1.1.6. *Пусть F — соответствие. Тогда $F \circ F^{-1} \supset I_{\operatorname{im} F}$. Более того, $F \circ F^{-1} = I_{\operatorname{im} F}$ в том и только в том случае, если $F|_{\operatorname{dom} F}$ — это отображение.* $\lhd\rhd$

1.1.7. *Пусть $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$ и $U \subset A$. Тогда для соответствия $G \circ F \subset A \times C$ будет $G \circ F(U) = G(F(U))$.* $\lhd\rhd$

1.1.8. *Пусть $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$, $H \subset C \times D$. Тогда соответствия $H \circ (G \circ F) \subset A \times D$ и $(H \circ G) \circ F \subset A \times D$ совпадают.* $\lhd\rhd$

1.1.9. Замечание. В силу 1.1.8 разумно определен символ $H \circ G \circ F$ и ему подобные выражения.

1.1.10. *Пусть F, G, H — три соответствия. Тогда*

$$H \circ G \circ F = \bigcup_{(b,c)\in G} F^{-1}(b) \times H(c).$$

$\lhd$ $(a,\ d) \in H \circ G \circ F \Leftrightarrow (\exists\,(b,\ c) \in G)\ (c,\ d) \in H\ \&\ (a,\ b) \in F \Leftrightarrow (\exists\ (b,\ c) \in G)\ a \in F^{-1}(b)\ \&\ d \in H(c)$ $\rhd$

1.1.11. Замечание. Предложение 1.1.10 и выкладка, приведенная в качестве его доказательства, с формальной точки зрения вопиюще некорректны, поскольку основываются на неоговоренной явно или на двусмысленной информации (в частности, на определении 1.1.1). Опыт позволяет считать указанную критику поверхностной. Поэтому в дальнейшем аналогичного рода удобные (а на самом деле и неизбежные) некорректности будут, как правило, использоваться без специальных оговорок и сожалений.

1.1.12. *Для соответствий G и F выполнено*

$$G \circ F = \bigcup_{b\in \operatorname{im} F} F^{-1}(b) \times G(b).$$

$\lhd$ В 1.1.10 полагаем: $H := G$, $G := I_{\operatorname{im} F}$ и $F := F$. $\rhd$

1.2. Упорядоченные множества

1.2.1. Определение. Пусть σ — отношение в множестве X, т. е. $\sigma \subset X^2$. *Рефлексивность* σ означает включение $\sigma \supset I_X$, *транзитивность* — включение $\sigma \circ \sigma \subset \sigma$, *антисимметричность* — включение $\sigma \cap \sigma^{-1} \subset I_X$ и, наконец, *симметричность* σ означает равенство $\sigma = \sigma^{-1}$.

1.2.2. Определение. Рефлексивное и транзитивное отношение называют *отношением предпорядка*. Симметричный предпорядок называют *эквивалентностью*. Антисимметричный предпорядок называют *порядком*. Если X — множество, а σ — порядок в X, то пару $(X,\ \sigma)$ называют *упорядоченным множеством* и пишут $x \le_\sigma y$ вместо $y \in \sigma(x)$. Допускают обычные вольности словоупотребления и написания: само X называют упорядоченным множеством, пишут $x \le y$ и говорят «x меньше y» или «y больше x» и т. п. Аналогичные соглашения действуют и для *предупорядоченных множеств*, т. е. множеств с отношениями предпорядка. При этом в случае отношения эквивалентности используют знаки типа $\sim_\sigma$ или просто $\sim$.

1.2.3. Примеры.

(1) Тождественное отношение; подмножество X_0 в X с отношением $\sigma_0 := \sigma \cap X_0 \times X_0$.

(2) Если σ — (пред)порядок на X, то σ^{-1} также (пред)порядок на X. При этом отношение σ^{-1} называют *противоположным* к σ (пред)порядком.

(3) Пусть $f : X \to Y$ и τ — отношение в Y. Рассмотрим в X следующее отношение: $f^{-1} \circ \tau \circ f$. В силу 1.1.10

$$f^{-1} \circ \tau \circ f = \bigcup_{(y_1, y_2) \in \tau} f^{-1}(y_1) \times f^{-1}(y_2).$$

Значит, выполнено

$$(x_1,\ x_2) \in f^{-1} \circ \tau \circ f \Leftrightarrow (f(x_1),\ f(x_2)) \in \tau.$$

Таким образом, если τ — это предпорядок, то $f^{-1} \circ \tau \circ f$ тоже предпорядок, называемый *прообразом* τ при отображении f. Ясно, что прообраз эквивалентности является эквивалентностью. В то же время прообраз порядка не обязан быть антисимметричным отношением. В частности, так, как правило, бывает для следующего отношения эквивалентности: $f^{-1} \circ f = f^{-1} \circ I_Y \circ f$.

(4) Пусть X — произвольное множество и ω — эквивалентность в X. Определим отображение $\varphi : X \to 2^X$ правилом $\varphi(x) := \omega(x)$ (здесь 2^X — это множество подмножеств X, обозначаемое также и $\mathscr{P}(X)$). Пусть $\overline{X} := X/\omega := \operatorname{im} \varphi$ — *фактор-множество*.

Отображение φ, как известно, называют *каноническим* (канонической проекцией, факторным отображением и т. п.). Заметим, что φ считают действующим на $\overline{X}$. Множество $\varphi(x)$ называют *классом эквивалентности* или *комножеством* элемента x. Отметим еще, что

$$\omega = \varphi^{-1} \circ \varphi = \bigcup_{\overline{x} \in \overline{X}} \varphi^{-1}(\overline{x}) \times \varphi^{-1}(\overline{x}).$$

Пусть теперь $f : X \to Y$ — отображение. Тогда f допускает *снижение* $\overline{f}$ на $\overline{X}$, т. е. существует отображение $\overline{f} : \overline{X} \to Y$ такое, что $\overline{f} \circ \varphi = f$ в том и только в том случае, если $\omega \subset f^{-1} \circ f$. ◁▷

(5) Пусть (X, σ) и (Y, τ) — два предупорядоченных множества. Отображение $f : X \to Y$ *возрастает* (т. е. $x \leq_\sigma y \Rightarrow f(x) \leq_\tau f(y)$) в том и только в том случае, если $\sigma \subset f^{-1} \circ \tau \circ f$. ◁▷

1.2.4. Определение. Пусть (X, σ) — упорядоченное множество и U — подмножество в X. Элемент $x \in X$ называют *верхней границей* U, если $U \subset \sigma^{-1}(x)$. Коротко пишут: $x \geq U$. В частности, $x \geq \varnothing$. Элемент $x \in X$ называют *нижней границей* U, если x является верхней границей U в противоположном порядке σ^{-1}. Коротко пишут: $x \leq U$. В частности, $x \leq \varnothing$.

1.2.5. Замечание. В дальнейшем мы будем допускать вольности при введении понятий, получающихся из данных путем перехода к противоположному (пред)порядку. Отметим также, что определение верхней и нижней границ осмыслено и в предупорядоченных множествах.

1.2.6. Определение. Элемент x называют *наибольшим* в множестве U, если $x \geq U$ и $x \in U$. Аналогично определяют *наименьший* элемент U.

1.2.7. *Пусть $\pi_\sigma(U)$ — совокупность всех верхних границ подмножества U в упорядоченном множестве (X, σ). Пусть, далее, $x \in X$ — наибольший элемент U. Тогда, во-первых, x — наименьший элемент $\pi_\sigma(U)$, а во-вторых, $\sigma(x) \cap U = \{x\}$.* ◁▷

1.2.8. Замечание. Предложение 1.2.7 является основой двух обобщений понятия наибольшего элемента.

1.2.9. Определение. Элемент x из X называют *точной верхней границей* множества U в X, если x — наименьший элемент множества всех верхних границ U. При этом пишут $x = \sup_X U$ или, короче, $x = \sup U$. Аналогично (при переходе к противоположному порядку) определяют *точную нижнюю границу* множества U — элемент $\inf U$ или, более полно, $\inf_X U$.

1.2.10. Определение. Элемент x упорядоченного множества $(X,\ \sigma)$ называют *максимальным* в подмножестве U множества X, если $\sigma(x) \cap U = \{x\}$. Аналогично определяют *минимальный* элемент множества U.

1.2.11. Замечание. Необходимо отчетливо представлять себе различия и общие черты понятий наибольшего и максимального элементов и точной верхней границы множества. В частности, стоит «экспериментально» удостовериться, что у «типичного» множества нет наибольшего элемента, однако максимальные элементы встречаются.

1.2.12. Определение. Упорядоченное множество X называют *решеткой*, если для любых двух элементов $x_1,\ x_2$ из X существуют их точная верхняя граница $x_1 \vee x_2 := \sup\{x_1,\ x_2\}$ и точная нижняя граница $x_1 \wedge x_2 := \inf\{x_1,\ x_2\}$.

1.2.13. Определение. Упорядоченное множество X называют *полной решеткой*, если любое подмножество X имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы.

1.2.14. *Упорядоченное множество является полной решеткой в том и только в том случае, если любое его подмножество имеет точную верхнюю границу.* $\lhd\rhd$

1.2.15. Определение. Упорядоченное множество $(X,\ \sigma)$ такое, что $X^2 = \sigma^{-1} \circ \sigma$, называют *фильтрованным по возрастанию*. Аналогично определяют *фильтрованное по убыванию* множество. Непустое фильтрованное по возрастанию множество называют *направленным* или, короче, *направлением*.

1.2.16. Определение. Отображение направленного множества в данное множество X называют (*обобщенной*) *последовательностью* или *сетью* в X. Отображения (естественным образом) направленного множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в X называют (счетными) *последовательностями.* (Следуя одной из традиций, полагают $\mathbb{N} := \{1, 2, 3 \dots\}$.)

1.2.17. *Решетка является полной в том и только в том случае, если любое фильтрованное по возрастанию множество в ней имеет точную верхнюю границу.* ◁▷

1.2.18. Замечание. Смысл 1.2.17 состоит в том, что для нахождения точной верхней границы любого подмножества в X следует научиться находить такие границы для двухэлементных подмножеств в X и для возрастающих сетей элементов X.

1.2.19. Определение. Пусть (X, σ) — упорядоченное множество и $X^2 = \sigma \cup \sigma^{-1}$. Тогда X называют *линейно упорядоченным* множеством. Если X_0 — непустое линейно упорядоченное подмножество X, то X_0 называют *цепью* в X. Непустое упорядоченное множество называют *индуктивным*, если любая цепь в нем ограничена сверху (т. е. имеет верхнюю границу).

1.2.20. *Лемма Куратовского — Цорна.* *Индуктивное множество имеет максимальный элемент.*

1.2.21. Замечание. Лемма Куратовского — Цорна служит эквивалентом аксиомы выбора, принимаемой в теории множеств.

1.3. Фильтры

1.3.1. Определение. Пусть X — множество и $\mathscr{B}$ — непустое подмножество непустых элементов 2^X. Множество $\mathscr{B}$ называют *базисом фильтра* (в X), если $\mathscr{B}$ фильтровано по убыванию при введении в множество 2^X подмножеств X отношения порядка по включению.

1.3.2. *Подмножество* $\mathscr{B}$ в 2^X *является базисом фильтра в том и только в том случае, если*

(1) $\mathscr{B} \neq \varnothing$, $\varnothing \notin \mathscr{B}$;

(2) $B_1,\ B_2 \in \mathscr{B} \Rightarrow (\exists\, B \in \mathscr{B})\ B \subset B_1 \cap B_2$.

1.3.3. Определение. Подмножество $\mathscr{F}$ в 2^X называют *фильтром* (в X), если $\mathscr{F}$ представляет собой совокупность надмножеств некоторого базиса фильтра $\mathscr{B}$ (в X), т. е.

$$\mathscr{F} = \operatorname{fil} \mathscr{B} := \{C \in 2^X :\ (\exists\, B \in \mathscr{B})\ B \subset C\}.$$