3.2.13. *В векторной решетке для любых элементов x и y имеет место тождество*

$$x + y = x \vee y + x \wedge y.$$

$\lhd$ $x + y - x \wedge y = x + y + (-x) \vee (-y) = y \vee x$ $\rhd$

3.2.14. $x = x_+ - x_-$; $|x| = x_+ + x_-$.

$\lhd$ Первое равенство получается из 3.2.13 при $y := 0$. Помимо этого, $|x| = x \vee (-x) = -x + (2x) \vee 0 = -x + 2x_+ = (x_+ - x_-) + 2x_+ = x_+ + x_-$. $\rhd$

3.2.15. *Лемма о сумме промежутков.* *Для положительных элементов x, y в векторной решетке X будет*

$$[0,\ x + y] = [0,\ x] + [0,\ y].$$

(*Как обычно,* $[u,\ v] := \sigma(u) \cap \sigma^{-1}(v)$.)

$\lhd$ Включение $[0,\ x] + [0,\ y] \subset [0,\ x + y]$ несомненно. Если же $0 \le z \le x + y$, то положим $z_1 := z \wedge x$. Видно, что $z_1 \in [0,\ x]$. Пусть теперь $z_2 := z - z_1$. Тогда $z_2 \ge 0$. При этом $z_2 = z - z \wedge x = z + (-z) \vee (-x) = 0 \vee (z - x) \le 0 \vee (x + y - x) = 0 \vee y = y$. $\rhd$

3.2.16. *Теорема Рисса — Канторовича.* *Пусть X — векторная решетка, а Y — некоторое K-пространство. Пространство регулярных операторов $\mathscr{L}_r(X,\ Y)$ с конусом $\mathscr{L}_+(X,\ Y)$ положительных операторов является K-пространством.* $\lhd\rhd$

3.3. Продолжение положительных функционалов и операторов

3.3.1. Контрпримеры.

(1) Пусть X — пространство $B([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ ограниченных вещественных функций на $[0,\ 1]$, а $X_0 := C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ — подпространство X, составленное из непрерывных функций. Положим $Y := X_0$ и наделим X_0, X и Y естественными отношениями порядка (ср. 3.2.6 (1) и 3.2.6 (2)). Рассмотрим задачу о продолжении тождественного оператора $T_0 : X_0 \to Y$ до положительного оператора $T \in \mathscr{L}_+(X,\ Y)$. Если бы эта задача имела решение T, то у каждого непустого ограниченного множества $\mathscr{E}$ в X_0 нашлась бы точная верхняя граница $\sup_{X_0} \mathscr{E}$, вычисленная в X_0. Именно, $\sup_{X_0} \mathscr{E} = T \sup_X \mathscr{E}$, где $\sup_X \mathscr{E}$ — точная верхняя граница $\mathscr{E}$ в X. В то же время нет сомнений, что Y не является K-пространством.

(2) Пусть $s := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — пространство последовательностей, наделенное естественным порядком. Пусть, далее, c — подпространство в s, составленное из сходящихся последовательностей. Установим, что положительный функционал $f_0 : c \to \mathbb{R}$, определенный соотношением $f_0(x) := \lim x(n)$, не допускает положительного продолжения на s. В самом деле, пусть $f \in s^{\#}$, $f \geq 0$ и $f \supset f_0$. Положим $x_0(n) := n$ и $x_k(n) := k \wedge n$ для $k,\ n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $f_0(x_k) = k$. Помимо этого, $f(x_0) \geq f(x_k) \geq 0$, так как $x_0 \geq x_k \geq 0$. Получили противоречие.

3.3.2. Определение. Подпространство X_0 упорядоченного векторного пространства X с конусом положительных элементов X_+ называют *массивным* (в X), если $X_0 + X_+ = X$.

3.3.3. *Подпространство X_0 массивно в X в том и только в том случае, если для всякого $x \in X$ найдутся элементы $x_0,\ x^0 \in X_0$ такие, что выполнено $x_0 \leq x \leq x^0$.* $\lhd\rhd$

3.3.4. *Теорема Канторовича.* *Пусть X — упорядоченное векторное пространство, X_0 — массивное подпространство в X и Y — некоторое K-пространство. Любой положительный оператор $T_0 \in \mathscr{L}_+(X_0,\ Y)$ допускает положительное продолжение $T \in \mathscr{L}_+(X,\ Y)$.*

$\lhd$ Этап I. Пусть сначала $X := X_0 \oplus X_1$, где X_1 — одномерное подпространство, $X_1 := \{\alpha\overline{x} :\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Так как подпространство X_0 массивно и оператор T_0 положителен, то множество $U := \{T_0x^0 : x^0 \in X_0,\ x^0 \geq \overline{x}\}$ ограничено снизу и, значит, определен элемент $\overline{y} := \inf U$. Положим

$$Tx := \{T_0x_0 + \alpha\overline{y} :\ x = x_0 + \alpha\overline{x},\ x_0 \in X_0,\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, T — однозначное линейное соответствие, причем $T \supset T_0$ и $\operatorname{dom} T = X$. Осталось убедиться в положительности T.

Если $x = x_0 + \alpha\overline{x}$ и $x \geq 0$, то при $\alpha = 0$ доказывать нечего. Если же $\alpha > 0$, то $\overline{x} \geq -x_0/\alpha$. Отсюда следует, что $-T_0x_0/\alpha \leq \overline{y}$, т. е. $Tx \in Y_+$. Аналогично при $\alpha < 0$ имеем $\overline{x} \leq -x_0/\alpha$. Стало быть, $\overline{y} \leq -T_0x_0/\alpha$ и вновь $Tx = T_0x_0 + \alpha\overline{y} \in Y_+$.

Этап II. Пусть теперь $\mathscr{E}$ — совокупность таких однозначных линейных соответствий $S \subset X \times Y$, что $S \supset T_0$ и $S(X_+) \subset Y_+$. В силу 3.1.3 при упорядочении по включению $\mathscr{E}$ индуктивно, и по лемме Куратовского — Цорна в $\mathscr{E}$ есть максимальный элемент T.

Если $\overline{x} \in X \setminus \operatorname{dom} T$, то можно применить доказанное на этапе I к случаю $X := \operatorname{dom} T \oplus X_1$, $X_0 := \operatorname{dom} T$, $T_0 := T$ и $X_1 := \{\alpha\overline{x} :\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Возникает противоречие с максимальностью T. Итак, T — искомое продолжение. $\rhd$

3.3.5. Замечание. При $Y := \mathbb{R}$ о 3.3.4 иногда говорят как о *теореме Крейна — Рутмана.*

3.3.6. Определение. Элемент x из конуса положительных элементов называют *дискретным*, если $[0,\ x] = [0,\ 1]x$.

3.3.7. *Если на пространстве* $(X,\ X_+)$ *имеется дискретный функционал, то* $X = X_+ - X_+$.

$\lhd$ Пусть T — такой функционал и $\mathscr{X} := X_+ - X_+$. Возьмем $f \in X^{\#}$. Достаточно показать, что $\ker f \supset \mathscr{X} \Rightarrow f = 0$. По условию $T + f \in [0,\ T]$, т. е. для некоторого $\alpha \in [0,\ 1]$ будет $T + f = \alpha T$. Если $T|_{\mathscr{X}} = 0$, то $2T \in [0,\ T]$. Отсюда $T = 0$ и $f = 0$. Если же $T(x_0) \neq 0$ для какого-либо $x_0 \in \mathscr{X}$, то $\alpha = 1$ и вновь $f = 0$. $\rhd$

3.3.8. *Теорема Крейна – Рутмана для дискретного функционала.* *Пусть X — упорядоченное векторное пространство, X — массивное подпространство в X и T_0 — дискретный функционал на X_0. Тогда существует дискретный функционал T на X, продолжающий T_0.*

$\lhd$ «Подправим» доказательство 3.3.4.

Этап I. Предъявленный функционал T дискретен. В самом деле, при $T' \in [0,\ T]$ для подходящего $\alpha \in [0,\ 1]$ при всех $x_0 \in X_0$ будет $T'(x_0) = \alpha T(x_0)$ и $(T - T')(x_0) = (1 - \alpha)T(x_0)$. Оцениваем:

$$T'(\overline{x}) \leq \inf\{T'(x^0) :\ x^0 \geq \overline{x},\ x^0 \in X_0\} = \alpha T(\overline{x});$$

$$(T - T')(\overline{x}) \leq \inf\{(T - T')(x^0) :\ x^0 \geq \overline{x},\ x^0 \in X_0\} = (1 - \alpha)T(\overline{x}).$$

Таким образом, $T' = \alpha T$ и $[0,\ T] \subset [0,\ 1]T$. Противоположное включение справедливо всегда. Итак, функционал T дискретен.

Этап II. Пусть $\mathscr{E}$ — множество, введенное при доказательстве 3.3.4. Рассмотрим множество $\mathscr{E}_d$, состоящее из таких элементов $S \in \mathscr{E}$, что след $S|_{\operatorname{dom} S}$ представляет собой дискретный функционал на пространстве $\operatorname{dom} S$. Следует установить индуктивность $\mathscr{E}_d$. В соответствии с 1.2.19 возьмем цепь $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}_d$. Положим $S := \cup\{S_0 :$

$S_0 \in \mathscr{E}_0\}$. Очевидно, что $S \in \mathscr{E}$. Убедимся в дискретности S, что и завершит доказательство.

Пусть $S' \in (\operatorname{dom} S)^{\#}$ таков, что $0 \le S'(x_0) \le S(x_0)$ для всех $x_0 \in (\operatorname{dom} S)_+$. Если $S(x_0) = 0$ для любого такого x_0, то $S' = 0S$, что и нужно. Если же $S(x_0) \ne 0$ для некоторого $x_0 \in (\operatorname{dom} S)_+$, то выберем $S_0 \in \mathscr{E}_0$ из условия $S_0(x_0) = S(x_0)$. Тогда в силу дискретности S_0 можно записать: $S'(x') = \alpha S(x')$ для всех $x' \in \operatorname{dom} S_0$. При этом $\alpha = S'(x_0)/S(x_0)$, т. е. α не зависит от выбора S_0. Поскольку $\mathscr{E}_0$ — цепь, заключаем: $S' = \alpha S$. $\triangleright$

3.4. Выпуклые функции и сублинейные функционалы

3.4.1. Определение. ***Полурасширенной числовой прямой*** $\mathbb{R}^{\cdot}$ называют множество $\mathbb{R}^{\cdot}$ с присоединенным наибольшим элементом $+\infty$. При этом полагают $\alpha(+\infty) := +\infty$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$, $+\infty + x := x + (+\infty) := +\infty$ $(x \in \mathbb{R}^{\cdot})$.

3.4.2. Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — некоторое отображение. Множество

$$\operatorname{epi} f := \{(x,\ t) \in X \times \mathbb{R} :\ t \ge f(x)\}$$

называют ***надграфиком*** f, а множество

$$\operatorname{dom} f := \{x \in X :\ f(x) < +\infty\}$$

— ***эффективной областью определения*** функции f.

3.4.3. Замечание. Непоследовательность в применении символа $\operatorname{dom} f$ кажущаяся. Именно, эффективная область определения функции $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ совпадает с областью определения однозначного соответствия $f \cap X \times \mathbb{R}$ из X в $\mathbb{R}$. В этой связи при $\operatorname{dom} f = X$ будем, как и прежде, писать $f : X \to \mathbb{R}$, опуская точку в $\mathbb{R}^{\cdot}$.

3.4.4. Определение. Пусть X — вещественное векторное пространство. Отображение $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют ***выпуклой функцией***, если надграфик $\operatorname{epi} f$ — это выпуклое множество.