $b^* \in \mathrm{Inv}(A)$. Значит, $b^*b \in \mathrm{Inv}(A)$ и при этом элемент $(b^*b)^{-1}b^*$ является левым обратным к b. В силу 11.1.4 это означает, что $b^{-1} = (b^*b)^{-1}b^*$. Следовательно, для завершения доказательства нужно установить только, что элемент $(b^*b)^{-1}$ входит в B. Так как элемент b^*b эрмитов в B, то выполнено соотношение $\mathrm{Sp}_B(b^*b) \subset \mathbb{R}$ (см. 11.7.7). Привлекая 11.2.5, видим, что $\mathrm{Sp}_A(b^*b) = \mathrm{Sp}_B(b^*b)$. Поскольку $0 \notin \mathrm{Sp}_A(b^*b)$, то $b^*b \in \mathrm{Inv}(B)$. Окончательно $b \in \mathrm{Inv}(B)$. $\rhd$

11.7.10. *Следствие.* *Пусть b — элемент C^*-алгебры A и B — какая-нибудь замкнутая C^*-подалгебра A, причем $b \in B$. Тогда*

$$\mathrm{Sp}_B(b) = \mathrm{Sp}_A(b). \ \lhd\rhd$$

11.7.11. Замечание. В связи с 11.7.10 теорему 11.7.9 часто называют теоремой «о постоянстве спектра в C^*-алгебрах». Имеется в виду то, что понятие спектра элемента C^*-алгебры «абсолютно», т. е. не зависит от выбора C^*-подалгебры, содержащей данный элемент рассматриваемой C^*-алгебры.

11.8. Коммутативная теорема Гельфанда — Наймарка

11.8.1. *Банахова алгебра $C(Q,\ \mathbb{C})$ с естественной инволюцией $f \mapsto f^*$, где $f^*(q) := f(q)^*$ для $q \in Q$, является C^*-алгеброй.*

$\lhd$ $\|f^*f\| = \sup\{|f(q)^*f(q)| : \ q \in Q\} = \sup\{|f(q)|^2 : \ q \in Q\} = (\sup|f(Q)|)^2 = \|f\|^2$ $\rhd$ $\rhd$

11.8.2. *Теорема Стоуна — Вейерштрасса для $C(Q,\ \mathbb{C})$.* *Любая C^*-подалгебра (с единицей) в C^*-алгебре $C(Q,\ \mathbb{C})$, разделяющая точки Q, плотна в $C(Q,\ \mathbb{C})$.*

$\lhd$ Пусть A — такая подалгебра. Поскольку $f \in A \Rightarrow f^* \in A$, то $f \in A \Rightarrow \mathrm{Re}\, f \in A$ и, стало быть, множество $\mathrm{Re}\, A := \{\mathrm{Re}\, f : f \in A\}$ представляет собой вещественную подалгебру в $C(Q,\ \mathbb{R})$. Несомненно, что $\mathrm{Re}\, A$ содержит постоянные функции и разделяет точки Q. По теореме Стоуна — Вейерштрасса 10.8.17 подалгебра $\mathrm{Re}\, A$ плотна в $C(Q,\ \mathbb{R})$. Осталось привлечь 11.7.2. $\rhd$