3.1.13. *Имеет место формула Моцкина:*

$$H_\Gamma(U) = \cup\{H_\Gamma(U_0) : \ U_0 \subset U, \ U_0 \text{— конечное подмножество}\}.$$

$\lhd$ Обозначим через V множество, стоящее в правой части формулы Моцкина. Так как $U_0 \subset U$, то, по 3.1.12 (3), $H_\Gamma(U_0) \subset H_\Gamma(U)$, а потому $H_\Gamma(U) \supset V$. В силу 3.1.12 (2) необходимо (и, разумеется, достаточно) проверить, что $V \in (\Gamma)$. Но последнее следует из 3.1.3 и того факта, что $H_\Gamma(U_0) \cup H_\Gamma(U_1) \subset H_\Gamma(U_0 \cup U_1)$. $\rhd$

3.1.14. Замечание. Формула Моцкина показывает, что для описания произвольных Г-оболочек следует найти лишь Г-оболочки конечных множеств. Подчеркнем, что при конкретных Г используют специальные (но естественные) названия для Г-оболочек. Так, при $\Gamma := \{(\lambda_1, \ \lambda_2) \in \mathbb{R}^2_+ : \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$ говорят о *выпуклых оболочках* и вместо $H_\Gamma(U)$ пишут $\mathrm{co}(U)$. Вместо $H_{\mathbb{F}^2}(U)$ пишут $\mathscr{L}(U)$ или $\mathrm{lin}(U)$, если $U \neq \varnothing$, кроме того, полагают для удобства $\mathscr{L}(\varnothing) := 0$. Множество $\mathscr{L}(U)$ называют *линейной оболочкой* U (и по возможности не путают с *пространством эндоморфизмов* $\mathscr{L}(X)$ векторного пространства X). Аналогично вводят понятия *аффинной оболочки*, *конической оболочки* и т. п. Отметим здесь же, что выпуклая оболочка конечного множества точек составлена из их же *выпуклых комбинаций*, т. е.

$$\mathrm{co}(\{x_1, \dots, x_N\}) = \left\{\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k : \ \lambda_k \geq 0, \ \lambda_1 + \ldots + \lambda_N = 1\right\}. \ \lhd\rhd$$

3.2. Упорядоченные векторные пространства

3.2.1. Определение. Пусть $(X, \ \mathbb{R}, \ +, \ \cdot)$ — векторное пространство. Пусть, далее, σ — предпорядок в X. Говорят, что σ *согласован с векторной структурой*, если σ — конус в X^2. В этом случае пространство X называют *упорядоченным векторным пространством.* (Точнее говорить о *предупорядоченном векторном пространстве* $(X, \ \mathbb{R}, \ +, \ \cdot, \ \sigma)$, сохраняя термин «упорядоченное векторное пространство» для тех ситуаций, когда σ — это отношение порядка.)

3.2.2. *Пусть X — упорядоченное векторное пространство и σ — соответствующий предпорядок. Тогда $\sigma(0)$ — конус. При этом $\sigma(x) = x + \sigma(0)$ для всякого $x \in X$.*

$\triangleleft$ Множество $\sigma(0)$ — конус в силу 3.1.3. Помимо того, из тождества $(x,\ y) = (x,\ x) + (0,\ y - x)$ выводим $(x,\ y) \in \sigma \Leftrightarrow y - x \in \sigma(0)$. $\triangleright$

3.2.3. *Пусть K — конус в векторном пространстве X. Положим*

$$\sigma := \{(x,\ y) \in X^2 :\ y - x \in K\}.$$

Тогда σ — предпорядок, согласованный с векторной структурой, причем K совпадает с конусом положительных элементов $\sigma(0)$. Более того, σ является порядком в том и только в том случае, если $K \cap (-K) = 0$.

$\triangleleft$ Ясно, что $0 \in K \Rightarrow I_X \subset \sigma$ и $K + K \subset K \Rightarrow \sigma \circ \sigma \subset \sigma$. Имеем также представление $\sigma^{-1} = \{(x,\ y) \in X^2 :\ \ x - y \in K\}$. Значит, $\sigma \cap \sigma^{-1} \subset I_X \Leftrightarrow K \cap (-K) = 0$. Осталось проверить, что σ — конус. С этой целью возьмем $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2) \in \sigma$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$. Тогда $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1(y_1 - x_1) + \alpha_2(y_2 - x_2) \in \alpha_1 K + \alpha_2 K \subset K$. $\triangleright$

3.2.4. Определение. Заданный конус K называют *упорядочивающим* или *острым*, если $K \cap (-K) = 0$.

3.2.5. Замечание. На основании 3.2.2 и 3.2.3 задание в векторном пространстве структуры предупорядоченного векторного пространства равносильно выделению в нем конуса положительных элементов. Структуру упорядоченного векторного пространства создают выделением острого конуса. В этой связи о (пред)упорядоченном векторном пространстве X часто говорят как о паре $(X,\ X_+)$, где X_+ — конус положительных элементов.

3.2.6. Примеры.

(1) Пространство функций $\mathbb{R}^\Xi$ с конусом $\mathbb{R}^\Xi_+ := (\mathbb{R}_+)^\Xi$ функций, принимающих положительные значения.

(2) Пусть X — упорядоченное векторное пространство с конусом положительных элементов X_+. Если X_0 — подпространство X, то порядок, индуцируемый в X_0 из X, задан конусом $X_0 \cap X_+$. В этом смысле X_0 рассматривают как упорядоченное векторное пространство.

(3) Пусть X и Y — (пред)упорядоченные векторные пространства. Оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ называют *положительным* (пишут $T \geq 0$), если выполнено $T(X_+) \subset Y_+$. Множество всех положительных операторов образует конус $\mathscr{L}_+(X,\ Y)$. Линейную оболочку

$\mathscr{L}_+(X,\,Y)$ обозначают символом $\mathscr{L}_r(X,\,Y)$. Операторы из $\mathscr{L}_r(X,\,Y)$ называют *регулярными.*

3.2.7. Определение. Упорядоченное векторное пространство называют *векторной решеткой*, если решеткой является упорядоченное множество векторов рассматриваемого пространства.

3.2.8. Определение. Векторную решетку называют *пространством Канторовича* или, короче, *K-пространством*, если любое непустое ограниченное сверху множество в ней имеет точную верхнюю границу.

3.2.9. *В K-пространстве каждое непустое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю границу.*

$\lhd$ Пусть $x \le U$. Тогда $-x \ge -U$. Значит, по 3.2.8 существует $\sup(-U)$. При этом $-x \ge \sup(-U)$. Отсюда очевидно следует, что $-\sup(-U) = \inf U$. $\rhd$

3.2.10. *В K-пространстве для непустых ограниченных сверху множеств U и V выполнено*

$$\sup(U+V) = \sup U + \sup V.$$

$\lhd$ В случае, когда множество U или множество V состоит из одного элемента, требуемое равенство ясно. Общий случай получаем теперь в силу «ассоциативности точных верхних границ». Именно,

$$\sup(U+V) = \sup\{\sup(u+V) :\ u \in U\} =$$

$$= \sup\{u + \sup V :\ u \in U\} = \sup V + \sup\{u :\ u \in U\} =$$

$$= \sup V + \sup U. \ \rhd$$

3.2.11. Замечание. Вывод предложения 3.2.10 можно считать справедливым в произвольном упорядоченном векторном пространстве при условии, что у исходных множеств имеются точные верхние границы. Аналогично трактуют соотношение: $\sup \lambda U = \lambda \sup U$ для $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

3.2.12. Определение. Для элемента x векторной решетки вектор $x_+ := x \vee 0$ называют *положительной частью* x, элемент $x_- := (-x)_+$ — *отрицательной частью*, а $|x| := x \vee (-x)$ — *модулем* x.

3.2.13. *В векторной решетке для любых элементов x и y имеет место тождество*

$$x + y = x \vee y + x \wedge y.$$

$\lhd$ $x + y - x \wedge y = x + y + (-x) \vee (-y) = y \vee x$ $\rhd$

3.2.14. $x = x_+ - x_-$; $|x| = x_+ + x_-$.

$\lhd$ Первое равенство получается из 3.2.13 при $y := 0$. Помимо этого, $|x| = x \vee (-x) = -x + (2x) \vee 0 = -x + 2x_+ = (x_+ - x_-) + 2x_+ = x_+ + x_-$. $\rhd$

3.2.15. *Лемма о сумме промежутков.* *Для положительных элементов x, y в векторной решетке X будет*

$$[0,\ x + y] = [0,\ x] + [0,\ y].$$

(*Как обычно*, $[u,\ v] := \sigma(u) \cap \sigma^{-1}(v)$.)

$\lhd$ Включение $[0,\ x] + [0,\ y] \subset [0,\ x + y]$ несомненно. Если же $0 \le z \le x + y$, то положим $z_1 := z \wedge x$. Видно, что $z_1 \in [0,\ x]$. Пусть теперь $z_2 := z - z_1$. Тогда $z_2 \ge 0$. При этом $z_2 = z - z \wedge x = z + (-z) \vee (-x) = 0 \vee (z - x) \le 0 \vee (x + y - x) = 0 \vee y = y$. $\rhd$

3.2.16. *Теорема Рисса — Канторовича.* *Пусть X — векторная решетка, а Y — некоторое K-пространство. Пространство регулярных операторов $\mathscr{L}_r(X,\ Y)$ с конусом $\mathscr{L}_+(X,\ Y)$ положительных операторов является K-пространством.* $\lhd\rhd$

3.3. Продолжение положительных функционалов и операторов

3.3.1. Контрпримеры.

(1) Пусть X — пространство $B([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ ограниченных вещественных функций на $[0,\ 1]$, а $X_0 := C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ — подпространство X, составленное из непрерывных функций. Положим $Y := X_0$ и наделим X_0, X и Y естественными отношениями порядка (ср. 3.2.6 (1) и 3.2.6 (2)). Рассмотрим задачу о продолжении тождественного оператора $T_0 : X_0 \to Y$ до положительного оператора $T \in \mathscr{L}_+(X,\ Y)$. Если бы эта задача имела решение T, то у каждого непустого ограниченного множества $\mathscr{E}$ в X_0 нашлась бы точная верхняя граница $\sup_{X_0} \mathscr{E}$, вычисленная в X_0. Именно, $\sup_{X_0} \mathscr{E} = T \sup_X \mathscr{E}$, где $\sup_X \mathscr{E}$ — точная верхняя граница $\mathscr{E}$ в X. В то же время нет сомнений, что Y не является K-пространством.