Глава 2

Векторные пространства

2.1. Пространства и подпространства

2.1.1. Замечание. В алгебре, в частности, изучают модули над кольцами. *Модуль X над кольцом A* определяют указанием абелевой группы $(X,\ +)$ и представления A в кольце эндоморфизмов X, заданного отображением левого умножения $\cdot : A \times X \to X$. При этом заранее обеспечивают естественное согласование операций сложения и умножения. С учетом сказанного трактуют фразу: «модуль X над кольцом A описывается четверкой $(X,\ A,\ +,\ \cdot)$».

2.1.2. Определение. Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ называют *основными полями.* Для обозначения основного поля используют также символ $\mathbb{F}$. Считают, что поле $\mathbb{R}$ стандартным (и общеизвестным) способом вложено в $\mathbb{C}$.

2.1.3. Определение. Пусть $\mathbb{F}$ — основное поле. Модуль X над полем $\mathbb{F}$ называют *векторным пространством* (над $\mathbb{F}$). Элементы $\mathbb{F}$ называют *скалярами,* а элементы X — *векторами.* Векторное пространство над $\mathbb{R}$ называют *вещественным векторным пространством,* а векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ — *комплексным векторным пространством.* Употребляют соответствующие развернутые записи: $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$, $(X,\ \mathbb{R},\ +,\ \cdot)$ и $(X,\ \mathbb{C},\ +,\ \cdot)$. Все же, как правило, допускают бóльшую вольность, отождествляя множество векторов X с отвечающим ему векторным пространством.

2.1.4. Примеры.

(1) Основное поле $\mathbb{F}$ — векторное пространство над $\mathbb{F}$.

(2) Пусть $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство. Рассмотрим набор $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot_*)$, где $\cdot_* : (\lambda,\ x) \mapsto \lambda^* x$ для $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in X$, а λ^* — комплексно сопряженное к λ число. Полученное векторное пространство называют *дуальным* к X и обозначают X_*. При $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ пространство X_* совпадает с X.

(3) Векторное пространство $(X_0,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ называют *подпространством* векторного пространства $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$, если X_0 — это подгруппа в X и умножение на скаляр в X_0 — это сужение на $\mathbb{F} \times X_0$ умножения на скаляр в X. Множество X_0 называют *линейным множеством* в X. Очень удобно, хотя и не вполне корректно, рассматривать линейное множество X_0 как векторное подпространство в X. Более того, нейтральный элемент — нуль группы X — считают подпространством X и обозначают символом 0. Поскольку связь нуля с X явно не отражена, все векторные пространства, включая и основные поля, можно воспринять как зацепленные за один общий нуль.

(4) Пусть $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство векторных пространств над полем $\mathbb{F}$. Пусть, далее, $\mathscr{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ — *произведение* соответствующих множеств, т. е. совокупность отображений $x : \Xi \to \cup_{\xi\in\Xi} X_\xi$, для которых $x_\xi := x(\xi) \in X_\xi$ при каждом $\xi \in \Xi$ (в подобных ситуациях всегда молчаливо подразумевают, что $\Xi \neq \varnothing$). Наделим $\mathscr{X}$ покоординатными операциями сложения и умножения на скаляр:

$$(x_1 + x_2)(\xi) := x_1(\xi) + x_2(\xi) \quad (x_1,\ x_2 \in \mathscr{X},\ \xi \in \Xi);$$

$$(\lambda \cdot x)(\xi) := \lambda \cdot x(\xi) \quad (x \in \mathscr{X},\ \lambda \in \mathbb{F},\ \xi \in \Xi)$$

(ниже, как правило, вместо выражений типа $\lambda \cdot x$ будем писать сокращенно: λx и изредка $x\lambda$). Полученное векторное пространство $\mathscr{X}$ над $\mathbb{F}$ называют *произведением семейства векторных пространств* $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$. При $\Xi := \{1, 2, \ldots, N\}$ пишут $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N := \mathscr{X}$. В случае, когда $X_\xi = X$ для любого $\xi \in \Xi$, используют обозначение $X^\Xi := \mathscr{X}$. Если к тому же $\Xi := \{1, 2, \ldots, N\}$, полагают $X^N := \mathscr{X}$.

(5) Пусть $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство векторных пространств над полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим прямую сумму множеств $\mathscr{X}_0 := \sum_{\xi\in\Xi} X_\xi$, т. е. подмножество в произведении $\mathscr{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$, состоящее из таких элементов x_0, что найдется (вообще говоря, свое для каждого x_0) конечное подмножество Ξ_0 в Ξ такое, что $x_0(\Xi \setminus \Xi_0) \subset 0$. Видно, что $\mathscr{X}_0$ — линейное множество в произведении $\mathscr{X}$. Соответствующее векторное пространство — подпространство произведения векторных пространств $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — называют *прямой суммой семейства векторных пространств* $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$.

(6) Пусть $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство и задано подпространство $(X_0,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ в X. Положим

$$\sim_{X_0}:= \{(x_1,\ x_2)\in X^2:\ x_1-x_2\in X_0\}.$$

Тогда $\sim_{X_0}$ — эквивалентность в X. Пусть $\mathscr{X} := X/{\sim_{X_0}}$ и $\varphi : X\to\mathscr{X}$ — каноническое отображение. Определим в $\mathscr{X}$ операции

$$x_1+x_2:=\varphi(\varphi^{-1}(x_1)+\varphi^{-1}(x_2))\quad (x_1,\ x_2\in\mathscr{X});$$

$$\lambda x:=\varphi(\lambda\varphi^{-1}(x))\quad (x\in\mathscr{X},\ \lambda\in\mathbb{F}).$$

Здесь, как обычно, для множеств $S_1,\ S_2$ в X, множества Λ в $\mathbb{F}$ и элемента $\lambda\in\mathbb{F}$ считается, что

$$S_1+S_2:=+\{S_1\times S_2\};$$

$$\Lambda S_1:=\cdot\ (\Lambda\times S_1);\quad \lambda S_1:=\{\lambda\}S_1.$$

Таким образом в $\mathscr{X}$ введена структура векторного пространства над $\mathbb{F}$. Это пространство называют *фактор-пространством пространства X по подпространству X_0* и обозначают X/X_0.

2.1.5. *Пусть X — векторное пространство и $\mathrm{Lat}(X)$ — совокупность всех подпространств в X с отношением порядка по включению. Тогда упорядоченное множество $\mathrm{Lat}(X)$ является полной решеткой.*

$\lhd$ Ясно, что $\inf\mathrm{Lat}(X)=0$ и $\sup\mathrm{Lat}(X)=X$. Помимо этого, пересечение непустого множества подпространств также подпространство. Привлекая 1.2.17, получаем требуемое. $\rhd$

2.1.6. Замечание. Для $X_1,\ X_2\in\mathrm{Lat}(X)$ справедливо соотношение $X_1\vee X_2=X_1+X_2$. Столь же несомненно, что для непустого множества $\mathscr{E}$ в $\mathrm{Lat}(X)$ выполнено $\inf\mathscr{E}=\cap\{X_0:\ X_0\in\mathscr{E}\}$. Если к тому же $\mathscr{E}$ фильтровано по возрастанию, то $\sup\mathscr{E}=\cup\{X_0:\ X_0\in\mathscr{E}\}$. $\lhd\rhd$

2.1.7. Определение. Подпространства X_1 и X_2 данного векторного пространства X *разлагают* X *в* (*алгебраическую*) *прямую сумму* (символическая запись: $X = X_1 \oplus X_2$), если $X_1 \wedge X_2 = 0$ и $X_1 \vee X_2 = X$. При этом X_2 называют (*алгебраическим*) *дополнением* X_1, а X_1 — (алгебраическим) дополнением X_2.

2.1.8. *Любое подпространство векторного пространства имеет алгебраическое дополнение.*

$\triangleleft$ Пусть X_1 — подпространство X. Положим

$$\mathscr{E} := \{X_0 \in \mathrm{Lat}(X) : \ X_0 \wedge X_1 = 0\}.$$

Очевидно, $0 \in \mathscr{E}$ и для каждой цепи $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$, в силу 2.1.6, $X_1 \wedge \sup \mathscr{E}_0 = 0$, т. е. $\sup \mathscr{E}_0 \in \mathscr{E}$. Таким образом, $\mathscr{E}$ — индуктивно, и на основании 1.2.20 в $\mathscr{E}$ есть максимальный элемент X_2. Если $x \in X \setminus (X_1 + X_2)$, то

$$(X_2 + \{\lambda x : \ \lambda \in \mathbb{F}\}) \wedge X_1 = 0.$$

В самом деле, если для некоторых $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2$ выполнено $x_2 + \lambda x = x_1$, то $\lambda x \in X_1 + X_2$ и, стало быть, $\lambda = 0$. Отсюда $x_1 = x_2 = 0$, ибо $X_1 \wedge X_2 = 0$. Следовательно, $X_2 + \{\lambda x : \ \lambda \in \mathbb{F}\} = X_2$ в силу максимальности X_2. Последнее означает, что $x = 0$. В то же время явно $x \neq 0$. Окончательно $X_1 \vee X_2 = X_1 + X_2 = X$. $\triangleright$

2.2. Линейные операторы

2.2.1. Определение. Пусть X, Y — векторные пространства над $\mathbb{F}$. Соответствие $T \subset X \times Y$ называют *линейным*, если T — линейное множество в произведении векторных пространств $X \times Y$. Отображение $T : X \to Y$, являющееся линейным соответствием, называют *линейным оператором* (или просто оператором, если линейность ясна из контекста). Желая отличить такой T от линейных однозначных соответствий $S \subset X \times Y$ с областью определения $\operatorname{dom} S \neq X$, говорят: T — *всюду определенный* линейный оператор (из X в Y) и S — линейный оператор из X в Y, или даже S — *не всюду определенный* линейный оператор.

2.2.2. *Отображение* $T : X \to Y$ *является линейным оператором в том и только в том случае, если выполнено*

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T x_1 + \lambda_2 T x_2 \quad (\lambda_1, \ \lambda_2 \in \mathbb{F}; \ x_1, \ x_2 \in X). \ \triangleleft\triangleright$$