Глава 3

Выпуклый анализ

3.1. Множества в векторных пространствах

3.1.1. Определение. Пусть Γ — подмножество $\mathbb{F}^2$, а U — подмножество векторного пространства. Множество U называют Γ-*множеством* (и пишут $U \in (\Gamma)$), если выполнено

$$(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \Gamma \Rightarrow \lambda_1 U + \lambda_2 U \subset U.$$

3.1.2. Примеры.

(1) Любое множество входит в $(\varnothing)$. (Таким образом, $(\varnothing)$ не является множеством.)

(2) При $\Gamma := \mathbb{F}^2$ непустые Γ-множества это в точности линейные подмножества векторных пространств.

(3) Если $\Gamma := \mathbb{R}^2$, то непустые Γ-множества в векторном пространстве X называют *вещественными подпространствами* в X.

(4) Если $\Gamma := \mathbb{R}^2_+$, то непустые Γ-множества называют *конусами*. Иными словами, непустое множество K является конусом в том и только в том случае, если $K + K \subset K$ и $\alpha K \subset K$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Непустые $\mathbb{R}^2_+ \setminus 0$-множества (иногда) называют *незаостренными конусами*, а непустые $\mathbb{R}_+ \times 0$-множества — *невыпуклыми конусами*. (Здесь и в дальнейшем использовано обычное обозначение $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} :\ t \geq 0\}$.)

(5) Пусть $\Gamma := \{(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \mathbb{F}^2 :\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$. Непустые Γ-множества называют *аффинными многообразиями*. Если X_0

— подпространство в X и $x \in X$, то $x + X_0 := \{x\} + X_0$ — аффинное многообразие в X. Наоборот, если L — аффинное многообразие в X и $x \in L$, то $L - x := L + \{-x\}$ — линейное множество в X. $\lhd\rhd$

(6) Пусть $\Gamma := \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{F}^2 : |\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1\}$. Тогда непустые Γ-множества называют *абсолютно выпуклыми.*

(7) Пусть $\Gamma := \{(\lambda, 0) \in \mathbb{F}^2 : |\lambda| \leq 1\}$. Тогда Γ-множества называют *уравновешенными* (при $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ говорят также о *звездных* множествах; используют и термин «симметричное множество», что не вполне оправдано).

(8) Пусть $\Gamma := \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$. Тогда Γ-множества называют *выпуклыми.*

(9) Если $\Gamma := \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2_+ : \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1\}$, то непустые Γ-множества называют *коническими отрезками.* Множество является коническим отрезком в том и только в том случае, если оно выпукло и содержит нуль. $\lhd\rhd$

(10) Для любого $\Gamma \subset \mathbb{F}^2$ и произвольного векторного пространства X над $\mathbb{F}$ выполнено $X \in (\Gamma)$. Отметим еще, что в 3.1.2 (1)–3.1.2 (9) множество Γ является Γ-множеством.

3.1.3. *Пусть X — векторное пространство и $\mathscr{E}$ — некоторое семейство Γ-множеств в этом пространстве X. Тогда $\cap\{U : U \in \operatorname{im}\mathscr{E}\} \in (\Gamma)$. Если, кроме того, $\operatorname{im}\mathscr{E}$ фильтровано по возрастанию (относительно включения множеств), то $\cup\{U : U \in \operatorname{im}\mathscr{E}\} \in (\Gamma)$.* $\lhd\rhd$

3.1.4. Замечание. Предложение 3.1.3, в частности, означает, что совокупность Γ-множеств данного векторного пространства, будучи упорядочена по включению, становится полной решеткой.

3.1.5. *Пусть X и Y — векторные пространства, а $U \subset X$ и $V \subset Y$ — некоторые Γ-множества. Тогда $U \times V \in (\Gamma)$.*

$\lhd$ Если одно из множеств U или V пусто, то $U \times V = \varnothing$ и доказывать нечего. Пусть теперь $u_1, u_2 \in U$ и $v_1, v_2 \in V$, а $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Gamma$. Тогда $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$, а $\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 \in V$. Значит, $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2,\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in U \times V$. $\rhd$

3.1.6. Определение. Пусть X, Y — векторные пространства и $T \subset X \times Y$ — соответствие. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{F}^2$. Если $T \in (\Gamma)$, то T называют Γ-*соответствием.*

3.1.7. Замечание. Если Г-множества (при фиксированном Г) носят специальное название, то это название сохраняют и для Г-соответствий. В этом смысле говорят о *линейных* и *выпуклых соответствиях, аффинных отображениях* и т. п. Уместно подчеркнуть особенность терминологии: выпуклая функция одной переменной не является выпуклым соответствием, за исключением тривиальных случаев (см. 3.4.2).

3.1.8. *Пусть $T \subset X \times Y$ — некоторое Γ_1-соответствие, а $U \subset X$ — некоторое Γ_2-множество. Если $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$, то $T(U) \in (\Gamma_2)$.*

$\lhd$ Если $y_1,\ y_2 \in T(U)$, то для некоторых $x_1,\ x_2 \in U$ будет $(x_1,\ y_1) \in T$ и $(x_2,\ y_2) \in T$. Для $(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \Gamma_2$ имеем $(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \Gamma_1$ и, значит, $\lambda_1(x_1,\ y_1)+\lambda_2(x_2,\ y_2) \in T$. Отсюда следует, что $\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2 \in T(U)$. $\rhd$

3.1.9. *Суперпозиция Г-соответствий — Г-соответствие.*

$\lhd$ Пусть $F \subset X \times V$ и $G \subset W \times Y$ и $F,\ G \in (\Gamma)$. Имеем

$$(x_1,\ y_1) \in G \circ F \Leftrightarrow (\exists\, v_1) \quad (x_1,\ v_1) \in F \ \&\ (v_1,\ y_1) \in G;$$

$$(x_2,\ y_2) \in G \circ F \Leftrightarrow (\exists\, v_2) \quad (x_2,\ v_2) \in F \ \&\ (v_2,\ y_2) \in G.$$

«Умножая первую строчку на λ_1, вторую — на λ_2, где $(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \Gamma$, и складывая результаты», последовательно получаем требуемое. $\rhd$

3.1.10. *Если U, V — подмножества X и $U, V \in (\Gamma)$ для $\Gamma \subset \mathbb{F}^2$, то для любых $\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$ выполнено $\alpha U + \beta V \in (\Gamma)$.*

$\lhd$ Следует сослаться на 3.1.5, 3.1.8 и 3.1.9. $\rhd$

3.1.11. Определение. Пусть X — векторное пространство, Γ — подмножество $\mathbb{F}^2$ и U — подмножество X. Множество

$$H_\Gamma(U) := \cap\{V \subset X :\ V \in (\Gamma),\ V \supset U\}$$

называют Γ-*оболочкой* U.

3.1.12. *Справедливы утверждения:*

(1) $H_\Gamma(U) \in (\Gamma)$;

(2) $H_\Gamma(U)$ — *наименьшее Г-множество, содержащее U;*

(3) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow H_\Gamma(U_1) \subset H_\Gamma(U_2)$;

(4) $U \in (\Gamma) \Leftrightarrow U = H_\Gamma(U)$;

(5) $H_\Gamma(H_\Gamma(U)) = H_\Gamma(U)$. $\lhd\rhd$

3.1.13. *Имеет место формула Моцкина:*

$$H_\Gamma(U) = \cup\{H_\Gamma(U_0) :\ U_0 \subset U,\ U_0\text{— конечное подмножество}\}.$$

$\lhd$ Обозначим через V множество, стоящее в правой части формулы Моцкина. Так как $U_0 \subset U$, то, по 3.1.12 (3), $H_\Gamma(U_0) \subset H_\Gamma(U)$, а потому $H_\Gamma(U) \supset V$. В силу 3.1.12 (2) необходимо (и, разумеется, достаточно) проверить, что $V \in (\Gamma)$. Но последнее следует из 3.1.3 и того факта, что $H_\Gamma(U_0) \cup H_\Gamma(U_1) \subset H_\Gamma(U_0 \cup U_1)$. $\rhd$

3.1.14. Замечание. Формула Моцкина показывает, что для описания произвольных Γ-оболочек следует найти лишь Γ-оболочки конечных множеств. Подчеркнем, что при конкретных Γ используют специальные (но естественные) названия для Γ-оболочек. Так, при $\Gamma := \{(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2 :\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$ говорят о *выпуклых оболочках* и вместо $H_\Gamma(U)$ пишут $\mathrm{co}(U)$. Вместо $H_{\mathbb{F}^2}(U)$ пишут $\mathscr{L}(U)$ или $\mathrm{lin}(U)$, если $U \neq \varnothing$, кроме того, полагают для удобства $\mathscr{L}(\varnothing) := 0$. Множество $\mathscr{L}(U)$ называют *линейной оболочкой* U (и по возможности не путают с *пространством эндоморфизмов* $\mathscr{L}(X)$ векторного пространства X). Аналогично вводят понятия *аффинной оболочки, конической оболочки* и т. п. Отметим здесь же, что выпуклая оболочка конечного множества точек составлена из их же *выпуклых комбинаций*, т. е.

$$\mathrm{co}(\{x_1,\dots,x_N\}) = \left\{\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k :\ \lambda_k \geq 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_N = 1\right\}. \ \lhd\rhd$$

3.2. Упорядоченные векторные пространства

3.2.1. Определение. Пусть $(X,\ \mathbb{R},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство. Пусть, далее, σ — предпорядок в X. Говорят, что σ *согласован с векторной структурой*, если σ — конус в X^2. В этом случае пространство X называют *упорядоченным векторным пространством.* (Точнее говорить о *предупорядоченном векторном пространстве* $(X,\ \mathbb{R},\ +,\ \cdot,\ \sigma)$, сохраняя термин «упорядоченное векторное пространство» для тех ситуаций, когда σ — это отношение порядка.)

3.2.2. *Пусть X — упорядоченное векторное пространство и σ — соответствующий предпорядок. Тогда $\sigma(0)$ — конус. При этом $\sigma(x) = x + \sigma(0)$ для всякого $x \in X$.*