2.1.7. Определение. Подпространства X_1 и X_2 данного векторного пространства X ***разлагают*** X ***в*** (***алгебраическую***) ***прямую сумму*** (символическая запись: $X = X_1 \oplus X_2$), если $X_1 \wedge X_2 = 0$ и $X_1 \vee X_2 = X$. При этом X_2 называют (***алгебраическим***) ***дополнением*** X_1, а X_1 — (алгебраическим) дополнением X_2.

2.1.8. *Любое подпространство векторного пространства имеет алгебраическое дополнение.*

$\lhd$ Пусть X_1 — подпространство X. Положим

$$\mathscr{E} := \{X_0 \in \mathrm{Lat}(X) : \ X_0 \wedge X_1 = 0\}.$$

Очевидно, $0 \in \mathscr{E}$ и для каждой цепи $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$, в силу 2.1.6, $X_1 \wedge \sup \mathscr{E}_0 = 0$, т. е. $\sup \mathscr{E}_0 \in \mathscr{E}$. Таким образом, $\mathscr{E}$ — индуктивно, и на основании 1.2.20 в $\mathscr{E}$ есть максимальный элемент X_2. Если $x \in X \setminus (X_1 + X_2)$, то

$$(X_2 + \{\lambda x : \ \lambda \in \mathbb{F}\}) \wedge X_1 = 0.$$

В самом деле, если для некоторых $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2$ выполнено $x_2 + \lambda x = x_1$, то $\lambda x \in X_1 + X_2$ и, стало быть, $\lambda = 0$. Отсюда $x_1 = x_2 = 0$, ибо $X_1 \wedge X_2 = 0$. Следовательно, $X_2 + \{\lambda x : \ \lambda \in \mathbb{F}\} = X_2$ в силу максимальности X_2. Последнее означает, что $x = 0$. В то же время явно $x \neq 0$. Окончательно $X_1 \vee X_2 = X_1 + X_2 = X$. $\rhd$

2.2. Линейные операторы

2.2.1. Определение. Пусть X, Y — векторные пространства над $\mathbb{F}$. Соответствие $T \subset X \times Y$ называют ***линейным***, если T — линейное множество в произведении векторных пространств $X \times Y$. Отображение $T : X \to Y$, являющееся линейным соответствием, называют ***линейным оператором*** (или просто оператором, если линейность ясна из контекста). Желая отличить такой T от линейных однозначных соответствий $S \subset X \times Y$ с областью определения $\mathrm{dom}\, S \neq X$, говорят: T — ***всюду определенный*** линейный оператор (из X в Y) и S — линейный оператор из X в Y, или даже S — ***не всюду определенный*** линейный оператор.

2.2.2. *Отображение* $T : X \to Y$ *является линейным оператором в том и только в том случае, если выполнено*

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T x_1 + \lambda_2 T x_2 \quad (\lambda_1, \ \lambda_2 \in \mathbb{F}; \ x_1, \ x_2 \in X). \lhd\rhd$$

2.2.3. *Множество $\mathscr{L}(X,\ Y)$ всех линейных операторов из X в Y представляет собой векторное пространство — подпространство Y^X.* ◁▷

2.2.4. Определение. Операторы из $\mathscr{L}(X,\ \mathbb{F})$ называют *линейными функционалами* на X, а пространство $X^\# := \mathscr{L}(X,\ \mathbb{F})$ — (*алгебраически*) *сопряженным пространством*. Линейные функционалы на X_* называют $*$-*линейными функционалами* на X. Если хотят подчеркнуть природу основного поля $\mathbb{F}$, то говорят о вещественно линейных функционалах, о комплексно сопряженном пространстве и т. п. Понятно, что при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ термин «$*$-линейный функционал», как правило, не употребляют.

2.2.5. Определение. Линейный оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ называют (*алгебраическим*) *изоморфизмом*, если соответствие T^{-1} является линейным оператором из $\mathscr{L}(Y,\ X)$.

2.2.6. Определение. Векторные пространства X и Y называют (*алгебраически*) *изоморфными* и пишут $X \simeq Y$, если существует изоморфизм между X и Y.

2.2.7. *Пространства X и Y являются изоморфными в том и только в том случае, если найдутся операторы $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ и $S \in \mathscr{L}(Y,\ X)$ такие, что $S \circ T = I_X$ и $T \circ S = I_Y$. При этом выполнено $S = T^{-1}$ и $T = S^{-1}$.* ◁▷

2.2.8. Замечание. Пусть $X,\ Y,\ Z$ — векторные пространства, причем заданы $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ и $S \in \mathscr{L}(Y,\ Z)$. Бесспорно, что соответствие $S \circ T$ — это элемент $\mathscr{L}(X,\ Z)$. Оператор $S \circ T$ в дальнейшем для простоты будет обозначен символом ST. Отметим здесь же, что композицию $(S,\ T) \mapsto ST$, как правило, считают отображением $\circ : \mathscr{L}(Y,\ Z) \times \mathscr{L}(X,\ Y) \to \mathscr{L}(X,\ Z)$. В частности, если $\mathscr{E} \subset \mathscr{L}(Y,\ Z)$, а $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$, то полагают $\mathscr{E} \circ T := \circ(\mathscr{E} \times \{T\})$.

2.2.9. Примеры.

(1) Если T — линейное соответствие, то T^{-1} также линейное соответствие.

(2) Если X_1 — подпространство векторного пространства X и X_2 — его алгебраическое дополнение, то X_2 изоморфно X/X_1. Действительно, если $\varphi : X \to X/X_1$ — каноническое отображение, то его сужение на X_2, т. е. оператор $x_2 \mapsto \varphi(x_2)$, где $x_2 \in X_2$, осуществляет требуемый изоморфизм. ◁▷

(3) Пусть $\mathscr{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ — произведение семейства векторных пространств $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Отображение $\mathrm{Pr}_\xi : \mathscr{X} \to X_\xi$, определяемое соотношением $\mathrm{Pr}_\xi\, x := x_\xi$, называют ***координатным проектором*** (= ***проекцией***). Ясно, что Pr_ξ — линейный оператор: $\mathrm{Pr}_\xi \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\ X_\xi)$. Отметим, что часто этот оператор рассматривают как элемент пространства $\mathscr{L}(\mathscr{X}) := \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$, имея в виду естественный изоморфизм $\mathscr{X}_\xi$ и X_ξ, где $\mathscr{X}_\xi := \prod_{\eta\in\Xi} \overline{X}_\eta$, а $\overline{X}_\eta := 0$ при $\eta \neq \xi$ и $\overline{X}_\xi := X_\xi$.

(4) Пусть $X := X_1 \oplus X_2$. Поскольку отображение $+^{-1}$ осуществляет изоморфизм X и $X_1 \times X_2$, то определены линейные операторы $P_{X_1} := P_{X_1 || X_2} := \mathrm{Pr}_1 \circ (+^{-1})$, $P_{X_2} := P_{X_2 || X_1} := \mathrm{Pr}_2 \circ (+^{-1})$, действующие из X в X. Оператор P_{X_1} называют ***проектором X на X_1 параллельно X_2***, а P_{X_2} — ***дополнительным проектором*** к P_{X_1}. В свою очередь, P_{X_1} дополнителен к P_{X_2}, а P_{X_2} осуществляет проектирование X на X_2 параллельно X_1. Отметим также, что $P_{X_1} + P_{X_2} = I_X$. Кроме того, $P_{X_1}^2 := P_{X_1} P_{X_1} = P_{X_1}$, т. е. проектор — ***идемпотентный оператор***. Наоборот, любой идемпотентный оператор $P \in \mathscr{L}(X)$ является проектором на $P(X)$ параллельно $P^{-1}(0)$.

Если $T \in \mathscr{L}(X)$, то $P_{X_1} T P_{X_1} = T P_{X_1}$ в том и только в том случае, если $T(X_1) \subset X_1$, т. е. X_1 ***инвариантно относительно*** T. $\triangleleft\triangleright$

Равенство $T P_{X_1} = P_{X_1} T$ справедливо в том и только в том случае, если как X_1, так и дополнение X_2 инвариантны относительно T. В последнем случае говорят, что ***разложение $X = X_1 \oplus X_2$ приводит оператор*** T.

Со следом T на X_1 работают как с элементом T_1 пространства $\mathscr{L}(X_1)$. При этом T_1 называют ***частью*** T в X_1. Если $T_2 \in \mathscr{L}(X_2)$ — часть T в X_2, то оператор T мыслят как матрицу

$$T \sim \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Именно, элемент x из $X_1 \oplus X_2$ рассматривают как «вектор-столбец» с компонентами $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, где $x_1 = \mathrm{Pr}_{X_1} x$, $x_2 = \mathrm{Pr}_{X_2} x$. Умножение матриц проводят обычным способом по закону «строка на столбец», а результат умножения указанной матрицы на вектор-столбец x, т. е. вектор-столбец с компонентами $T_1 x_1$, $T_2 x_2$ (или, что в данном случае то же самое, $T x_1$, $T x_2$), естественно трактуют как элемент Tx.

Иными словами, T отождествляют с отображением $X_1 \times X_2$ в $X_1 \times X_2$, действующим по правилу

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом вводят матричные представления общих операторов $T \in \mathscr{L}(X_1 \oplus X_2,\ Y_1 \oplus Y_2)$. $\lhd\rhd$

(5) Конечное множество $\mathscr{E}$ в X называют ***линейно независимым***, если из условия $\sum_{e\in\mathscr{E}} \lambda_e e = 0$, где $\lambda_e \in \mathbb{F}$ $(e \in \mathscr{E})$, вытекает, что $\lambda_e = 0$ для всех $e \in \mathscr{E}$. Множество $\mathscr{E}$ называют ***линейно независимым***, если любое конечное подмножество $\mathscr{E}$ линейно независимо.

Максимальное по включению линейно независимое множество в X называют ***базисом Гамеля*** (или ***алгебраическим базисом***) в X. Любое линейно независимое множество содержится в некотором базисе Гамеля.

У всех базисов Гамеля в X одинаковая мощность, называемая ***размерностью*** X. Размерность X обозначают $\dim X$.

Каждое векторное пространство X изоморфно прямой сумме семейства $(\mathbb{F})_{\xi\in\Xi}$, где Ξ имеет мощность $\dim X$.

Если X_1 — подпространство X, то размерность X/X_1 называют ***коразмерностью*** X_1 и обозначают $\operatorname{codim} X_1$. Если $X = X_1 \oplus X_2$, то $\operatorname{codim} X_1 = \dim X_2$ и $\dim X = \dim X_1 + \operatorname{codim} X_1$.

2.3. Уравнения в операторах

2.3.1. Определение. Для оператора $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ определяют: $\ker T := T^{-1}(0)$ — ***ядро***, $\operatorname{coker} T := Y/\operatorname{im} T$ — ***коядро***, $\operatorname{coim} T := X/\ker T$ — ***кообраз*** T.

Оператор T называют ***мономорфизмом***, если $\ker T = 0$. Оператор T называют ***эпиморфизмом***, если $\operatorname{im} T = Y$.

2.3.2. *Оператор является изоморфизмом в том и только в том случае, если он мономорфизм и эпиморфизм одновременно.* $\lhd\rhd$

2.3.3. Замечание. В дальнейшем иногда удобно пользоваться языком ***коммутативных диаграмм.*** Научиться им пользоваться можно, разобрав подходящий пример.

Так, фраза «следующая диаграмма