ными) *последовательностями.* (Следуя одной из традиций, полагают $\mathbb{N} := \{1, 2, 3 \dots\}$.)

1.2.17. *Решетка является полной в том и только в том случае, если любое фильтрованное по возрастанию множество в ней имеет точную верхнюю границу.* $\triangleleft\triangleright$

1.2.18. Замечание. Смысл 1.2.17 состоит в том, что для нахождения точной верхней границы любого подмножества в X следует научиться находить такие границы для двухэлементных подмножеств в X и для возрастающих сетей элементов X.

1.2.19. Определение. Пусть $(X,\ \sigma)$ — упорядоченное множество и $X^2 = \sigma \cup \sigma^{-1}$. Тогда X называют *линейно упорядоченным* множеством. Если X_0 — непустое линейно упорядоченное подмножество X, то X_0 называют *цепью* в X. Непустое упорядоченное множество называют *индуктивным*, если любая цепь в нем ограничена сверху (т. е. имеет верхнюю границу).

1.2.20. *Лемма Куратовского — Цорна.* *Индуктивное множество имеет максимальный элемент.*

1.2.21. Замечание. Лемма Куратовского — Цорна служит эквивалентом аксиомы выбора, принимаемой в теории множеств.

1.3. Фильтры

1.3.1. Определение. Пусть X — множество и $\mathscr{B}$ — непустое подмножество непустых элементов 2^X. Множество $\mathscr{B}$ называют *базисом фильтра* (в X), если $\mathscr{B}$ фильтровано по убыванию при введении в множество 2^X подмножеств X отношения порядка по включению.

1.3.2. *Подмножество $\mathscr{B}$ в 2^X является базисом фильтра в том и только в том случае, если*

(1) $\mathscr{B} \neq \varnothing,\ \varnothing \notin \mathscr{B}$;

(2) $B_1,\ B_2 \in \mathscr{B} \Rightarrow (\exists\, B \in \mathscr{B})\ B \subset B_1 \cap B_2$.

1.3.3. Определение. Подмножество $\mathscr{F}$ в 2^X называют *фильтром* (в X), если $\mathscr{F}$ представляет собой совокупность надмножеств некоторого базиса фильтра $\mathscr{B}$ (в X), т. е.

$$\mathscr{F} = \operatorname{fil} \mathscr{B} := \{C \in 2^X :\ (\exists\, B \in \mathscr{B})\ B \subset C\}.$$

При этом говорят, что $\mathscr{B}$ — *базис* $\mathscr{F}$ или что $\mathscr{F}$ имеет $\mathscr{B}$ своим базисом и т. п.

1.3.4. *Подмножество* $\mathscr{F}$ *в* 2^X *является фильтром в том и только в том случае, если*

(1) $\mathscr{F} \neq \varnothing,\ \varnothing \notin \mathscr{F}$;

(2) $A \in \mathscr{F},\ A \subset B \subset X \Rightarrow B \in \mathscr{F}$;

(3) $A_1,\ A_2 \in \mathscr{F} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}$. $\lhd\rhd$

1.3.5. Примеры.

(1) Пусть $F \subset X \times Y$ — соответствие и $\mathscr{B}$ — фильтрованное по убыванию подмножество 2^X. Положим $F(\mathscr{B}) := \{F(B) : B \in \mathscr{B}\}$. Видно, что $F(\mathscr{B})$ фильтровано по убыванию. Допускают некоторую вольность в обозначениях, считая $F(\mathscr{B}) := \operatorname{fil} F(\mathscr{B})$. Если $\mathscr{F}$ — фильтр в X и $B \cap \operatorname{dom} F \neq \varnothing$ для всякого $B \in \mathscr{F}$, то $F(\mathscr{F})$ — фильтр в Y. Этот фильтр называют ***образом фильтра*** $\mathscr{F}$ при соответствии F. В частности, если $F : X \to Y$ — отображение и $\mathscr{B}$ — базис фильтра в X, то $F(\mathscr{F})$ — фильтр в Y.

(2) Пусть $(X,\ \sigma)$ — направление. Несомненно, что $\mathscr{B} := \{\sigma(x) :\ x \in X\}$ — это базис фильтра. Если $F : X \to Y$ — некоторая обобщенная последовательность, то фильтр $\operatorname{fil} F(\mathscr{B})$ называют ***фильтром хвостов*** F.

Пусть $(\overline{X},\ \overline{\sigma})$ и $\overline{F} : \overline{X} \to Y$ — другие направление и сеть элементов Y. Если фильтр хвостов $\overline{F}$ содержит фильтр хвостов F, то $\overline{F}$ называют ***подсетью (в широком смысле)*** сети F. Если же существует подсеть (в широком смысле) $G : \overline{X} \to X$ тождественной сети $(x)_{x \in X}$ элементов направления $(X,\ \sigma)$ такая, что $\overline{F} = F \circ G$, то $\overline{F}$ называют ***подсетью*** F (иногда говорят: $\overline{F}$ — ***подсеть Мура*** или ***строгая подсеть*** F). Каждая подсеть служит подсетью в широком смысле. $\lhd\rhd$

1.3.6. Определение. Пусть $\mathscr{F}(X)$ — совокупность всех фильтров в множестве X. Если $\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2 \in \mathscr{F}(X)$ и $\mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}_2$, то говорят, что $\mathscr{F}_1$ ***тоньше*** $\mathscr{F}_2$ или $\mathscr{F}_1$ ***мажорирует*** $\mathscr{F}_2$ (соответственно $\mathscr{F}_2$ ***грубее*** $\mathscr{F}_1$ или $\mathscr{F}_2$ ***минорирует*** $\mathscr{F}_1$).

1.3.7. *Множество* $\mathscr{F}(X)$ *с отношением «тоньше» является упорядоченным.* $\lhd\rhd$

1.3.8. *Пусть $\mathscr{N}$ — направление в $\mathscr{F}(X)$. Тогда у $\mathscr{N}$ есть точная верхняя граница $\mathscr{F}_0 := \sup \mathscr{N}$. При этом*

$$\mathscr{F}_0 = \cup\{\mathscr{F} : \mathscr{F} \in \mathscr{N}\}.$$

$\triangleleft$ Нужно убедиться только, что $\mathscr{F}_0$ — это фильтр. Ясно, что $\varnothing \notin \mathscr{F}_0$ и, в силу непустоты $\mathscr{N}$, $\mathscr{F}_0 \neq \varnothing$. Если $A \in \mathscr{F}_0$ и $B \supset A$, то, подбирая $\mathscr{F}$ из $\mathscr{N}$, для которого $A \in \mathscr{F}$, заключаем: $B \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_0$. Если же $A_1, A_2 \in \mathscr{F}_0$, то можно найти элемент $\mathscr{F}$ в $\mathscr{N}$ такой, что $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$, ибо $\mathscr{N}$ — это направление. На основании 1.3.4, $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_0$. $\triangleright$

1.3.9. Определение. Максимальные элементы в упорядоченном множестве $\mathscr{F}(X)$ всех фильтров в X называют *ультрафильтрами.*

1.3.10. *Каждый фильтр грубее некоторого ультрафильтра.*

$\triangleleft$ Ввиду 1.3.8 множество фильтров, содержащих данный, является индуктивным. Остается сослаться на лемму Куратовского — Цорна 1.2.20. $\triangleright$

1.3.11. *Фильтр $\mathscr{F}$ является ультрафильтром в том и только в том случае, если для каждого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Пусть $A \notin \mathscr{F}$ и $B := X \setminus A \notin \mathscr{F}$. Отметим, что $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$. Положим $\mathscr{F}_1 := \{C \in 2^X : A \cup C \in \mathscr{F}\}$. Тогда $A \notin \mathscr{F} \Rightarrow \varnothing \notin \mathscr{F}_1$ и $B \in \mathscr{F}_1 \Rightarrow \mathscr{F}_1 \neq \varnothing$. Столь же просто проверить 1.3.4 (2) и 1.3.4 (3). Итак, $\mathscr{F}_1$ — фильтр. По построению $\mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}$. Раз $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, то $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}$. Получилось противоречие: $B \notin \mathscr{F}$ и $B \in \mathscr{F}$.

$\Leftarrow$: Пусть $\mathscr{F}_1 \in \mathscr{F}(X)$ и $\mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}$. Если $A \in \mathscr{F}_1$ и $A \notin \mathscr{F}$, то $X \setminus A \in \mathscr{F}$ по условию. Отсюда $X \setminus A \in \mathscr{F}_1$, т. е. $\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathscr{F}_1$, чего быть не может. $\triangleright$

1.3.12. *Если f — отображение из X в Y и $\mathscr{F}$ — ультрафильтр в X, то $f(\mathscr{F})$ — ультрафильтр в Y.* $\triangleleft\triangleright$

1.3.13. *Пусть $\mathscr{X} := \mathscr{X}_{\mathscr{F}_0} := \{\mathscr{F} \in \mathscr{F}(X) : \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_0\}$ для некоторого $\mathscr{F}_0 \in \mathscr{F}(X)$. Тогда $\mathscr{X}$ — полная решетка.*

$\triangleleft$ Понятно, что $\mathscr{F}_0$ — наибольший, а $\{X\}$ — наименьший элементы в $\mathscr{X}$. Стало быть, пустое множество в $\mathscr{X}$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы: $\sup\varnothing = \inf\mathscr{X} = \{X\}$ и $\inf\varnothing = \sup\mathscr{X} = \mathscr{F}_0$. В силу 1.2.17 и 1.3.8 достаточно установить существование $\mathscr{F}_1 \vee \mathscr{F}_2$ для любых $\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2 \in \mathscr{X}$. Рассмотрим $\mathscr{F} := \{A_1 \cap A_2 : A_1 \in \mathscr{F}_1,\ A_2 \in \mathscr{F}_2\}$. Нет сомнений, что $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}_1,\ \mathscr{F} \supset \mathscr{F}_2$. Поэтому для проверки равенства $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \vee \mathscr{F}_2$ нужно доказать, что $\mathscr{F}$ — фильтр.

Соотношения $\mathscr{F} \neq \varnothing$ и $\varnothing \notin \mathscr{F}$ очевидны. Ясно также, что (B_1, $B_2 \in \mathscr{F} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathscr{F}$). Помимо этого, если $C \supset A_1 \cap A_2$, где $A_1 \in \mathscr{F}_1$ и $A_2 \in \mathscr{F}_2$, то $C = \{A_1 \cap A_2\} \cup C = (A_1 \cup C) \cap (A_2 \cup C)$. Поскольку $A_1 \cup C \in \mathscr{F}_1$, а $A_2 \cup C \in \mathscr{F}_2$, выводим: $C \in \mathscr{F}$. Апелляция к 1.3.4 дает требуемое. ▷

Упражнения

1.1. Привести примеры множеств и не множеств, теоретико-множественных свойств и не теоретико-множественных свойств.

1.2. Может ли отрезок [0, 1] быть элементом отрезка [0, 1]? А отрезок [0, 2]?

1.3. Найти композиции простейших соответствий и отношений: квадратов, кругов и окружностей с общими и с несовпадающими центрами, шаров в $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ при различных допустимых наборах $M,\ N$.

1.4. Для соответствий $R,\ S,\ T$ установить соотношения:

$$\begin{aligned}
(R\cup S)^{-1} &= R^{-1}\cup S^{-1}; & (R\cap S)^{-1} &= R^{-1}\cap S^{-1};\\
(R\cup S)\circ T &= (R\circ T)\cup(S\circ T); & R\circ(S\cup T) &= (R\circ S)\cup(R\circ T);\\
(R\cap S)\circ T &\subset (R\circ T)\cap(S\circ T); & R\circ(S\cap T) &\subset (R\circ S)\cap(R\circ T).
\end{aligned}$$

1.5. Пусть $X \subset X \times X$. Доказать, что $X = \varnothing$.

1.6. Выяснить условия разрешимости уравнений $\mathscr{X}A = B$ и $A\mathscr{X} = B$ относительно $\mathscr{X}$ в соответствиях, в функциях.

1.7. Найти число отношений эквивалентности на конечном множестве.

1.8. Будет ли эквивалентностью пересечение эквивалентностей? Объединение эквивалентностей?

1.9. Найти условие коммутативности эквивалентностей (относительно композиции).

1.10. Сколько порядков и предпорядков на двух- и трехэлементном множествах? Предъявить их. Что можно сказать о числе предпорядков на конечном множестве?