Иными словами, T отождествляют с отображением $X_1 \times X_2$ в $X_1 \times X_2$, действующим по правилу

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом вводят матричные представления общих операторов $T \in \mathscr{L}(X_1 \oplus X_2,\ Y_1 \oplus Y_2)$. ◁▷

(5) Конечное множество $\mathscr{E}$ в X называют *линейно независимым*, если из условия $\sum_{e \in \mathscr{E}} \lambda_e e = 0$, где $\lambda_e \in \mathbb{F}$ $(e \in \mathscr{E})$, вытекает, что $\lambda_e = 0$ для всех $e \in \mathscr{E}$. Множество $\mathscr{E}$ называют *линейно независимым*, если любое конечное подмножество $\mathscr{E}$ линейно независимо.

Максимальное по включению линейно независимое множество в X называют *базисом Гамеля* (или *алгебраическим базисом*) в X. Любое линейно независимое множество содержится в некотором базисе Гамеля.

У всех базисов Гамеля в X одинаковая мощность, называемая *размерностью* X. Размерность X обозначают $\dim X$.

Каждое векторное пространство X изоморфно прямой сумме семейства $(\mathbb{F})_{\xi \in \Xi}$, где Ξ имеет мощность $\dim X$.

Если X_1 — подпространство X, то размерность X/X_1 называют *коразмерностью* X_1 и обозначают $\operatorname{codim} X_1$. Если $X = X_1 \oplus X_2$, то $\operatorname{codim} X_1 = \dim X_2$ и $\dim X = \dim X_1 + \operatorname{codim} X_1$.

2.3. Уравнения в операторах

2.3.1. Определение. Для оператора $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ определяют: $\ker T := T^{-1}(0)$ — *ядро*, $\operatorname{coker} T := Y/\operatorname{im} T$ — *коядро*, $\operatorname{coim} T := X/\ker T$ — *кообраз* T.

Оператор T называют *мономорфизмом*, если $\ker T = 0$. Оператор T называют *эпиморфизмом*, если $\operatorname{im} T = Y$.

2.3.2. *Оператор является изоморфизмом в том и только в том случае, если он мономорфизм и эпиморфизм одновременно.* ◁▷

2.3.3. Замечание. В дальнейшем иногда удобно пользоваться языком *коммутативных диаграмм*. Научиться им пользоваться можно, разобрав подходящий пример.

Так, фраза «следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_3"'] & Y \arrow[d, "\alpha_2"] \\
V \arrow[r, "\alpha_5"'] \arrow[ur, bend right=80, "\alpha_4"'] & W
\end{tikzcd}$$

коммутативна» означает, что $\alpha_1 \in \mathscr{L}(X,\ Y)$, $\alpha_2 \in \mathscr{L}(Y,\ W)$, $\alpha_3 \in \mathscr{L}(X,\ W)$, $\alpha_4 \in \mathscr{L}(V,\ Y)$ и $\alpha_5 \in \mathscr{L}(V,\ W)$, причем $\alpha_2\alpha_1 = \alpha_3$ и $\alpha_5 = \alpha_2\alpha_4$.

2.3.4. Определение. Диаграмму $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$ называют *точной* (в члене Y) *последовательностью*, если $\ker S = \operatorname{im} T$. Последовательность $\dots \to X_{k-1} \to X_k \to X_{k+1} \to \dots$ называют *точной* в члене X_k, если точна последовательность $X_{k-1} \to X_k \to X_{k+1}$ (наименования операторов опущены). Рассматриваемую последовательность называют *точной*, если она точна в каждом члене (кроме первого и последнего, если таковые, разумеется, есть).

2.3.5. Примеры.

(1) Точная последовательность $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$ *полуточна*, т. е. $ST = 0$. Обратное утверждение неверно.

(2) Последовательность $0 \to X \xrightarrow{T} Y$ точна в том и только в том случае, если T — мономорфизм. (Здесь и в дальнейшем запись $0 \to X$ — это, конечно же, еще одно обозначение нуля — единственного элемента пространства $\mathscr{L}(0,\ X)$ (см. 2.1.4 (3)).)

(3) Последовательность $X \xrightarrow{T} Y \to 0$ точна в том и только в том случае, если T — эпиморфизм. (Понятно, что под символом $Y \to 0$ тут снова скрывается нуль — единственный элемент пространства $\mathscr{L}(Y,\ 0)$.)

(4) Оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ является изоморфизмом в том и только в том случае, если $0 \to X \xrightarrow{T} Y \to 0$ — это точная последовательность.

(5) Пусть X_0 — подпространство в X. Символом $\iota : X_0 \to X$ обозначим *оператор* (*тождественного*) *вложения*: $\iota x_0 := x_0$ для всех $x_0 \in X_0$. Пусть теперь X/X_0 — фактор-пространство и $\varphi : X \to X/X_0$ — соответствующее каноническое отображение.

Тогда последовательность

$$0 \to X_0 \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\varphi} X/X_0 \to 0$$

является точной. (Знаки ι и φ ниже в подобных случаях, как правило, опущены.) Указанная последовательность в известном смысле уникальна. Именно, рассмотрим произвольную, как говорят, *«короткую»* последовательность

$$0 \to X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z \to 0$$

и допустим, что она точна. Полагая $Y_0 := \operatorname{im} T$, легко построить изоморфизмы α, β, γ так, что получается следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y/Y_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Иными словами, короткая точная последовательность — это, по сути дела, то же, что подпространство и фактор-пространство по нему. $\lhd\rhd$

(6) Пусть $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ — оператор. С ним связана точная последовательность

$$0 \to \ker T \to X \xrightarrow{T} Y \to \operatorname{coker} T \to 0,$$

называемая *канонической точной последовательностью* для T.

2.3.6. Определение. Оператор T называют *продолжением* T_0 (пишут $T \supset T_0$), если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r] \arrow[dr, "T_0"'] & X \arrow[d, "T"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

т. е. $T_0 = T\iota$, где $\iota : X_0 \to X$ — вложение.

2.3.7. *Пусть X, Y — векторные пространства и X_0 — подпространство в X. Для любого $T_0 \in \mathscr{L}(X_0,\ Y)$ существует продолжение $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$.*

$\lhd$ Предъявим $T := T_0 P_{X_0}$, где P_{X_0} — оператор проектирования на X_0. $\rhd$

2.3.8. *Теорема о разрешимости уравнения $\mathscr{X} A = B$.* *Пусть X, Y, Z — векторные пространства; $A \in \mathscr{L}(X,\ Y)$, $B \in \mathscr{L}(X,\ Z)$. Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "B"'] & Y \arrow[d, "\mathscr{X}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

коммутативна для некоторого $\mathscr{X} \in \mathscr{L}(Y,\ Z)$ в том и только в том случае, если $\ker A \subset \ker B$.

$\lhd$ $\Rightarrow$: То, что при $B = \mathscr{X} A$ выполнено $\ker A \subset \ker B$, очевидно.

$\Leftarrow$: Положим $\overline{\mathscr{X}} := B \circ A^{-1}$. Ясно, что для $x \in X$ будет $\overline{\mathscr{X}} \circ A(x) = B \circ (A^{-1} \circ A)x = B(x + \ker A) = Bx$. Проверим, что $\mathscr{X}_0 := \overline{\mathscr{X}}|_{\operatorname{im} A}$ — линейный оператор. Следует проверить только однозначность $\overline{\mathscr{X}}$. Пусть $y \in \operatorname{im} A$ и $z_1,\ z_2 \in \overline{\mathscr{X}}(y)$. Тогда $z_1 = Bx_1,\ z_2 = Bx_2$, а $Ax_1 = Ax_2 = y$. По условию $B(x_1 - x_2) = 0$. Значит, $z_1 = z_2$. Применяя 2.3.7, возьмем какое-либо продолжение $\mathscr{X}$ оператора $\mathscr{X}_0$ на пространство Y. $\rhd$

2.3.9. Замечание. Если в условиях 2.3.8 оператор A — эпиморфизм, то оператор $\mathscr{X}$ единствен. $\lhd\rhd$

2.3.10. *Линейный оператор допускает единственное снижение на свой кообраз.*

$\lhd$ Это следствие 2.3.8 и 2.3.9. $\rhd$

2.3.11. *Линейный оператор T допускает (каноническое) разложение в композицию эпиморфизма φ, изоморфизма $\overline{T}$ и мономорфизма ι, т. е. коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{coim} T \arrow[r, "\overline{T}"] & \operatorname{im} T \arrow[d, "\iota"] \\
X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "T"] & Y
\end{tikzcd}$$

для единственного оператора $\overline{T}$. $\lhd\rhd$

2.3.12. *Пусть X — некоторое векторное пространство и заданы $f_0,\ f_1, \dots, f_N \in X^{\#}$. Функционал f_0 является линейной комбинацией $f_1, \dots, f_N$ в том и только в том случае, если* $\ker f_0 \supset \cap_{j=1}^{N} \ker f_j$.

$\lhd$ Пусть $(f_1, \dots, f_N) : X \to \mathbb{F}^N$ — линейный оператор, заданный соотношением

$$(f_1, \dots, f_N)x := (f_1(x), \dots, f_N(x)).$$

Видно, что $\ker(f_1, \dots, f_N) = \cap_{j=1}^{N} \ker f_j$. Используя теорему 2.3.8 для задачи

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(f_1,\dots,f_N)"] \arrow[dr, "f_0"'] & \mathbb{F}^N \arrow[d] \\
& \mathbb{F}
\end{tikzcd}$$

и учитывая строение пространства $\mathbb{F}^{N\#}$, получаем требуемое. $\rhd$

2.3.13. ***Теорема о разрешимости уравнения $A\mathscr{X} = B$.*** *Пусть $X,\ Y,\ Z$ — векторные пространства; $A \in \mathscr{L}(Y,\ X)$, $B \in \mathscr{L}(Z,\ X)$. Диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
X & Y \arrow[l, "A"'] \\
& Z \arrow[ul, "B"] \arrow[u, "\mathscr{X}"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна для некоторого $\mathscr{X} \in \mathscr{L}(Z,\ Y)$ в том и только в том случае, если $\operatorname{im} A \supset \operatorname{im} B$.

$\lhd$ $\Rightarrow$: $\operatorname{im} B = B(Z) = A(\mathscr{X}(Z)) \subset A(Y) = \operatorname{im} A$.

$\Leftarrow$: Пусть Y_0 — алгебраическое дополнение $\ker A$ в Y и $A_0 := A|_{Y_0}$. Тогда A_0 взаимно однозначно отображает Y_0 на $\operatorname{im} A$. Оператор $\mathscr{X} := A_0^{-1} B$, очевидно, искомый. $\rhd$

2.3.14. Замечание. Если в условиях 2.3.13 оператор A — мономорфизм, то оператор $\mathscr{X}$ единствен. $\lhd\rhd$

2.3.15. Замечание. Теоремы 2.3.8 и 2.3.13 связаны «формальной двойственностью». Каждая из них получается из другой «обращением стрелок», «перестановкой ядер и образов» и «переходом к противоположному включению».

2.3.16. *Лемма о снежинке.* *Пусть заданы $S \in \mathscr{L}(Y,\ Z)$ и $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$. Существуют, и притом единственные, операторы $\alpha_1, \dots, \alpha_6$, для которых коммутативна диаграмма:*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & & & & & & 0 \arrow[dl] & \\
 & & \ker ST \arrow[rrrr, "\alpha_2"] \arrow[dr] & & & & \ker S \arrow[dl] \arrow[dr, "\alpha_3"] & & \\
0 \arrow[r] & \ker T \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[rr] \arrow[ddrr, "\alpha_6"'] & & X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "ST"'] & & Y \arrow[rr] \arrow[dl, "S"] & & \operatorname{coker} T \arrow[r] \arrow[ddll, "\alpha_4"] & 0 \\
 & & & & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \\
 & & & \operatorname{coker} S \arrow[dl] & & \operatorname{coker} ST \arrow[ll, "\alpha_5"] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 & & & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

При этом (выделенная) последовательность

$$
0 \to \ker T \xrightarrow{\alpha_1} \ker ST \xrightarrow{\alpha_2} \ker S \xrightarrow{\alpha_3}
$$
$$
\xrightarrow{\alpha_3} \operatorname{coker} T \xrightarrow{\alpha_4} \operatorname{coker} ST \xrightarrow{\alpha_5} \operatorname{coker} S \to 0
$$

является точной. $\lhd\rhd$