$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(a)) \arrow[r, "\cdot|_{\mathrm{Sp}(a)}"] \arrow[dr, "\mathscr{R}_a"'] & C(\mathrm{Sp}(a),\mathbb{C}) \arrow[d, "\mathscr{R}_a"] \\
& A
\end{tikzcd}
$$

коммутативна».

11.9. Операторные $*$-представления C^*-алгебр

11.9.1. Определение. Пусть A — банахова алгебра (с единицей). Элемент $s \in A'$ называют ***состоянием*** A (пишут $s \in S(A)$), если $\|s\| = s(1) = 1$. Для элемента $a \in A$ множество $N(a) := \{s(a) : s \in S(A)\}$ называют ***числовым образом*** a.

11.9.2. *Числовой образ положительной функции из $C(Q,\ \mathbb{C})$ лежит в $\mathbb{R}_+$.*

$\lhd$ Пусть $a \geq 0$ и $\|s\| = s(1) = 1$. Нужно показать, что $s(a) \geq 0$. Возьмем $z \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что круг $B_\varepsilon(z) := z + \varepsilon\mathbb{D}$ содержит $a(Q)$. Тогда $\|a - z\| \leq \varepsilon$ и, следовательно, $|s(a - z)| \leq \varepsilon$. Значит, $|s(a) - z| = |s(a) - s(z)| \leq \varepsilon$, т. е. $s(a) \in B_\varepsilon(z)$.

Заметим, что

$$\cap\,\{B_\varepsilon(z) :\ B_\varepsilon(z) \supset a(Q)\} = \operatorname{cl}\operatorname{co}(a(Q)) \subset \mathbb{R}_+.$$

Таким образом, $s(a) \in \mathbb{R}_+$. $\rhd$

11.9.3. ***Лемма о числовом образе эрмитова элемента.*** *Для эрмитова элемента a в любой C^*-алгебре имеют место утверждения:*

(1) $\mathrm{Sp}(a) \subset N(a)$;

(2) $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow N(a) \subset \mathbb{R}_+$.

$\lhd$ Пусть B — наименьшая замкнутая C^*-подалгебра рассматриваемой алгебры A, содержащая элемент a. Видно, что алгебра B коммутативна. В силу 11.6.9 для преобразования Гельфанда $\widehat{a} := \mathscr{G}_B(a)$ выполнено $\widehat{a}(\mathrm{X}(B)) = \mathrm{Sp}_B(a)$. На основании 11.7.10, $\mathrm{Sp}_B(a) = \mathrm{Sp}(a)$. Иначе говоря, для $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$ имеется характер χ алгебры B, удовлетворяющий условию $\chi(a) = \lambda$. По 11.6.3, $\|\chi\| = \chi(1) = 1$. Привлекая 7.5.11, найдем продолжение s функционала χ на A с сохранением нормы. Тогда s — состояние A и при этом $s(a) = \lambda$. Окончательно $\mathrm{Sp}(a) \subset N(a)$ (в частности, если $N(a) \subset \mathbb{R}_+$, то $\mathrm{Sp}(a) \subset$

$\mathbb{R}_+$). Пусть теперь s — произвольное состояние алгебры A. Ясно, что сужение $s\big|_B$ — состояние алгебры B. Несложно установить, что $\widehat{a}$ взаимно однозначно отображает $\mathrm{X}(B)$ на $\mathrm{Sp}(a)$. Следовательно, алгебру B можно рассматривать как алгебру $C(\mathrm{Sp}(a),\ \mathbb{C})$. Из 11.9.2 выводим: $s(a) = s\big|_B(a) \geq 0$ при $\widehat{a} \geq 0$. Итак, $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{R}_+ \Rightarrow N(a) \subset \mathbb{R}_+$, что и завершает доказательство. $\rhd$

11.9.4. Определение. Элемент a в C^*-алгебре A называют *положительным*, если a эрмитов и $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{R}_+$. Множество всех положительных элементов в A обозначают A_+.

11.9.5. *Множество A_+ — это упорядочивающий конус в C^*-алгебре A.*

$\lhd$ Понятно, что $N(a+b) \subset N(a) + N(b)$ и $N(\alpha a) = \alpha N(a)$ при $a,\ b \in A$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Поэтому 11.9.3 обеспечивает включение $\alpha_1 A_+ + \alpha_2 A_+ \subset A_+$ для $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$. Стало быть, A_+ — конус. Если $a \in A_+ \cap (-A_+)$, то $\mathrm{Sp}(a) = 0$. Учитывая, что элемент a эрмитов, по теореме 11.8.6 заключаем: $\|a\| = 0$. $\rhd$

11.9.6. *Для любого эрмитова элемента a из C^*-алгебры A существуют элементы a_+, a_- из A_+ такие, что*

$$a = a_+ - a_-; \quad a_+ a_- = a_- a_+ = 0.$$

$\lhd$ Все немедленно следует из теоремы о непрерывном функциональном исчислении 11.8.6. $\rhd$

11.9.7. *Лемма Капланского — Фукамия.* *Элемент a произвольной C^*-алгебры A положителен в том и только в том случае, если $a = b^*b$ для некоторого $b \in A$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $a \in A_+$, т. е. $a = a^*$ и $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathbb{R}_+$. Тогда (см. 11.8.6) имеется корень $b := \sqrt{a}$. При этом $b = b^*$ и $b^*b = a$.

$\Leftarrow$: Если $a = b^*b$, то элемент a эрмитов и с помощью 11.9.6 можно записать: $b^*b = u - v$, где $uv = vu = 0$ и $u \geq 0$, $v \geq 0$ (в упорядоченном векторном пространстве $(A_{\mathbb{R}},\ A_+)$). Простой подсчет показывает:

$$(bv)^*bv = v^*b^*bv = vb^*bv = v(u-v)v = (vu - v^2)v = -v^3.$$

Поскольку $v \geq 0$, то $v^3 \geq 0$, т. е. $(bv)^*bv \leq 0$. По теореме о спектре произведения 5.6.22 множества $\mathrm{Sp}((bv)^*bv)$ и $\mathrm{Sp}(bv(bv)^*)$ могут отличаться лишь нулем. Поэтому $bv(bv)^* \leq 0$.

На основании 11.7.2, $bv = a_1 + ia_2$ для подходящих эрмитовых элементов a_1 и a_2. Очевидно, что $a_1^2,\ a_2^2 \in A_+$ и $(bv)^* = a_1 - ia_2$. Дважды используя 11.9.5, приходим к оценкам:

$$0 \geq (bv)^*bv + bv(bv)^* = 2\left(a_1^2 + a_2^2\right) \geq 0.$$

По 11.9.5, $a_1 = a_2 = 0$, т. е. $bv = 0$. Значит, $-v^3 = (bv)^*bv = 0$. Вторичная апелляция к 11.9.5 дает $v = 0$. Наконец, $a = b^*b = u - v = u \geq 0$, т. е. $a \in A_+$. $\rhd$

11.9.8. *В C^*-алгебре A каждое состояние s эрмитово, т. е.*

$$s(a^*) = s(a)^* \quad (a \in A).$$

$\lhd$ По леммам 11.9.7 и 11.9.3 при всех $a \in A$ будет $s(a^*a) \geq 0$. Полагая $a := a + 1$ и $a := a + i$, последовательно получаем

$$0 \leq s((a+1)^*(a+1)) = s(a^*a + a + a^* + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(a) + s(a^*) \in \mathbb{R};$$

$$0 \leq s((a+i)^*(a+i)) = s(a^*a - ia + ia^* + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i(-s(a) + s(a^*)) \in \mathbb{R}.$$

Иными словами,

$$\operatorname{Im} s(a) + \operatorname{Im} s(a^*) = 0;$$

$$\operatorname{Re}(-s(a)) + \operatorname{Re} s(a^*) = 0.$$

Отсюда вытекает

$$s(a^*) = \operatorname{Re} s(a^*) + i \operatorname{Im} s(a^*) = \operatorname{Re} s(a) - i \operatorname{Im} s(a) = s(a)^*. \ \rhd$$

11.9.9. *Пусть s — состояние C^*-алгебры A. Для $a,\ b \in A$ обозначим $(a,\ b)_s := s(b^*a)$. Тогда $(\cdot\,,\,\cdot)_s$ — скалярное произведение в A.*

$\lhd$ Из 11.9.8 выводим

$$(a,\ b)_s = s(b^*a) = s((a^*b)^*) = s(a^*b)^* = (b,\ a)_s^*.$$

Следовательно, $(\cdot\,,\,\cdot)_s$ — это эрмитова форма. Так как для $a \in A$, в силу 11.9.7, $a^*a \geq 0$, то, по 11.9.3, $(a,\ a)_s = s(a^*a) \geq 0$. Значит, $(\cdot\,,\,\cdot)_s$ — положительная эрмитова форма. $\rhd$

11.9.10. Теорема о состоянии C^*-алгебры. *Для каждого состояния s произвольной C^*-алгебры A имеются гильбертово пространство $(H_s,\ (\,\cdot\,,\,\cdot)_s)$, элемент $x_s \in H_s$ и $*$-представление $\mathfrak{R}_s : A \to B(H_s)$ такие, что $s(a) = (\mathfrak{R}_s(a)x_s, x_s)_s$ для всех $a \in A$ и множество $\{\mathfrak{R}_s(a)x_s :\ a \in A\}$ плотно в H_s.*

$\lhd$ На основании 11.9.9, полагая $(a,\ b)_s := s(b^*a)$ для $a,\ b \in A$, получаем предгильбертово пространство $(A,\ (\,\cdot\,,\,\cdot)_s)$. Пусть $p_s(a) := \sqrt{(a,\ a)_s}$ — полунорма в этом пространстве, а $\varphi_s : A \to A/\ker p_s$ — каноническое отображение A на хаусдорфово предгильбертово пространство $A/\ker p_s$, ассоциированное с A. Пусть, далее, $\iota_s : A/\ker p_s \to H_s$ — вложение (например, с помощью двойного штрихования) пространства $A/\ker p_s$ в качестве всюду плотного подпространства в гильбертово пространство H_s, ассоциированное с пространством $(A,\ (\,\cdot\,,\,\cdot)_s)$ (см. пример 6.1.10 (4)). Скалярное произведение в пространстве H_s обозначим прежним символом $(\,\cdot\,,\,\cdot)_s$. Таким образом, в частности,

$$(\iota_s\varphi_s a,\ \iota_s\varphi_s b)_s = (a,\ b)_s = s(b^*a) \quad (a,\ b \in A).$$

Для элемента $a \in A$ рассмотрим (образ при каноническом операторном представлении) $L_a : b \mapsto ab$ $(b \in A)$. Установим прежде всего, что существуют, и притом единственные, ограниченные операторы $\overline{L_a}$ и $\mathfrak{R}_s(a)$, превращающие в коммутативную следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{\varphi_s} & A/\ker p_s & \xrightarrow{\iota_s} & H_s \\
L_a \downarrow & & \downarrow \overline{L_a} & & \downarrow \mathfrak{R}_s(a) \\
A & \xrightarrow{\varphi_s} & A/\ker p_s & \xrightarrow{\iota_s} & H_s
\end{array}$$

Искомый оператор $\overline{L_a}$ служит решением уравнения $\mathcal{X}\varphi_s = \varphi_s L_a$. Привлекая 2.3.8, видим, что необходимое и достаточное условие разрешимости указанного уравнения в классе линейных операторов состоит в инвариантности подпространства $\ker p_s$ относительно L_a.

Итак, проверим включение $L_a(\ker p_s) \subset \ker p_s$. Для этого возьмем элемент b из $\ker p_s$, т. е. $p_s(b) = 0$. Используя определения и неравенство Коши — Буняковского 6.1.5, получаем

$$\begin{aligned}0 \le (L_a b,\ L_a b)_s = (ab,\ ab)_s = s((ab)^*ab) = \\ = s(b^*a^*ab) = (a^*ab,\ b)_s \le p_s(b)p_s(a^*ab) = 0,\end{aligned}$$

т. е. $L_a b \in \ker p_s$. Единственность $\overline{L_a}$ обеспечена 2.3.9, ибо φ_s — эпиморфизм. Отметим также, что φ_s — это открытое отображение (ср. 5.1.3). Отсюда немедленно следует непрерывность оператора $\overline{L_a}$. Таким образом, в силу 5.3.8 соответствие $\iota_s \circ \overline{L_a} \circ (\iota_s)^{-1}$ можно рассматривать как ограниченный линейный оператор из $\iota_s(A/\ker p_s)$ в банахово пространство H_s. В связи с 4.5.10 такой оператор допускает, и притом единственное, продолжение до оператора $\mathfrak{R}_s(a)$ из $B(H_s)$.

Установим теперь, что $\mathfrak{R}_s : a \mapsto \mathfrak{R}_s(a)$ — это требуемое представление. В силу 11.1.6 выполнено: $L_{ab} = L_a L_b$ для $a,\ b \in A$. Значит,

$$\varphi_s L_{ab} = \varphi_s L_a L_b = \overline{L_a}\varphi_s L_b = \overline{L_a}\,\overline{L_b}\varphi_s.$$

Поскольку $\overline{L_{ab}}$ — единственное решение уравнения $\mathfrak{X}\varphi_s = \varphi_s L_{ab}$, приходим к соотношению $\overline{L_{ab}} = \overline{L_a}\,\overline{L_b}$, обеспечивающему мультипликативность $\mathfrak{R}_s$. То, что $\mathfrak{R}_s$ — линейный оператор, проверяется аналогично. Помимо этого,

$$L_1\varphi_s = \varphi_s L_1 = \varphi_s I_A = \varphi_s = I_{A/\ker p_s}\varphi_s = 1\varphi_s,$$

т. е. $\mathfrak{R}_s(1) = 1$.

Обозначим для удобства $\psi_s := \iota_s\varphi_s$. Тогда с учетом определений скалярного произведения в H_s (см. 6.1.10 (4)) и инволюции в $B(H_s)$ (см. 6.4.14 и 6.4.5) для элементов $a,\ b,\ y \in A$ имеем

$$\begin{gathered}(\mathfrak{R}_s(a^*)\psi_s x,\ \psi_s y)_s = (\psi_s L_{a^*}x,\ \psi_s y)_s = \\ = (L_{a^*}x,\ y)_s = (a^*x,\ y)_s = s(y^*a^*x) = s((ay)^*x) = (x,\ ay)_s = \\ = (x,\ L_a y)_s = (\psi_s x,\ \psi_s L_a y)_s = (\psi_s x,\ \mathfrak{R}_s(a)\psi_s y)_s = \\ = (\mathfrak{R}_s(a)^*\psi_s x,\ \psi_s y)_s.\end{gathered}$$

Отсюда из-за плотности $\operatorname{im}\psi_s$ в H_s вытекает, что $\mathfrak{R}_s(a^*) = \mathfrak{R}_s(a)^*$ для каждого $a \in A$, т. е. $\mathfrak{R}_s$ — это $*$-представление.

Положим теперь $x_s := \psi_s 1$. Тогда

$$\mathfrak{R}_s(a)x_s = \mathfrak{R}_s(a)\psi_s 1 = \psi_s L_a 1 = \psi_s a \quad (a \in A).$$

Следовательно, множество $\{\mathfrak{R}_s(a)x_s :\ a \in A\}$ плотно в H_s. Помимо этого,

$$(\mathfrak{R}_s(a)x_s,\ x_s)_s = (\psi_s a,\ \psi_s 1)_s = (a,\ 1)_s = s(1^*a) = s(a). \ \rhd$$

11.9.11. Замечание. Построение из доказательства теоремы 11.9.10 называют ГНС-*конструкцией* (или развернуто: *конструкцией Гельфанда — Наймарка — Сигала*).

11.9.12. Теорема Гельфанда — Наймарка. *Каждая C^*-алгебра имеет изометрическое $*$-представление в C^*-алгебре эндоморфизмов подходящего гильбертова пространства.*

$\triangleleft$ Пусть A — рассматриваемая C^*-алгебра. Следует найти гильбертово пространство H и изометрическое $*$-представление $\mathfrak{R}$ алгебры A в C^*-алгебре $B(H)$. С этой целью рассмотрим гильбертову сумму H семейства гильбертовых пространств $(H_s)_{s\in S(A)}$, существование который гарантировано теоремой о состоянии C^*-алгебры, т. е.

$$H := \bigoplus_{s\in S(A)} H_s =$$

$$= \left\{ h := (h_s)_{s\in S(A)} \in \prod_{s\in S(A)} H_s : \sum_{s\in S(A)} \|h_s\|^2_{H_s} < +\infty \right\}.$$

Отметим, что скалярное произведение семейств $h := (h_s)_{s\in S(A)}$ и $g := (g_s)_{s\in S(A)}$ в H вычисляется по правилу (ср. 6.1.10 (5) и 6.1.9):

$$(h,\ g) = \sum_{s\in S(A)} (h_s,\ g_s)_s.$$

Пусть, далее, $\mathfrak{R}_s$ — это $*$-представление A в пространстве H_s, соответствующее состоянию s из $S(A)$. Так как в силу 11.8.5 для каждого $a \in A$ выполнена оценка $\|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)} \le \|a\|$, то для $h \in H$ справедливо

$$\sum_{s\in S(A)} \|\mathfrak{R}_s(a)h_s\|^2_{H_s} \le \sum_{s\in S(A)} \|\mathfrak{R}_s(a)\|^2_{B(H_s)} \|h_s\|^2_{H_s} \le \|a\|^2 \sum_{s\in S(A)} \|h_s\|^2_{H_s}.$$

Отсюда вытекает, что соотношение $\mathfrak{R}(a)h : s \mapsto \mathfrak{R}_s(a)h_s$ определяет элемент $\mathfrak{R}(a)h$ из H. Возникающий оператор $\mathfrak{R}(a) : h \mapsto \mathfrak{R}(a)h$ — элемент пространства $B(H)$. Более того, отображение $\mathfrak{R} : a \mapsto \mathfrak{R}(a)$ $(a \in A)$ — это искомое изометрическое $*$-представление алгебры A.

В самом деле, из определения $\mathfrak{R}$ и свойств $\mathfrak{R}_s$ для $s \in S(A)$ легко вывести, что $\mathfrak{R}$ — это $*$-представление A в $B(H)$. Убедимся, например, что $\mathfrak{R}$ согласовано с инволюцией. Для этого возьмем элементы $a \in A$ и $h,\ g \in H$. Тогда

$$(\mathfrak{R}(a^*)h,\ g) = \sum_{s\in S(A)} (\mathfrak{R}_s(a^*)h_s,\ g_s)_s =$$

$$= \sum_{s\in S(A)} (\mathfrak{R}_s(a)^* h_s,\ g_s)_s = \sum_{s\in S(A)} (h_s,\ \mathfrak{R}_s(a) g_s)_s =$$

$$= (h,\ \mathfrak{R}(a)g) = (\mathfrak{R}(a)^* h,\ g).$$

Из-за произвольности $h,\ g \in H$ получаем $\mathfrak{R}(a^*) = \mathfrak{R}(a)^*$, что и нужно.

Осталось проверить только изометричность $*$-представления $\mathfrak{R}$, т. е. равенства $\|\mathfrak{R}(a)\| = \|a\|$ при всех $a \in A$. Пусть для начала a — это положительный элемент. Из непрерывного функционального исчисления и теоремы Вейерштрасса 9.4.5 следует: $\|a\| \in \mathrm{Sp}(a)$. На основании 11.9.3 (1) существует состояние $s \in S(A)$, для которого $s(a) = \|a\|$. Учитывая свойства вектора x_s, соответствующего $*$-представлению $\mathfrak{R}_s$ (см. 11.9.10), и привлекая неравенство Коши — Буняковского 6.1.5, получаем

$$\|a\| = s(a) = (\mathfrak{R}_s(a)x_s, x_s)_s \le \|\mathfrak{R}_s(a)x_s\|_{H_s}\|x_s\|_{H_s} \le$$

$$\le \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}\|x_s\|^2_{H_s} = \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}(x_s, x_s)_s =$$

$$= \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}(\mathfrak{R}_s(1)x_s,\ x_s)_s = \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)} s(1) = \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}.$$

Используя оценки $\|\mathfrak{R}(a)\| \ge \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}$ и $\|a\| \ge \|\mathfrak{R}(a)\|$, первая из которых очевидна, а вторая указана в 11.8.5, выводим:

$$\|a\| \ge \|\mathfrak{R}(a)\| \ge \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)} \ge \|a\|.$$

Возьмем, наконец, произвольный элемент a из A. По лемме Капланского — Фукамия 11.9.7 элемент a^*a положителен. Таким образом, можно заключить:

$$\|\mathfrak{R}(a)\|^2 = \|\mathfrak{R}(a)^*\mathfrak{R}(a)\| = \|\mathfrak{R}(a^*)\mathfrak{R}(a)\| = \|\mathfrak{R}(a^*a)\| = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Дальнейшее не требует особых разъяснений. $\triangleright$

Упражнения

11.1. Привести примеры банаховых алгебр и не банаховых алгебр.

11.2. Пусть A — банахова алгебра и $\chi \in A^\#$ таков, что $\chi(1) = 1$ и при этом $\chi(\mathrm{Inv}(A)) \subset \mathrm{Inv}(\mathbb{C})$. Доказать, что χ мультипликативен и непрерывен.

11.3. Пусть спектр $\mathrm{Sp}(a)$ элемента a банаховой алгебры A лежит в открытом множестве U. Доказать, что имеется число $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathrm{Sp}(a + b) \subset U$ при всех $b \in A$, для которых $\|b\| \le \varepsilon$.