11.7.9. *Теорема.* *Каждая замкнутая C^*-подалгебра C^*-алгебры сервантна.*

$\lhd$ Пусть B — это замкнутая C^*-подалгебра (с единицей) C^*-алгебры A и $b \in B$. Если $b \in \mathrm{Inv}(B)$, то несомненно, что $b \in \mathrm{Inv}(A)$. Пусть теперь $b \in \mathrm{Inv}(A)$. На основании 11.7.4 имеем: $b^* \in \mathrm{Inv}(A)$. Значит, $b^*b \in \mathrm{Inv}(A)$ и при этом элемент $(b^*b)^{-1}b^*$ является левым обратным к b. В силу 11.1.4 это означает, что $b^{-1} = (b^*b)^{-1}b^*$. Следовательно, для завершения доказательства нужно установить только, что элемент $(b^*b)^{-1}$ входит в B. Так как элемент b^*b эрмитов в B, то выполнено соотношение $\mathrm{Sp}_B(b^*b) \subset \mathbb{R}$ (см. 11.7.7). Привлекая 11.2.5, видим, что $\mathrm{Sp}_A(b^*b) = \mathrm{Sp}_B(b^*b)$. Поскольку $0 \notin \mathrm{Sp}_A(b^*b)$, то $b^*b \in \mathrm{Inv}(B)$. Окончательно $b \in \mathrm{Inv}(B)$. $\rhd$

11.7.10. *Следствие.* *Пусть b — элемент C^*-алгебры A и B — какая-нибудь замкнутая C^*-подалгебра A, причем $b \in B$. Тогда*

$$\mathrm{Sp}_B(b) = \mathrm{Sp}_A(b). \ \lhd\rhd$$

11.7.11. Замечание. В связи с 11.7.10 теорему 11.7.9 часто называют теоремой «о постоянстве спектра в C^*-алгебрах». Имеется в виду то, что понятие спектра элемента C^*-алгебры «абсолютно», т. е. не зависит от выбора C^*-подалгебры, содержащей данный элемент рассматриваемой C^*-алгебры.

11.8. Коммутативная теорема Гельфанда — Наймарка

11.8.1. *Банахова алгебра $C(Q,\ \mathbb{C})$ с естественной инволюцией $f \mapsto f^*$, где $f^*(q) := f(q)^*$ для $q \in Q$, является C^*-алгеброй.*

$\lhd$ $\|f^*f\| = \sup\{|f(q)^*f(q)| :\ q \in Q\} = \sup\{|f(q)|^2 :\ q \in Q\} = (\sup|f(Q)|)^2 = \|f\|^2$ $\rhd$ $\rhd$

11.8.2. *Теорема Стоуна — Вейерштрасса для $C(Q,\ \mathbb{C})$.* *Любая C^*-подалгебра (с единицей) в C^*-алгебре $C(Q,\ \mathbb{C})$, разделяющая точки Q, плотна в $C(Q,\ \mathbb{C})$.*

$\lhd$ Пусть A — такая подалгебра. Поскольку $f \in A \Rightarrow f^* \in A$, то $f \in A \Rightarrow \mathrm{Re}\, f \in A$ и, стало быть, множество $\mathrm{Re}\, A := \{\mathrm{Re}\, f :\ f \in A\}$ представляет собой вещественную подалгебру в $C(Q,\ \mathbb{R})$. Несомненно, что $\mathrm{Re}\, A$ содержит постоянные функции и разделяет точки Q. По теореме Стоуна — Вейерштрасса 10.8.17 подалгебра $\mathrm{Re}\, A$ плотна в $C(Q,\ \mathbb{R})$. Осталось привлечь 11.7.2. $\rhd$

11.8.3. Определение. Представление $*$-алгебр, согласованное с инволюцией $*$, называют *$*$-представлением.* Иными словами, если $(A, *)$ и $(B, *)$ — инволютивные алгебры и $\mathfrak{R} : A \to B$ — мультипликативный линейный оператор, то $\mathfrak{R}$ называют *$*$-представлением* в случае коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathscr{R}} & B \\ *\downarrow & & \downarrow * \\ A & \xrightarrow{\mathscr{R}} & B \end{array}$$

Если при этом $\mathfrak{R}$ — изоморфизм, то $\mathfrak{R}$ называют *$*$-изоморфизмом* A и B. При наличии норм в рассматриваемых алгебрах используют также термины «*изометрическое $*$-представление*» и «*изометрический $*$-изоморфизм*», вкладывая в них очевидное содержание.

11.8.4. *Коммутативная теорема Гельфанда — Наймарка.* *Преобразование Гельфанда коммутативной C^*-алгебры A осуществляет изометрический $*$-изоморфизм A и $C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$.*

$\lhd$ Для $a \in A$ имеем

$$\|a^2\| = \|(a^2)^* a^2\|^{1/2} = \|a^* a a^* a\|^{1/2} = \|a^* a\| = \|a\|^2.$$

На основании 11.6.10 преобразование Гельфанда $\mathscr{G}_A$ — это изометрия алгебры A и замкнутой подалгебры $\widehat{A}$ в $C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$. Несомненно, что $\widehat{A}$ разделяет точки $\mathrm{X}(A)$ и содержит постоянные функции.

В силу 11.6.9 и 11.7.7 для эрмитова элемента $h = h^*$ в A имеем $\widehat{h}(\mathrm{X}(A)) = \mathrm{Sp}(h) \subset \mathbb{R}$. Пусть теперь a — произвольный элемент A. Привлекая 11.7.2, запишем: $a = x + iy$, где элементы $x,\ y$ эрмитовы. Учитывая, что для произвольного характера χ из $\mathrm{X}(A)$ выполнено $\chi(x) \in \mathbb{R},\ \chi(y) \in \mathbb{R}$, последовательно получаем

$$\begin{gathered} \mathscr{G}_A(a)^*(\chi) = \widehat{a}^*(\chi) = \widehat{a}(\chi)^* = \chi(a)^* = \chi(x+iy)^* = \\ = (\chi(x) + i\chi(y))^* = \chi(x) - i\chi(y) = \chi(x - iy) = \chi(a^*) = \\ = \widehat{a^*}(\chi) = \mathscr{G}_A(a^*)(\chi) \quad (\chi \in \mathrm{X}(A)). \end{gathered}$$

Таким образом, преобразование Гельфанда $\mathscr{G}_A$ является $*$-представлением и, в частности, $\widehat{A}$ — это C^*-подалгебра $C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$. Осталось привлечь 11.8.2, чтобы заключить: $\widehat{A} = C(\mathrm{X}(A),\ \mathbb{C})$. $\rhd$

11.8.5. *Пусть $\mathfrak{R} : A \to B$ — это $*$-представление C^*-алгебры A в C^*-алгебре B. Тогда $\|\mathfrak{R}a\| \le \|a\|$ для $a \in A$.*

$\triangleleft$ Поскольку $\mathfrak{R}(1) = 1$, то $\mathfrak{R}(\mathrm{Inv}(A)) \subset \mathrm{Inv}(B)$. Значит, для $a \in A$ справедливо включение $\mathrm{Sp}_B(\mathfrak{R}(a)) \subset \mathrm{Sp}_A(a)$. Отсюда в силу формулы Бёрлинга — Гельфанда для спектральных радиусов вытекает, что $r_A(a) \ge r_B(\mathfrak{R}(a))$. Если a — эрмитов элемент A, то $\mathfrak{R}(a)$ — эрмитов элемент B, ибо $\mathfrak{R}(a)^* = \mathfrak{R}(a^*) = \mathfrak{R}(a)$. Если теперь A_0 — наименьшая замкнутая C^*-подалгебра, содержащая a, и B_0 — аналогичным образом построенная подалгебра, содержащая $\mathfrak{R}(a)$, то A_0 и B_0 — коммутативные C^*-алгебры. Таким образом, из теорем 11.8.4 и 11.6.9 получаем

$$\|\mathfrak{R}(a)\| = \|\mathfrak{R}(a)\|_{B_0} = \|\mathscr{G}_{B_0}(\mathfrak{R}(a))\| = r_{B_0}(\mathfrak{R}(a)) =$$
$$= r_B(\mathfrak{R}(a)) \le r_A(a) = r_{A_0}(a) = \|\mathscr{G}_{A_0}(a)\| = \|a\|.$$

Для произвольного элемента $a \in A$ видно, что элемент a^*a эрмитов. Стало быть, с учетом уже доказанного имеем

$$\|\mathfrak{R}(a)\|^2 = \|\mathfrak{R}(a)^*\mathfrak{R}(a)\| = \|\mathfrak{R}(a^*a)\| \le \|a^*a\| = \|a\|^2. \ \triangleright$$

11.8.6. *Теорема о непрерывном функциональном исчислении.* *Пусть a — нормальный элемент C^*-алгебры A и $\mathrm{Sp}(a)$ его спектр. Существует, и притом единственное, изометрическое $*$-представление $\mathfrak{R}_a$ алгебры $C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C})$ в A такое, что $a = \mathfrak{R}_a(I_{\mathrm{Sp}(a)})$.*

$\triangleleft$ Пусть B — наименьшая замкнутая C^*-подалгебра A, содержащая a. Ясно, что алгебра B коммутативна в силу нормальности a (эта алгебра представляет собой замыкание алгебры многочленов от a и a^*). При этом на основании 11.7.10 выполнено $\mathrm{Sp}(a) = \mathrm{Sp}_A(a) = \mathrm{Sp}_B(a)$. Преобразование Гельфанда $\widehat{a} := \mathscr{G}_B(a)$ элемента a действует из $\mathrm{X}(B)$ на $\mathrm{Sp}(a)$ в силу 11.6.9 и, несомненно, взаимно однозначно. Поскольку $\mathrm{X}(B)$ и $\mathrm{Sp}(a)$ — компакты, привлекая 9.4.11, заключаем, что $\widehat{a}$ — это гомеоморфизм. Отсюда непосредственно вытекает, что отображение $\overset{\circ}{\mathfrak{R}} : f \mapsto f \circ \widehat{a}$ осуществляет изометрический $*$-изоморфизм алгебры $C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C})$ и алгебры $C(\mathrm{X}(B),\ \mathbb{C})$.

Используя теорему 11.3.2 и связь преобразования Гельфанда и интеграла Рисса — Данфорда, установленную в 11.6.12, для тождественного отображения получаем

$$\widehat{a} = \mathscr{R}_{\hat{a}} I_{\mathbb{C}} = I_{\mathbb{C}} \circ \widehat{a} = I_{\mathbb{C}}\big|_{\hat{a}(\mathrm{X}(B))} \circ \widehat{a} =$$
$$= I_{\mathbb{C}}\big|_{\mathrm{Sp}(a)} \circ \widehat{a} = I_{\mathrm{Sp}(a)} \circ \widehat{a} = \overset{\circ}{\mathfrak{R}}(I_{\mathrm{Sp}(a)}).$$

Положим теперь

$$\mathfrak{R}_a := \mathscr{G}_B^{-1} \circ \overset{\circ}{\mathfrak{R}}.$$

Видно, что $\mathfrak{R}_a$ — это изометрическое вложение и $*$-представление. Кроме того,

$$\mathfrak{R}_a(I_{\mathrm{Sp}(a)}) = \mathscr{G}_B^{-1} \circ \overset{\circ}{\mathfrak{R}}(I_{\mathrm{Sp}(a)}) = \mathscr{G}_B^{-1}(\widehat{a}) = a.$$

Единственность такого представления $\mathfrak{R}_a$ обеспечена 11.8.5 и тем, что, по теореме 11.8.2, C^*-алгебра $C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C})$ — это своя наименьшая замкнутая C^*-подалгебра (с единицей), содержащая $I_{\mathrm{Sp}(a)}$. $\rhd$

11.8.7. Определение. Представление $\mathfrak{R}_a : C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C}) \to A$, построенное в 11.8.6, называют ***непрерывным функциональным исчислением*** (для нормального элемента a алгебры A).

Если при этом $f \in C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C})$, то элемент $\mathfrak{R}_a(f)$ обозначают $f(a)$.

11.8.8. Замечание. Пусть f — голоморфная функция в окрестности спектра нормального элемента a некоторой C^*-алгебры A, т. е. $f \in H(\mathrm{Sp}(a))$. Тогда с помощью голоморфного функционального исчисления определен элемент $f(a)$ алгебры A.

Если сохранить символ f за сужением функции f на множество $\mathrm{Sp}(a)$, то с помощью непрерывного функционального исчисления определен элемент $\mathfrak{R}_a(f) := \mathfrak{R}_a\big(f\big|_{\mathrm{Sp}(a)}\big)$ алгебры A. Последний элемент, как отмечено в 11.8.7, обозначают $f(a)$. Использование одинаковых обозначений здесь не случайно и корректно в силу 11.6.12 и 11.8.6. В самом деле, странно было бы обязательно обозначать разными символами один и тот же элемент. Указанное обстоятельство можно выразить в наглядной форме. Именно, пусть $\cdot\big|_{\mathrm{Sp}(a)}$ — отображение, сопоставляющее ростку h из $\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a))$ его сужение на $\mathrm{Sp}(a)$, т. е. пусть $h\big|_{\mathrm{Sp}(a)}$ в точке z — это значение ростка h в точке z (см. 8.1.21). Ясно, что $\cdot\big|_{\mathrm{Sp}(a)} : \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)) \to C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C})$.

Отмеченную выше связь непрерывного и голоморфного функциональных исчислений для нормального элемента a рассматриваемой C^*-алгебры a можно выразить так: «следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)) \arrow[r, "\cdot|_{\mathrm{Sp}(a)}"] \arrow[dr, "\mathscr{R}_a"'] & C(\mathrm{Sp}(a), \mathbb{C}) \arrow[d, "\mathscr{R}_a"] \\ & A \end{tikzcd}$$

коммутативна».

11.9. Операторные $*$-представления C^*-алгебр

11.9.1. Определение. Пусть A — банахова алгебра (с единицей). Элемент $s \in A'$ называют ***состоянием*** A (пишут $s \in S(A)$), если $\|s\| = s(1) = 1$. Для элемента $a \in A$ множество $N(a) := \{s(a) : s \in S(A)\}$ называют ***числовым образом*** a.

11.9.2. *Числовой образ положительной функции из $C(Q,\ \mathbb{C})$ лежит в $\mathbb{R}_+$.*

$\lhd$ Пусть $a \geq 0$ и $\|s\| = s(1) = 1$. Нужно показать, что $s(a) \geq 0$. Возьмем $z \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что круг $B_\varepsilon(z) := z + \varepsilon\mathbb{D}$ содержит $a(Q)$. Тогда $\|a - z\| \leq \varepsilon$ и, следовательно, $|s(a - z)| \leq \varepsilon$. Значит, $|s(a) - z| = |s(a) - s(z)| \leq \varepsilon$, т. е. $s(a) \in B_\varepsilon(z)$.

Заметим, что

$$\cap\{B_\varepsilon(z) :\ B_\varepsilon(z) \supset a(Q)\} = \mathrm{cl}\,\mathrm{co}(a(Q)) \subset \mathbb{R}_+.$$

Таким образом, $s(a) \in \mathbb{R}_+$. $\rhd$

11.9.3. ***Лемма о числовом образе эрмитова элемента.*** *Для эрмитова элемента a в любой C^*-алгебре имеют место утверждения:*

(1) $\mathrm{Sp}(a) \subset N(a)$;

(2) $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow N(a) \subset \mathbb{R}_+$.

$\lhd$ Пусть B — наименьшая замкнутая C^*-подалгебра рассматриваемой алгебры A, содержащая элемент a. Видно, что алгебра B коммутативна. В силу 11.6.9 для преобразования Гельфанда $\widehat{a} := \mathscr{G}_B(a)$ выполнено $\widehat{a}(\mathrm{X}(B)) = \mathrm{Sp}_B(a)$. На основании 11.7.10, $\mathrm{Sp}_B(a) = \mathrm{Sp}(a)$. Иначе говоря, для $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$ имеется характер χ алгебры B, удовлетворяющий условию $\chi(a) = \lambda$. По 11.6.3, $\|\chi\| = \chi(1) = 1$. Привлекая 7.5.11, найдем продолжение s функционала χ на A с сохранением нормы. Тогда s — состояние A и при этом $s(a) = \lambda$. Окончательно $\mathrm{Sp}(a) \subset N(a)$ (в частности, если $N(a) \subset \mathbb{R}_+$, то $\mathrm{Sp}(a) \subset$